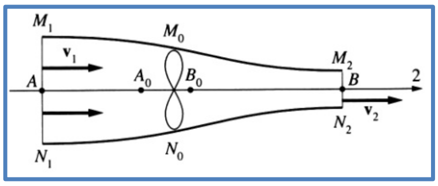
MF4 – Bilans macroscopiques

A – Travaux dirigés



MF41 - Théorie unidimensionnelle de l'hélice

Une hélice est plongée dans un fluide incompressible de masse volumique μ, animé d'un mouvement permanent et irrotationnel selon la direction définie par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ porté par l'axe de l'hélice, à l'exception de la zone située au voisinage immédiat de l'hélice.

L'hélice est supposée plane et on admettra que le fluide traversant l'hélice est contenu à l'intérieur d'un tube de courant ayant la symétrie de révolution et dont la trace dans le plan de figure est constituée par les courbes $M_1M_0M_2$ et $N_1N_0N_2$.

La zone extérieure à ce tube n'est pas affectée par le mouvement de l'hélice et la pression y est désignée par P_o uniforme. Les phénomènes à l'intérieur du tube sont rapportés à un référentiel (R_1) galiléen lié au support de l'hélice.

On suppose que la vitesse et la pression du fluide sont uniformes dans une section droite donnée du tube, et que leur répartition obéit aux hypothèses suivantes :

- En amont de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_o, la vitesse du fluide est v_1, la surface de la section droite est S_1. Sur la figure cette section correspond au point A.

- En aval de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_o, la vitesse du fluide est v_2, la surface de la section droite est S_2. Sur la figure, cette section correspond au point B.

- Au voisinage immédiat de l'hélice, la surface de la section est S, la vitesse du fluide est v.

On désigne par F la composante selon Ox de la force exercée par l'hélice sur le fluide et par P la puissance de cette force, puissance fournie au fluide.

On néglige le poids du fluide dans toutes les questions.

1. Relier v_1S_1 et v_2S_2 à vS.
2. En prenant comme volume de contrôle le tronçon de tube de courant de trace $M_1M_2N_2N_1$, effectuer un bilan de quantité de mouvement et exprimer la force F exercée par l'hélice sur le fluide puis la puissance P fournie pour l'hélice au fluide en fonction de μ, v_1, v_2, v et D_v.
3. Effectuer un bilan énergétique sur le même volume de contrôle. En déduire une autre expression de P en fonction de μ, v_1, v_2 et D_v. Déduire de ces deux expressions de P une relation entre v, v_1 et v_2, et exprimer P à l'aide de μ, S, v_1 et v_2.
4. On définit le rendement de l'hélice par : $r = \frac{P_{extraite}}{P_{incident}} = -\frac{P}{\frac{1}{2}\mu S v_1^3}$. Démontrez que la valeur maximale du rendement est $\frac{16}{27}$. Ce rendement maximal est appelé limite de Betz.
5. On se place dans le cas où $v_1 = 0$. Calculer F en fonction de μ, S et P. Un hélicoptère a pour masse 2 tonnes et son hélice a pour diamètre 5 m. Quelle doit-être la puissance minimale du moteur pour que cet hélicoptère puisse décoller ?

Rép : 1. $D_v = cste$ 2. $P = \mu D_v(v_2 - v_1)v$ 3. $P = \frac{\mu S}{4}(v_2 - v_1)(v_1 + v_2)^2$ 4. $r = \frac{1}{2}(1-x)(x+1)^2$ 5. $F = \frac{1}{2}(\mu S)^{\frac{1}{3}}(4P)^{\frac{2}{3}}$, $P > \sqrt{\frac{2(Mg)^3}{\mu.\pi D^2}} = 400\ kW$

MF42 – Fusée Ariane 5

On étudie le décollage vertical de la fusée Ariane 5. La masse de la fusée et du satellite est notée m_f. A t=0, la masse de gaz est notée m_{go}. Les gaz sont éjectés avec une vitesse verticale par rapport au référentiel terrestre galiléen à la vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée. On note D_m le débit massique supposé constant. On néglige les frottements de l'atmosphère et le champ de pesanteur g est supposé uniforme.

