MF4 – Bilans macroscopiques

A – Travaux dirigés

MF41 - Théorie unidimensionnelle de l'hélice

1. Bilan de masse :

$$D_m = cste, or\ \mu = cste\ d'où\ D_v = Sv = cste$$
$$Sv = S_1v_1 = S_2v_2$$

2. Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{m2}\overrightarrow{v_2} - D_{m1}\overrightarrow{v_1} = D_m(v_2 - v_1)\overrightarrow{u_x} = \mu D_v(v_2 - v_1)\overrightarrow{u_x}$$
$$\Rightarrow P = \vec{F}.\vec{v} = \mu D_v(v_2 - v_1)v$$

3. Bilan d'énergie :

$$\frac{DE_m}{Dt} = D_{m2}e_2 - D_{m1}e_1 = D_m(e_2 - e_1) = \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P_{rot} + P_{pression} + P_{int}$$

Or : $\begin{cases} P_{int} = 0\ absence\ de\ viscosité \\ P_{pression} = 0\ même\ pression\ autour\ du\ système\ étudié \end{cases}$

Donc : $P = \mu D_v \frac{(v_2^2 - v_1^2)}{2} = P \Rightarrow \frac{D_m(v_2^2 - v_1^2)}{2} = \mu D_v(v_2 - v_1)v \Leftrightarrow v = \frac{(v_2 + v_1)}{2}$

$$\Rightarrow P = \mu S(v_2 - v_1)\frac{(v_2 + v_1)^2}{4}$$

4.

a) $P_{incident} = \frac{1}{2}\mu S v_1^3\ et\ P_{extraite} = -P = -\mu S(v_2 - v_1)\frac{(v_2 + v_1)^2}{4}$

$$\Rightarrow r = \frac{\mu S(v_1 - v_2)\frac{(v_2 + v_1)^2}{4}}{\frac{1}{2}\mu S v_1^3} = \frac{1}{2}(1 - x)(x + 1)^2\ où\ x = \frac{v_2}{v_1}$$

Donc : $\frac{\partial r}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow -(x + 1)^2 + 2(x + 1)(1 - x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(-x - 1 + 2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow r_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$$

Ce résultat forme la limite de Betz qui indique que la puissance théorique maximale développée par un capteur éolien est égale à 16/27 (60%) de la puissance incidente du vent qui traverse l'éolienne.

b) Si $v_1 = 0 :\ P = \mu S\frac{v_2^3}{4}\ et\ F = \frac{\mu S v_2^2}{2}$

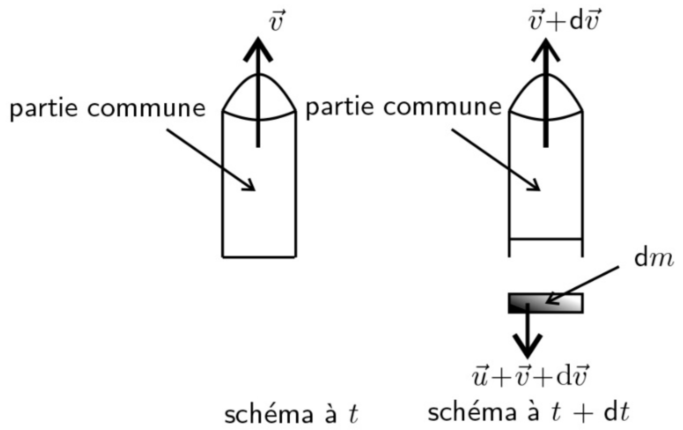
c) Donc : $F = \mu S\frac{\left(\frac{4P}{\mu S}\right)^{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{1}{2}(4P)^{\frac{2}{3}}(\mu S)^{1/3}$

L'hélicoptère décolle si : $F > Mg \Leftrightarrow \frac{1}{2}(4P)^{\frac{2}{3}}(\mu S)^{\frac{1}{3}} > Mg \Leftrightarrow (4P)^{\frac{2}{3}} > \frac{2Mg}{(\mu S)^{\frac{1}{3}}} \Leftrightarrow 4P > \frac{(2Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\mu S)^{\frac{1}{2}}}$

$$P > \frac{(Mg)^{3/2}}{(2\mu S)^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{(Mg)^3}{2\mu S}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{(Mg)^3}{2\mu.\frac{\pi D^2}{4}}} \Leftrightarrow P > \sqrt{\frac{2(Mg)^3}{\mu.\pi D^2}} = 400kW$$

MF42 – Fusée Ariane 5

1. Définition du système fermé :



Le référentiel absolu est le référentiel terrestre supposé galiléen. On appelle $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la fusée t, $\mathrm{d}\vec{v}$ la variation du vecteur vitesse de la fusée pendant dt. Le vecteur vitesse de la fusée à $t + \mathrm{d}t$ est donc $\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$.
On se ramène à un système fermé Σ de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : fusée de vitesse $\vec{v}$ de masse $m_f + m_g(t)$.
- Système fermé Σ à t +dt : fusée de vitesse $(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})$ de masse $(m_f + m_g(t) - D_m \mathrm{d}t)$ + gaz éjecté de masse dm. En effet, pendant dt une masse $\mathrm{d}m = D_m \mathrm{d}t$ de gaz a été éjectée. Cette masse de gaz éjectée a une vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée. On applique la loi de composition des vitesses à dm pour calculer la vitesse absolue de la masse de gaz éjectée : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$. Le référentiel relatif lié à la fusée est en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre, donc la vitesse d'entraînement est égale à la vitesse de la fusée, soit $\vec{v}_e = \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$. La vitesse absolue de la masse dm est donc : $\vec{v}_a = \vec{u} + \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}$.