Données :

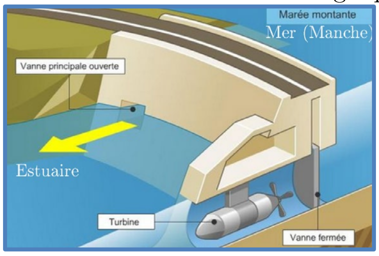
- $D_m = 3{,}6 \times 10^3\ kg.s^{-1}$; $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$;
- $m_0 = m_f + m_{g0} = 460 \times 10^3 kg$;
- $u = 2{,}1 \times 10^3\ m.s^{-1}$

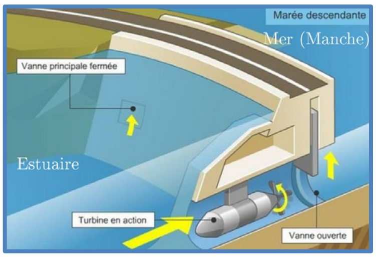
1. A l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force, due à l'éjection des gaz, subie par la fusée.
2. Quelle doit être la valeur minimale de cette force pour que la fusée décolle ? Calculer l'accélération de la fusée à t = 0.
3. Calculer la vitesse de la fusée au bout de 15 s.

Rép : 1. $\vec{\Pi} = -D_m\,\vec{u}$ 2. $\Pi > 4{,}5\ GN$ 3. $v = -u\ln\left(\frac{m_0 - D_m t}{m_0}\right) - gt = 115\ ms^{-1}$

MF43 – Usine marémotrice

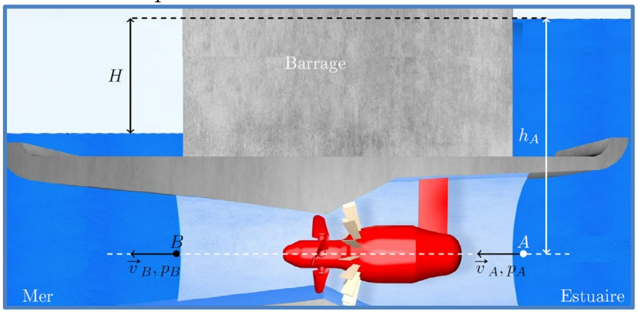
L'usine marémotrice de la Rance, située dans le département de l'Ille et Vilaine, produit de l'énergie électrique grâce une turbine immergée qui récupère une partie de la puissance des marées. La turbine est située sous un barrage qui se situe entre la Rance et la Manche.





À marée montante, la vanne principale du barrage est ouverte : le niveau d'eau est identique côté mer et côté estuaire. À marée haute, on ferme la vanne principale. Lorsque la marée est assez descendue pour que la dénivellation du niveau entre le niveau de la mer et la retenue atteigne 4m, on ouvre la vanne devant la turbine. Le flux d'eau provenant de l'estuaire actionne la turbine. L'usine comporte 24 turbines et sa puissance nominale est de 240MW.

1. Déterminer la vitesse v d'un jet d'eau issu du bas d'un réservoir de hauteur H, maintenu à un niveau constant et à pression atmosphérique.
2. On raisonne sur le schéma ci-dessous qui définit les notations de l'étude.



On effectue les hypothèses simplificatrices suivantes : la section en A et en B est la même et notée S ; du fait des turbulences en aval de la turbine, il n'est pas possible d'appliquer le théorème de Bernoulli pour exprimer la pression p_B. On admet qu'il est possible d'exprimer la pression p_B comme si le fluide était au repos ; l'écoulement est parfait et stationnaire.

- Par un bilan d'énergie sur un système à définir, exprimer la puissance P cédée par l'eau à la turbine en fonction de S, v_A, ρ (masse volumique de l'eau) et v (vitesse du fluide en A en l'absence de turbine).