Bilan de quantité de mouvement :

A t, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}\,(t) = \left(m_f + m_g\,(t)\right)\vec{v}$$

A t + dt, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}\,(t + \mathrm{d}t) = \left(m_f + m_g\,(t) - D_m \mathrm{d}t\right)(\vec{v} + \mathrm{d}\vec{v}) + D_m \mathrm{d}t\,(\vec{u} + \vec{v} + \mathrm{d}\vec{v})$$

En simplifiant, on a : $\vec{p}\,(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}\,(t) = \left(m_f + m_g\,(t)\right)\mathrm{d}\vec{v} + D_m \mathrm{d}t\,\vec{u}$

On obtient :

$$\frac{\vec{p}\,(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \left(m_f + m_g\,(t)\right)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + D_m\,\vec{u}$$

Bilan des actions mécaniques extérieures :

Forces de gravitation : $\left(m_f + m_g\,(t)\right)\vec{g}$.
Le théorème de la quantité de la mouvement s'écrit :

$$\frac{\vec{p}\,(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}\,(t)}{\mathrm{d}t} = \left(m_f + m_g\,(t)\right)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + D_m\,\vec{u} = \left(m_f + m_g\,(t)\right)\vec{g}$$

Soit :

$$\left(m_f + m_g(t)\right)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(m_f + m_g(t)\right)\vec{g} - D_m\,\vec{u}$$

La force due à l'éjection des gaz subie par la fusée que l'on appelle force de poussée est donc égale à :

$$-D_m\vec{u}$$

Tout se passe comme si on appliquait le théorème de la quantité de mouvement au système fermé de masse $m_f + m_g(t)$ soumis aux forces de pesanteur $\left(m_f + m_g(t)\right)\vec{g}$ et à la force que les gaz éjectés exercent sur la fusée.

2. La condition de décollage est qu'à $t = 0$, on doit avoir :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$$

On projette sur l'axe Oz : $\vec{v} = v\vec{u}_z$, $\vec{u} = -u\vec{u}_z$ et $\vec{g} = -g\vec{u}_z$.
On doit donc avoir à $t = 0$:

$$D_m u > \left(m_f + m_{g0}\right)g$$

Soit $D_m u > 4{,}508 \times 10^6\,\mathrm{N}$.
L'accélération vaut : $a = 6{,}63\,\mathrm{m.s^{-2}}$.

3. On suppose qu'il reste des gaz dans la fusée. L'équation différentielle du mouvement en projection sur Oz est :

$$\left(m_f + m_{g0} - D_m t\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\left(m_f + m_{g0} - D_m t\right)g + D_m\,u$$

On sépare les variables :

$$\mathrm{d}v = \frac{D_m\,u - \left(m_f + m_{g0} - D_m t\right)g}{\left(m_f + m_{g0} - D_m t\right)}\mathrm{d}t$$

En simplifiant, on a :

$$\mathrm{d}v = \frac{D_m\,u}{\left(m_f + m_{g0} - D_m t\right)}\mathrm{d}t - g\mathrm{d}t$$

L'intégration entre l'instant initial et l'instant t donne :

$$v = \frac{D_m u}{-D_m}\ln\frac{m_f + m_{g0} - D_m t}{m_f + m_{g0}} - gt$$

On pose $m_0 = m_f + m_{g0}$. On a donc :

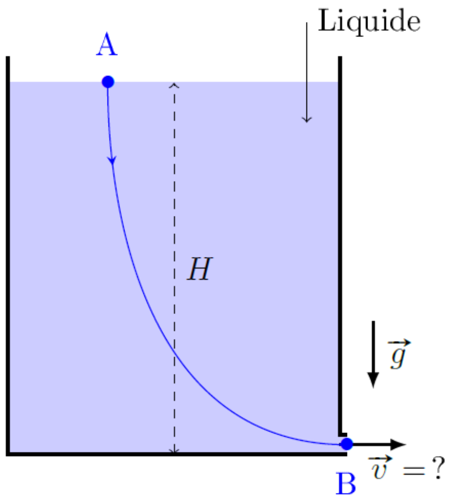
$$v = -u\ln\frac{m_0 - D_m t}{m_0} - gt$$

L'application numérique donne :

$$v = 115\,\mathrm{m.s^{-1}} = 415\,\mathrm{km.h^{-1}}$$

MF43 – Usine marémotrice

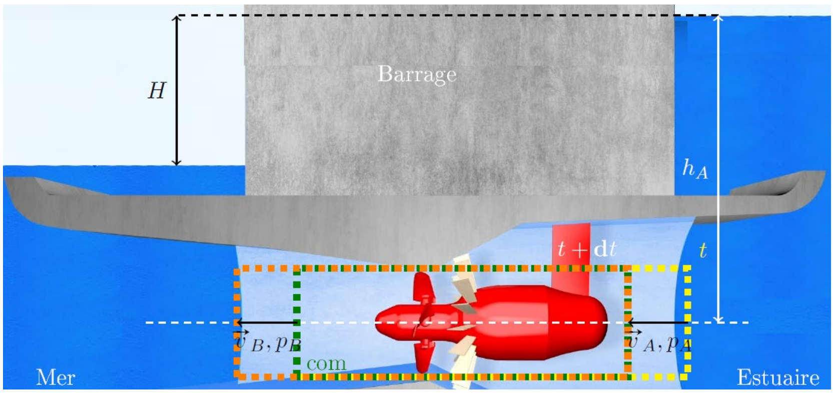
1. On suppose l'écoulement stationnaire, incompressible et parfait.



D'après la relation de Bernoulli appliquée le long de la ligne de courant AB (voir ci-contre) :
$\frac{v_A^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho} + gH = \frac{v^2}{2} + \frac{p_{atm}}{\rho}$.

Comme $v_A = 0\,\text{m/s}$ (niveau constant), il vient : $\boxed{v = \sqrt{2gH}}$ (formule de TORRICELLI).

2. Pour effectuer le bilan d'énergie mécanique, on raisonne sur le système fermé ci-dessous, représenté à deux instants t et t + dt :



La variation d'énergie mécanique du système, entre t et $t + \mathrm{d}t$, s'écrit :

$$\begin{aligned} E_\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t) - E_\mathrm{M}(t) &= E_\mathrm{com}(t+\mathrm{d}t) + \frac{1}{2}\rho S v_B^3 \mathrm{d}t - E_\mathrm{com}(t) - \frac{1}{2}\rho S v_A^3 \mathrm{d}t \\ &= E_\mathrm{com}(t+\mathrm{d}t) - E_\mathrm{com}(t) + \frac{1}{2}\rho S (v_B^3 - v_A^3)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Comme :

- on est en régime stationnaire : $E_\mathrm{com}(t+\mathrm{d}t) = E_\mathrm{com}(t)$;
- «La section en A et en B est la même et notée S». Avec la conservation du débit volumique, il vient donc : $Sv_A = Sv_B \Leftrightarrow v_A = v_B$;

On a donc : $E_\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t) - E_\mathrm{M}(t) = 0$.

Les travaux intérieurs comme extérieurs sont :

- le travail utile : $P_{\text{hélice} \to \text{eau}}\mathrm{d}t = -P_{\text{eau} \to \text{hélice}}\mathrm{d}t = -P\mathrm{d}t$.
- le travail des forces de pression extérieures : $p_A S v_A \mathrm{d}t - p_B S v_B \mathrm{d}t = (p_A - p_B) S v_A \mathrm{d}t$. Pour exprimer p_A, on applique la relation de BERNOULLI le long d'une ligne de courant partant de la surface de l'estuaire et jusqu'à A : $p_A = p_\mathrm{atm} + \rho(gh_A - \frac{1}{2}v_A^2)$. Par suite :
$$(p_A - p_B) S v_A \mathrm{d}t = \left(p_\mathrm{atm} + \rho(gh_A - \frac{1}{2}v_A^2) - (p_\mathrm{atm} + \rho g(h_A - H))\right) S v_A \mathrm{d}t = \rho S v_A (gH - \frac{1}{2}v_A^2)\mathrm{d}t.$$
- le travail des forces de pression intérieures : nul par hypothèse d'écoulement incompressible.
- le travail des forces de viscosité : nul par hypothèse d'écoulement parfait.

Le bilan d'énergie mécanique entre t et $t + \mathrm{d}t$ s'écrit donc :

$$0 = -P\mathrm{d}t + \rho S v_A (gH - \frac{1}{2}v_A^2)\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow P = \rho S v_A (gH - \frac{1}{2}v_A^2)$$
$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{2}\rho S v_A (\underbrace{2gH}_{=v^2} - v_A^2)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{P = \frac{1}{2}\rho S v_A (v^2 - v_A^2)}$$

3. On pose $\frac{dP}{dv_A} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\rho S v^2 - \frac{3}{2}\rho S v_{A,max}^2 = 0 \Rightarrow v_{A,max} = \frac{v}{\sqrt{3}}$

Comme $v_A \mapsto \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v_A} = \frac{1}{2}\rho S(v^2 - 3v_A^2)$ est représentée graphiquement par une parabole concave, l'extremum est un maximum. Par suite :
$P_{\max} = P(v_{A,\max}) = \frac{1}{2}\rho S v_{A,\max}(v^2 - v_{A,\max}^2) = \frac{1}{2}\rho S \frac{v}{\sqrt{3}}(v^2 - \frac{v^2}{3}) = \boxed{\frac{1}{3\sqrt{3}}\rho S v^3}$.

Application numérique :

On prend, comme indiqué par l'énoncé : $H = 10\,\mathrm{m}$. Il vient : $v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 10} \simeq 14\,\mathrm{m/s}$. Puis : $P_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\rho S v^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \times 1 \times 10^3 \times 22 \times 14^3$ $\boxed{\simeq 12\,\mathrm{MW}}$. Si l'on ne retient que l'ordre de grandeur (simplicité du modèle), on a : $\boxed{P \sim 1 \times 10^7\,\mathrm{W}}$. Il faut comparer cela au $240\,\mathrm{MW}$ produits par les 24 turbines. Cela fait $10\,\mathrm{MW}$ par turbine. L'ordre de grandeur est bon.