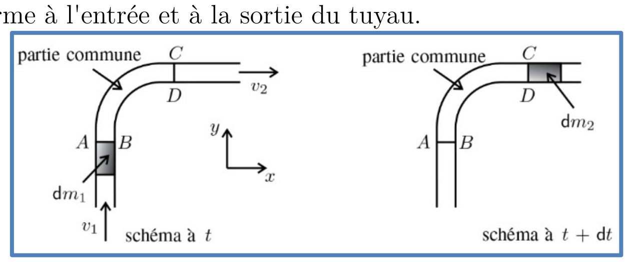
3. Montrer que la puissance est maximale pour une certaine valeur de v_A à exprimer. Calculer la puissance maximale récupérable numériquement sachant que : $S = 22m^2$ et $H = 10m$. Commenter.

Rép : 1. $v = \sqrt{2gH}$ 2. $P = \frac{1}{2}\rho S v_A (v^2 - v_A^2)$ 3. $v_{A,max} = \frac{v}{\sqrt{3}}$ et $P_{max} = 12\ MW$ ...

B – Exercices supplémentaires

MF44 – Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé

On considère un tuyau coudé horizontal de section S constante. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent, incompressible. On néglige les variations d'altitude dans le tuyau. On appelle v_1 et v_2 respectivement les vitesses à l'entrée et à la sortie du tuyau. On appelle p_1 et p_2 les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie du tuyau. On suppose que la pression est uniforme à l'entrée et à la sortie du tuyau.



1. Montrer que $p_1 = p_2$.
2. Exprimer la force exercée par le fluide sur le coude dans le plan horizontal en fonction de μ, D_v, S et p_1.

Rép : 1. $z_1 = z_2$ et $v_1 = v_2 \Rightarrow p_1 = p_2$ 2. $\vec{F'} = \left(p_1 S + \mu \frac{D_v^2}{S}\right)(\vec{u_y} - \vec{u_x})$

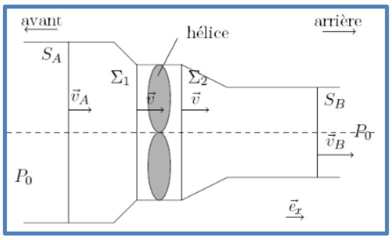
MF45 – Aéroglisseur

Les aéroglisseurs peuvent se déplacer sur des terrains variés : eau, glace, sable... Ils sont souvent utilisés comme véhicules de secours car ils présentent l'avantage de s'adapter à toute étendue d'eau, quelle que soit sa profondeur, contrairement aux navires qui peuvent s'échouer. À l'aide d'un compresseur, le véhicule génère un coussin d'air sous une jupe souple ; une hélice assure la propulsion.

Données numériques :

- Pesanteur terrestre : $g = 10\, m \cdot s^{-2}$, masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}2\, kg \cdot m^{-3}$, masse de l'aéroglisseur étudié : $m = 4{,}8\, t$, largeur de la jupe : $L = 5m$, longueur de la jupe : $l = 10m$

1. Quelle surpression ΔP doit-on imposer entre l'intérieur et l'extérieur de la jupe afin d'assurer la sustentation de l'aéroglisseur ?
2. La hauteur entre le sol et le bord inférieur de la jupe est appelée hauteur de vol et notée h. On note v_2 la vitesse de fuite de l'air sur les bords de la jupe. En précisant les hypothèses effectuées, estimer numériquement la vitesse de fuite.
3. Évaluer, en régime stationnaire, la puissance que doit fournir le compresseur pour maintenir une hauteur de vol $h = 1\, cm$ (on pourra négliger la variation d'énergie cinétique de l'air lors du passage dans le compresseur).
4. On s'intéresse maintenant à la propulsion de l'aéroglisseur, assurée par une hélice. On a représenté ci-dessous un tube de courant dans le référentiel de l'aéroglisseur. La pression et la vitesse sont supposées uniformes sur chaque section du tube de courant, et la pression à l'extérieur du tube de courant est supposée uniformément égale à P_0. On note S la section du tube de courant au niveau de l'hélice. En effectuant des bilans de quantité de mouvement, exprimer la force $\vec{F}$ exercée par l'hélice sur l'air de deux manières différentes. En déduire une relation simple entre v, v_A et v_B.