B – Exercices supplémentaires

MF44 – Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé

1. L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique : $D_v = S_1 v_1 = S_2 v_2$. Comme $S_1 = S_2$, on a donc $v_1 = v_2$ que l'on appellera v dans la deuxième question.
L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible (HPPI). Le théorème de Bernoulli s'écrit sur une ligne de courant entre l'entrée et la sortie :

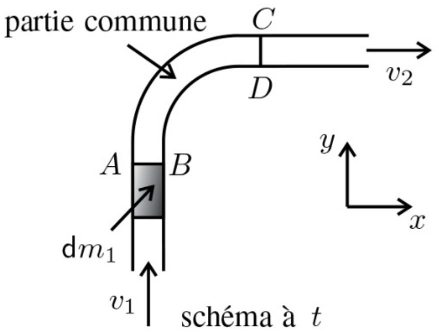
$$\frac{p_2}{\mu} + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 = \frac{p_1}{\mu} + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1$$

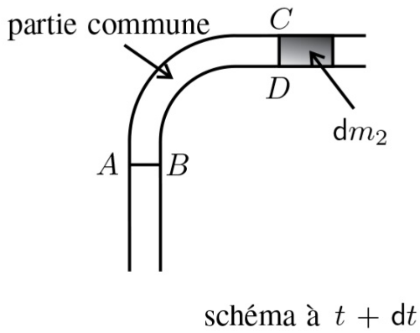
On néglige les variations d'altitude dans le tuyau, donc $z_1 = z_2$. Comme $v_1 = v_2$, on a donc : $p_1 = p_2$.

2. Définition du système fermé :

On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement à un système ouvert. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt.
- Système fermé Σ à t +dt : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt.





Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à t + dt : $\vec{p}_{\text{PC}}(t) = \vec{p}_{\text{PC}}(t + \mathrm{d}t)$.
On a conservation du débit massique, donc dm_1 = dm_2 = dm.

Bilan de quantité de mouvement :

A t, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}\,(t) = \vec{p}_{\text{PC}}\,(t) + \mathrm{d}m\,\vec{v}_1$$

A t + dt, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}\,(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_{\text{PC}}\,(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\,\vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}\,(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}\,(t)=\mathrm{d}m\,(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}\,(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}\,(t)}{\mathrm{d}t}=D_m\,(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}\,(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}\,(t)}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $p_1S\vec{u}_y$.
- Force de pression à la sortie : $-p_2S\vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m\vec{g}$.
- Force que le coude exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force $\vec{F}$ que l'eau exerce sur le coude.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}\,(t+\mathrm{d}t)-\vec{p}\,(t)}{\mathrm{d}t}=D_m\,(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=p_1S\vec{u}_y-p_2S\vec{u}_x+m\vec{g}-\vec{F}$$

On a donc :

$$\vec{F}=p_1S\vec{u}_y-p_2S\vec{u}_x+m\vec{g}-D_m\left(v_2\vec{u}_x-v_1\vec{u}_y\right)$$

Le débit massique est $D_m=\mu Sv$. On en déduit :

$$\vec{F}=\left(p_1S+\mu Sv^2\right)\vec{u}_y-\left(p_2S+\mu Sv^2\right)\vec{u}_x+m\vec{g}$$

Le débit volumique est $D_v=Sv$, on a donc : $v^2=\dfrac{D_v^2}{S^2}$. Comme $p_2=p_1$, la force $\vec{F}'$ que le fluide exerce sur le coude dans le plan horizontal est donc :

$$\vec{F}'=\left(p_1S+\mu\frac{D_v^2}{S}\right)\vec{u}_y-\left(p_1S+\mu\frac{D_v^2}{S}\right)\vec{u}_x$$

MF45 – Aéroglisseur

1. *Pour cette question facile, le candidat devra tout de même afficher un minimum de rigueur en précisant le système étudié, la loi utilisée...*

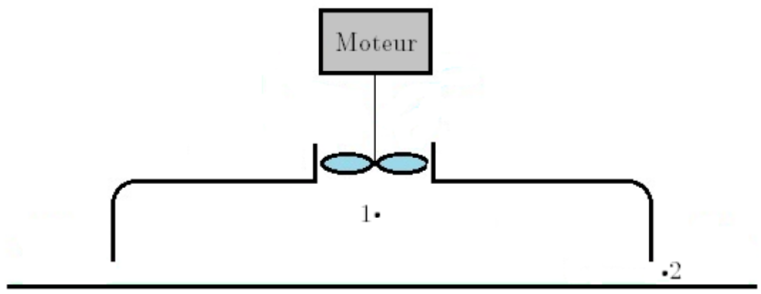
Lorsque l'aéroglisseur est stable, il est en équilibre sous l'effet de son poids et des forces de pression. On note $S_1 = L \times l$ la section horizontale de l'aéroglisseur.

Principe fondamental de la dynamique à l'équilibre, en projection sur un axe vertical :

$$-P_{\text{atm}} S_1 + P_1 S_1 - mg = 0$$

$$\boxed{\Delta P = P_1 - P_{\text{atm}} = \frac{mg}{S_1} = \frac{4,8 \times 10^3 \times 10}{5 \times 10} = 9{,}6 \times 10^2\,\text{Pa}}$$

2. En supposant l'écoulement stationnaire et incompressible, et en considérant l'air comme un fluide parfait, on peut appliquer la relation de Bernoulli entre les points 1 et 2.



$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + g z_2$$

On considère que le point 2 est à la pression atmosphérique.

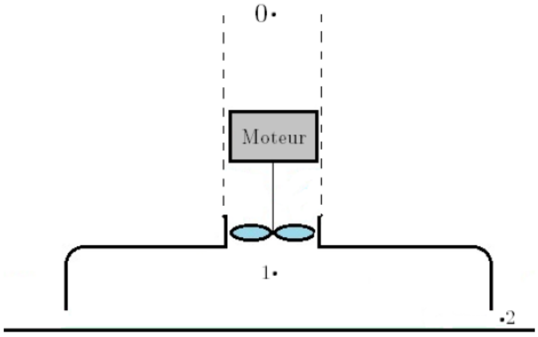
On peut négliger la variation d'altitude : pour une variation de 50 cm, $g(z_1 - z_2) \approx 5\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$ est faible devant $\dfrac{P_1 - P_2}{\rho} = 800\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$.

On néglige également la vitesse v_1 par rapport à v_2 (la section en 1 est très supérieure à la section de fuite).

$$\frac{P_1}{\rho} = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,6 \times 10^2}{1,2}} = 40\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

3. On peut effectuer un bilan d'énergie cinétique sur un "grand" tube de courant dont l'entrée est située loin du compresseur (pression P_{atm}, vitesse v_0) et la sortie sous la jupe (pression P_1, vitesse v_1).



En régime stationnaire :

$$\frac{DE_c}{Dt} = D_m(e_{c,1} - e_{c,0}) = P_{compresseur} + P_{pression,0} + P_{pression,1}$$

En négligeant la variation d'énergie cinétique :

$$P_{compresseur} + P_0 S_0 v_0 - P_1 S_1 v_1 = 0$$

L'écoulement est supposé incompressible donc le débit volumique est conservé :

$$D_V = S_0 v_0 = S_1 v_1 = S_2 v_2$$

où $S_2 = 2(L + l)h$ est la section de fuite.

$$\boxed{P_{compresseur} = (P_1 - P_0)S_2 v_2 = 9,6 \times 10^2 \times 2 \times (10 + 5) \times 10^{-2} \times 40 \approx 1{,}2 \times 10^4\,\mathrm{W}}$$

Remarque : on peut vérifier que la variation d'énergie cinétique est négligeable. Le débit volumique vaut :

$$D_V = S_2 v_2 = 12\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

On en déduit la vitesse $v_1 = \dfrac{D_V}{S_1} = 0{,}24\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ et en estimant la section d'entrée du compresseur à $1\,\mathrm{m}^2$, $v_0 = 12\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Dans le bilan de puissance, on a alors $D_m(e_{c,1} - e_{c,0}) = 1\,\mathrm{kW}$ inférieur à 10% de la valeur obtenue pour $P_{compresseur}$.

4. Bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire sur le "petit" tube délimité par Σ_1 et Σ_2 :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = D_m(\vec{v} - \vec{v}) = \vec{0}$$

Par ailleurs $\dfrac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{F} + P_1 S\vec{e}_x - P_2 S\vec{e}_x$

On a donc $\boxed{\vec{F} = (P_2 - P_1)S\vec{e}_x}$

Bilan de quantité de mouvement sur le "grand" tube délimité par S_A et S_B :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_m(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = D_m(v_B - v_A)\vec{e}_x$$

La résultante des forces de pression autour du système est nulle (pression égale à P_0) donc $\dfrac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{F}$

On a donc $\boxed{\vec{F} = D_m(v_B - v_A)\vec{e}_x}$.

Pour relier P_1, P_2, v_A et v_B, on applique la relation de Bernoulli entre S_A et Σ_1, puis entre Σ_2 et S_B :

$$P_0 + \rho\frac{v_A^2}{2} = P_1 + \rho\frac{v^2}{2}$$

$$P_0 + \rho\frac{v_B^2}{2} = P_2 + \rho\frac{v^2}{2}$$

L'identification des deux expressions de $\vec{F}$ donne :

$$(P_2 - P_1)S = D_m(v_B - v_A)$$

$$\rho S\frac{v_B^2 - v_A^2}{2} = \rho S v(v_B - v_A)$$

$$\boxed{v = \frac{v_A + v_B}{2}}$$

5. On utilise la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{air/Terre} = \vec{v}_{air/aeroglisseur} + \vec{v}_{aeroglisseur/Terre}$$

Or $\vec{v}_{aeroglisseur/Terre} = -u\vec{e}_x$ donc :

$$\vec{v}_{air/aeroglisseur} = \vec{v}_{air/Terre} + u\vec{e}_x$$

Dans le référentiel de l'aéroglisseur (référentiel galiléen, car en translation rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre supposé galiléen) :

$$\vec{v}_A = \vec{0} + u\vec{e}_x = u\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_e + u\vec{e}_x = (v_e + u)\vec{e}_x$$

La puissance fournie par l'hélice à l'air dans ce référentiel vaut alors :

$$P_{helice\to air} = \vec{F}.\vec{v} = D_m(v_B - v_A).\frac{v_A + v_B}{2}$$

On a toujours $D_m = \rho S v = \rho S\frac{v_A + v_B}{2}$ d'où :

$$P_{helice\to air} = \rho S(v_B - v_A)\left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2$$

$$P_{helice\to air} = \rho S v_e\left(\frac{v_e + 2u}{2}\right)^2$$

L'hélice a une vitesse de rotation constante donc d'après le théorème de la puissance cinétique appliqué à l'hélice :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = 0 = P_{moteur\to helice} + P_{air\to helice}$$