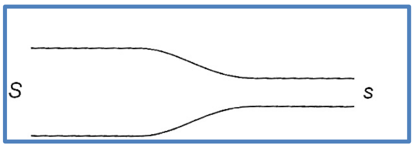
5. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on suppose l'air immobile à grande distance devant l'hélice et on note : $\vec{v} = -u\,\vec{e_x}$ la vitesse de l'aéroglisseur, $\vec{v_e} = v_e\,\vec{e_x}$ la vitesse de l'air à grande distance derrière l'hélice et P_u la puissance fournie par l'aéroglisseur. Par ailleurs on note P_m la puissance fournie par le moteur à l'hélice dans le référentiel de l'aéroglisseur. La vitesse de rotation de l'hélice est supposée constante.

- Exprimer le rendement $\eta = \frac{P_u}{P_m}$ de la propulsion en fonction de u et v_e. Commenter l'expression obtenue.

Rép : 1. $\Delta p = \frac{mg}{S_1} = 960\, Pa$ 2. $v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = 40\, m \cdot s^{-1}$ 3. $P_{compresseur} = (P_1 - P_0) S_2 v_2 = 1{,}2 \cdot 10^4 W$ 4. $v = \frac{v_A + v_B}{2}$ 5. $\eta = \frac{1}{1 + \frac{v_e}{2u}}$

MF46 - Rétrécissement d'une conduite

Un liquide incompressible (masse volumique $\mu = 1000$ kg.m^{-3}) est en écoulement parfait stationnaire dans une conduite qui se rétrécit, passant de la section S à la section s.



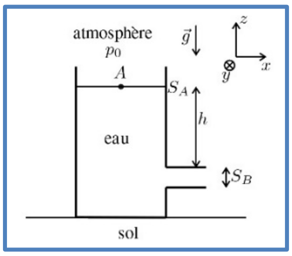
1. Qualitativement, comment est dirigée la force exercée par l'écoulement sur la conduite ? On va chercher à exprimer cette force en fonction des paramètres de l'écoulement.

   La vitesse est V en amont, quelle est sa valeur v en aval ?
2. Sachant que la pression est P_1 en amont, quelle est la pression P_2 en aval ?
3. Que se passe-t-il lorsque V augmente suffisamment ? Donner la valeur limite V_l pour de l'eau, avec $P_1 = 2.10^5$ Pa, $S = 1$ cm^2 et s=0,5 cm^2.

   On supposera dans la suite que la vitesse V reste inférieure à V_l.
4. En faisant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force exercée par le fluide sur la conduite en fonction de P_1, S, s, V et μ.

Rép : 1. $v = \frac{S}{s} V$ 2. $P_2 = P_1 + \frac{\mu}{2} V^2 \left(1 - \frac{S^2}{s^2}\right)$ 3. $V_l = 12 ms^{-1}$ 4. $\vec{f}_{fluide \to conduite} = m\vec{g} + \left(P_1 (S - s) - \frac{\frac{\mu}{2} V^2 (S-s)^2}{s}\right) \vec{u_x}$

MF47 – Force subie par un réservoir

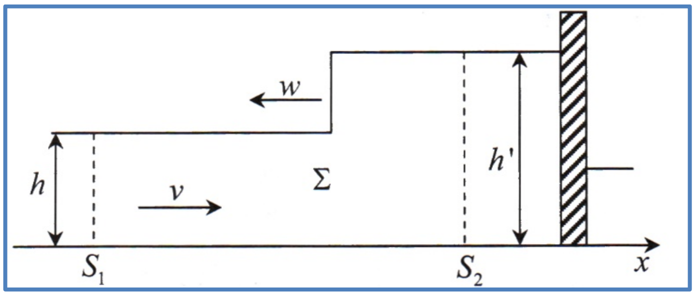


On considère un réservoir muni d'une vidange. On suppose que $S_B \ll S_A$. L'écoulement est homogène, parfait et incompressible.