D'autre part $P_{air\to helice} = -P_{helice\to air}$
On en déduit $P_m = P_{moteur\to helice} = P_{helice\to air}$. On a donc :

$$\boxed{P_m = \rho S v_e\left(\frac{v_e + 2u}{2}\right)^2}$$

Dans le référentiel terrestre, l'aéroglisseur subit de la part de l'hélice une force $-\vec{F}$. La puissance associée vaut donc :

$$P_u = -\vec{F}.(-u\vec{e}_x) = D_m(v_B - v_A)u = \rho S\frac{v_A + v_B}{2}(v_B - v_A)u$$

$$\boxed{P_u = \rho S v_e \frac{v_e + 2u}{2}u}$$

On en déduit le rendement $\boxed{\eta = \frac{P_u}{P_m} = \frac{u}{\frac{1}{2}(v_e + 2u)} = \frac{1}{1 + \frac{v_e}{2u}}}$

Le rendement est maximal lorsque v_e est nulle... mais dans cette situation la force de propulsion $\vec{F}$ est nulle ! Il y a donc un compromis à trouver dans le choix de v_e : une vitesse élevée assure une grande force propulsive et donc une bonne capacité d'accélération, mais diminue le rendement.

On voit aussi que le rendement augmente lorsque u augmente. Il y a une limite à l'augmentation de u : avec une force de frottement de l'air modélisée par une loi quadratique, la puissance résistante des frottements P_f sera proportionnelle à u^3 alors que $P_u = \rho S v_e \frac{v_e + 2u}{2}u$ va évoluer comme u^2. L'aéroglisseur atteindra donc une vitesse limite.

Si l'on souhaite augmenter cette vitesse limite, il faut augmenter v_e... mais cela réduit le rendement propulsif. On optera donc pour une augmentation de la section de l'écoulement, qui n'intervient pas dans le rendement et n'a à première vue que des avantages. Les hélices des aéroglisseurs sont effectivement de grand diamètre...

MF46 - Rétrécissement d'une conduite

a) On s'attend qualitativement à une force dirigée vers la droite. La conservation du débit volumique s'écrit $SV = sv$ soit :

$$v = \frac{S}{s}V.$$

b) Il est alors possible d'appliquer le théorème de Bernoulli entre l'entrée et la sortie (fluide incompressible homogène en écoulement parfait stationnaire) :

$$\frac{P_1}{\mu} + \frac{V^2}{2} = \frac{P_2}{\mu} + \frac{v^2}{2}.$$

On déduit :

$$P_2 = P_1 + \mu\left(\frac{V^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right) = P_1 + \frac{\mu}{2}V^2\left(1 - \frac{S^2}{s^2}\right).$$

On constate que la pression aval est plus faible que la pression amont, ce qui est cohérent avec l'augmentation de la vitesse.

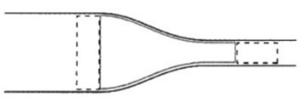
c) Si V augmente suffisamment, la formule précédente indique que la pression P_2 devient négative. En pratique, lorsque P_2 devient inférieure à la pression de vapeur saturante, des bulles de vapeur se forment : c'est ce que l'on nomme la *cavitation*. Alors, la relation de Bernoulli n'est plus valable, et on ne peut pas obtenir de pression négative.

La vitesse limite est telle que $P_2 = 0$, soit :

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{\frac{2P_1}{\mu\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right)}} = 12\,\text{m.s}^{-1}}.$$

Il faut des vitesses assez importantes vu les caractéristiques de l'écoulement concerné ! Toutefois, la cavitation peut poser des problèmes aux hélices, pompes…

d) On considère la surface de contrôle de la figure 28. Afin d'obtenir un système fermé, on ajoute à l'instant t le fluide qui va pénétrer dans la surface de contrôle pendant dt. À l'instant $t + dt$, on ajoute le fluide sorti entre t et $t + dt$. Le système S ainsi constitué est fermé.



À l'instant t, la quantité de mouvement du fluide est :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_c(t) + \mathrm{d}mV\vec{u}_x$$

où $\mathrm{d}m = D_m\mathrm{d}t = \mu SV\mathrm{d}t$ et $\vec{p}_c(t)$ est la quantité de mouvement du fluide contenu dans la surface de contrôle. Similairement,

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_c(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\,v\,\vec{u}_x.$$

Ainsi,

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \frac{\vec{p}_c(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}_c(t)}{\mathrm{d}t} + D_m(v - V)\vec{u}_x = D_m(v - V)$$

vu le régime stationnaire (la quantité de mouvement du fluide dans la surface de contrôle ne varie pas).