1. Au bout d'une durée très courte un régime quasi-stationnaire est établi. Montrer que la vitesse de sortie vaut alors $v_B = \sqrt{2gh}$
2. Exprimer la force que l'eau exerce sur le réservoir.
3. Quelle est la condition sur le coefficient de frottement f pour que le réservoir ne glisse pas ?

Rép : 1. Bernoulli… 2. $\overrightarrow{F_1} = m\,\vec{g} - p_0 S_A\,\overrightarrow{u_z} - p_0 S_B\,\overrightarrow{u_x} - D_m v_B\,\overrightarrow{u_x}$ 3. $T < f\,N \Rightarrow D_m v_B < f(mg + Mg + p_0 S_A)$

MF48 – Onde de ressaut



Soit un canal horizontal à section rectangulaire de côté L constant parcouru par l'eau. L'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène et la masse volumique de l'eau est notée ρ. Initialement la hauteur de l'eau est h et le champ des vitesses du fluide est uniforme et constant sur toute section droite du canal : $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_x}$.

A un instant donné, le canal est obturé, par une paroi verticale. Une vague remonte alors le canal à vitesse w mesurée dans le référentiel terrestre. La hauteur d'eau en amont du ressaut est h et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est constante est vaut $h' > h$. Le ressaut remonte le canal à une vitesse constante $\vec{w} = -w\,\overrightarrow{u_x}$. Le front du ressaut sera considéré vertical et constitue une onde de choc.

On veut étudier la vitesse de propagation de ce front d'onde à l'aide d'un modèle unidimensionnel du champ des vitesses. On se placera dans le référentiel R lié au front d'onde, supposé galiléen. On notera P_0 la pression de l'air ambiante et on considérera le système fermé Σ^* délimité à l'instant t par deux sections verticales $S_1\ et\ S_2$ situées loin du front d'onde.

1. À l'aide d'un bilan de masse, établir une relation entre $v, w, h\ et\ h'$.
2. Déterminer la variation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système Σ^* pendant la durée dt.
3. Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ^*.
4. À l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer une relation entre $v, w, h, g\ et\ h'$.
5. En déduire l'expression de la célérité de la vague w en fonction de g, h et h'.
6.

a) A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique sur Σ^* démontrez que :

$$\frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{2}(h - h')\ \frac{(h'^2 + h^2)}{2hh'}$$

b) Démontrer que la puissance des forces pression s'écrit :

$$P_p = \frac{\rho g L h' w}{2}(h - h')$$

c) En déduire la puissance des forces intérieures.

$$P_{int} = \rho g L h' w . \frac{(h-h')^3}{4hh'}$$

d) Dans le cas du mascaret de la gironde, on a $h = 10m, h' = 12m, L = 100m$. Calculer la vitesse du mascaret w et la puissance dissipée par le mascaret.

Rép : 1. $h(v + w) = h'w$ 2. $\frac{Dp_x^*}{Dt} = -\rho L h' w\, v$ 3. $\vec{F} = \frac{\rho g L}{2}(h^2 - h'^2)\overrightarrow{u_x}$ 4. $\frac{g}{2}(h'^2 - h^2) = h' w\, v$

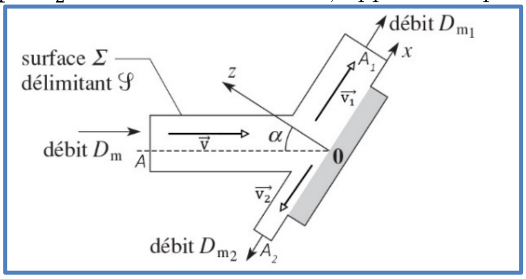
5. $w = \sqrt{\frac{gh}{2h'}(h' + h)}$ 6. c) $P_{int} = \rho g L h' w . \frac{(h-h')^3}{4hh'} < 0$ d) $w = 9{,}5\ ms^{-1}\ et\ P_{int} = -1{,}9\ MW$

MF49 - Division et déflexion de jets d'eau

L'écoulement du jet d'eau, de vitesse $v=30 m.s^{-1}$ et de section droite $S=20 cm^2$, de masse volumique $\mu=1000 kg.m^{-3}$, est supposé parfait et incompressible. On notera P_0 la pression atmosphérique et on négligera les forces de pesanteur. Le jet et la plaque sont soumis à la pression atmosphérique.

1. Division du jet sur une plaque fixe plane

Le jet d'eau incident frappe une plaque horizontale fixe P_1, et fait l'angle θ avec cette plaque. Il se divise en deux jets émergents : jet 1 et jet 2, de vitesse $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ de même direction Ox, opposées et parallèles à la plaque P_1.



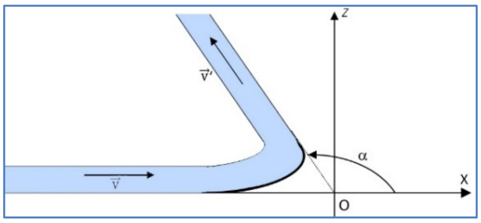
a) Montrer que $v_1 = v_2 = v$.

b) Pour quelle direction θ le débit du jet 1 est-il trois fois supérieur au débit du jet 2 ? Calculer, dans ces mêmes conditions, les débits volumiques Q_1 et Q_2 de chacun des jets émergents.

c) Calculer, dans ces mêmes conditions, la force $\overrightarrow{F_1}$ exercée par le liquide sur la plaque.

2. Déflexion du jet par une plaque courbe fixe

Le même jet d'eau horizontal frappe une plaque courbe P_2, qui provoque une déflexion α=120° du jet ; on admettra que v'=v.

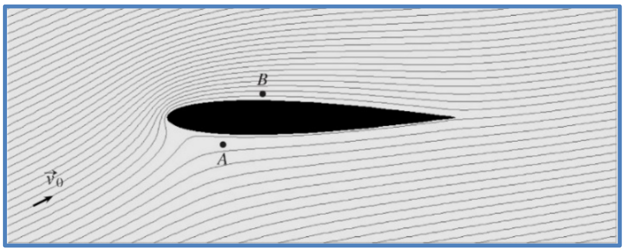


Exprimer les composantes de la force $\overrightarrow{F_2}$ exercée par le liquide sur la plaque coudée supposée fixe. Calculer F_2 et préciser la direction de $\overrightarrow{F_2}$.

Rép : 1. a) Bernoulli b) θ=60°, $Q_1 = 45\ Ls^{-1}$ et $Q_2 = 15\ Ls^{-1}$ c) $\overrightarrow{F_1} = -\mu S v^2 \sin\theta\, \overrightarrow{u_z} \Rightarrow F_1 = 1560 N$ 2. $F_2 = 3118\ N$ et $\theta_2 = -30°$

MF410 - Écoulement autour d'une aile d'avion

La figure ci-dessous présente quelques lignes de courant autour d'une aile d'avion, vue en coupe. L'air s'écoule de la gauche vers la droite de la figure.



1. Sur la figure, représenter sous forme d'un vecteur la résultante des forces que l'air exerce sur l'aile, après avoir donné toutes les justifications utiles. Décomposer cette force en portance et traînée.
2. Si l'avion vole à une vitesse $v_0 = 100\ ms^{-1}$ par rapport au sol, estimer la vitesse d'écoulement de l'air au point A par rapport au sol. Expliciter toutes les hypothèses faites. Estimer de même la vitesse d'écoulement de l'air au point B par rapport au sol.
3. Proposer une estimation de l'écart de pression aux points A et B par rapport à la pression atmosphérique. Commenter.

Rép : 1. $\vec{F}_{air \to aile} = D_m(\overrightarrow{v_0} - \overrightarrow{v_1})$ 2. $\vec{v}_{air\ dans\ R_T}(A) = (v_A - v_0)\overrightarrow{u_x}$ et $\vec{v}_{air\ dans\ R_T}(B) = (v_B - v_0)\overrightarrow{u_x}$ 3. $P_A - P_0 = 3300 Pa$ et $P_B - P_0 = -12000 Pa$