La loi de la quantité de mouvement au système S donne :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{g} + \vec{f}_{\text{conduite}\to\text{fluide}} + P_1S\vec{u}_x - P_2s\vec{u}_x$$

où les deux dernières forces sont les forces de pression en amont et en aval. En utilisant le principe des actions réciproques, on obtient :

$$\vec{f}_{\text{fluide}\to\text{conduite}} = (P_1S - P_2s)\vec{u}_x + m\vec{g} + D_m(V - v)\vec{u}_x.$$

Au final, on aboutit à :

$$\vec{f}_{\text{fluide}\to\text{conduite}} = \left(P_1(S - s) + \frac{\mu}{2}V^2s\left(\frac{S^2}{s^2} - 1\right) + \mu SV^2\left(1 - \frac{S}{s}\right)\right)\vec{u}_x + m\vec{g}$$

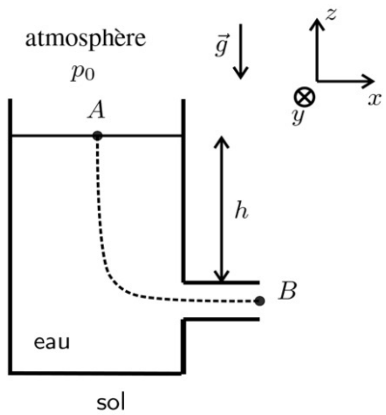
ce que l'on réécrit sous la forme :

$$\boxed{\vec{f}_{\text{fluide}\to\text{conduite}} = m\vec{g} + \left(P_1(S - s) - \frac{\mu}{2}V^2\frac{(S - s)^2}{s}\right)\vec{u}_x}.$$

MF47 – Force subie par un réservoir

1. Théorème de Bernoulli

L'écoulement est incompressible. On a donc conservation du débit volumique : $D_v = v_A S_A = v_B S_B$. Comme $S_B \ll S_A$, alors $v_A \ll v_B$.

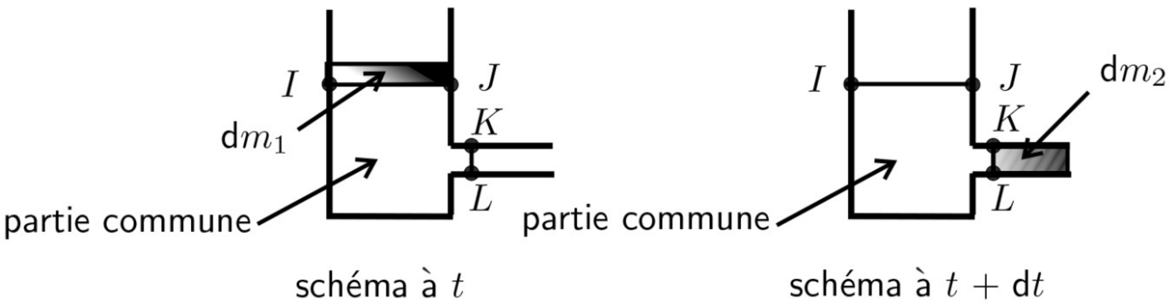


L'écoulement est homogène, parfait, quasistationnaire et incompressible (HPPI). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A \to B$: $\dfrac{p_A}{\mu} + \dfrac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \dfrac{p_B}{\mu} + \dfrac{1}{2}v_B^2 + gz_B$

L'entrée et la sortie sont en contact avec l'air. On a donc $p_A = p_B = p_0$. De plus $z_A - z_B = H$. La vitesse en A est négligeable devant la vitesse en B. On a donc :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

2. Définition du système fermé :



Le fluide compris entre IJ et KL est un système ouvert. On ne peut pas appliquer le théorème de la quantité de mouvement. Il faut se ramener à un système fermé Σ défini de la façon suivante :

- Système fermé Σ à t : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_1 qui rentre pendant dt.
- Système fermé Σ à t +dt : il est défini par la partie commune (PC) appelé volume de contrôle + la masse dm_2 qui sort pendant dt.

Régime permanent d'écoulement :

On est en régime permanent, donc la quantité de mouvement de la partie commune à t est la même qu'à t + dt : $\vec{p}_{\mathrm{PC}}(t) = \vec{p}_{\mathrm{PC}}(t + \mathrm{d}t)$.

On a conservation du débit massique, donc dm_1 = dm_2 = dm.

Bilan de quantité de mouvement :

A t, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t) = \vec{p}_{\mathrm{PC}}(t) + \mathrm{d}m\,\vec{v}_1$$

A t + dt, la quantité de mouvement du système fermé vaut :

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) = \vec{p}_{\mathrm{PC}}(t + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}m\,\vec{v}_2$$

On a donc :

$$\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t) = \mathrm{d}m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

D'où :

$$\frac{\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = D_m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Bilan des actions extérieures :

- Force de pression à l'entrée : $-p_0 S_A \vec{u}_z$.
- Force de pression à la sortie : $-p_0 S_B \vec{u}_x$.
- Poids du système fermé : $m\vec{g}$.
- Force que le réservoir exerce sur l'eau. Cette force est l'opposée de la force $\vec{F}_1$ que l'eau exerce sur le réservoir.

Le théorème de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen s'écrit :

$$\frac{\vec{p}(t + \mathrm{d}t) - \vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = D_m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x + m\vec{g} - \vec{F}_1$$

On néglige la vitesse à l'entrée. On a donc :

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

3. Le système mécanique étudié est le **réservoir**.

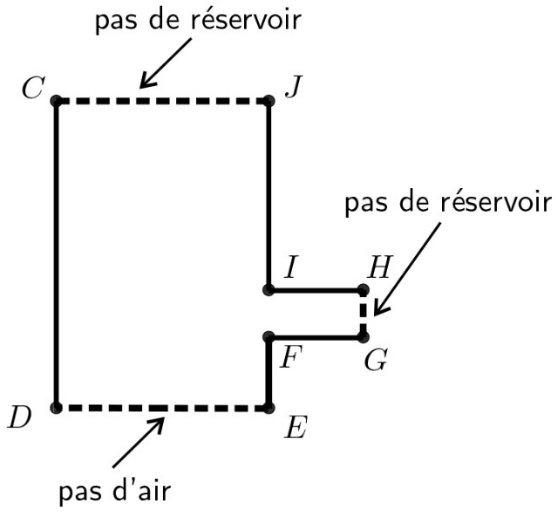
On ne considère pas l'eau à l'intérieur !
On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.
Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Poids du réservoir : $M\vec{g}$.
- Force $\vec{F}_1$ que l'eau exerce sur le réservoir. Cette force a été déterminée dans la question précédente.
- Réaction du support $\vec{R}$ que l'on peut décomposer en une réaction tangentielle $\vec{T}$ et une réaction normale $\vec{N}$.
- Force de pression atmosphérique $\vec{F}_p$

Méthode pour calculer les forces de pression sur le réservoir

On a souvent besoin en mécanique des fluides de calculer la résultante des forces de pression $\vec{F}_p$ qui s'exercent sur une surface qui n'est pas fermée. On utilise souvent la méthode consistant à définir une surface fermée fictive.

On chercher à calculer $\vec{F}_p$ la résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur le réservoir. Ces forces s'exercent sur la surface Σ_1 constitué des parties CD, EF, FG, HI et IJ (traits pleins sur la figure). Elles ne s'appliquent pas sur les parties DE (pas d'air), GH (pas de réservoir) et CJ (pas de réservoir).
On définit la surface Σ_2 constituée des parties DE, GH et CJ (traits en pointillés sur la figure).



On définit ainsi la surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ fictive et entourée d'air. Elle n'a pas de réalité physique mais la résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée fictive $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme. On pourra alors en déduire très facilement $\vec{F}_p$.
La surface $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est une surface fermée.

$$\oiint_{\Sigma_1+\Sigma_2} -p_0\overrightarrow{\mathrm{d}S}_{ext} = -\iiint_V \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p_0 \mathrm{d}\tau = \vec{0}$$

La résultante des forces de pression de l'air sur cette surface fermée $\Sigma_1 + \Sigma_2$ est nulle puisque la pression p_0 est uniforme.
On peut décomposer cette somme en deux termes :

- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_1 : $\vec{F}_p$.
- Résultante des forces de pression de l'air qui s'exercent sur Σ_2 : $p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.

On a donc : $\vec{0} = \vec{F}_p + p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x$.
Soit :

$$\vec{F}_p = p_0 S_B \vec{u}_x$$

Étude de l'équilibre du réservoir

On applique le théorème de la quantité de mouvement au réservoir à l'équilibre :

$$\vec{0} = M\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_p$$

On a vu dans la question précédente que :

$$\vec{F}_1 = m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x$$

On projette $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$. On a donc :

$$\begin{aligned}\vec{0} = {} & M\vec{g} + m\vec{g} - p_0 S_A \vec{u}_z - p_0 S_B \vec{u}_x - D_m v_B \vec{u}_x + T\vec{u}_x \\ & + N\vec{u}_z + p_0 S_B \vec{u}_x\end{aligned}$$

On peut être surpris que le poids de l'eau n'apparaît pas dans l'équation précédente traduisant l'équilibre du réservoir mais il intervient bien dans la force $\vec{F}_1$.

En projection sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$, on a : $\left|\begin{array}{l} -D_m v_B + T = 0 \\ -mg - Mg - p_0 S_A + N = 0. \\ 0 \end{array}\right.$

On en déduit que :

$$\left|\begin{array}{l} T = D_m v_B \\ N = mg + Mg + p_0 S_A \\ 0 \end{array}\right.$$

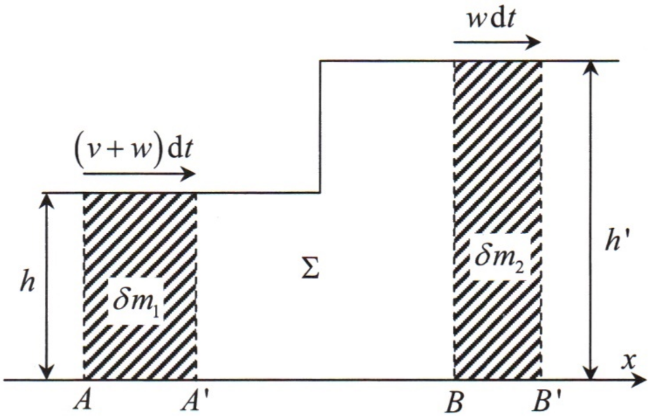
La condition pour que le réservoir ne glisse pas est que :

$$|T| \leqslant f\,|N|$$

Soit :

$$D_m v_B \leqslant f(mg + Mg + p_0 S_A)$$

MF48 – Onde de ressaut



1. Bilan de masse entre t et t+dt :

$$\begin{cases} m^*(t) = m(t) + \delta m_1 \\ m^*(t+dt) = m(t+dt) + \delta m_2 \end{cases}$$

L'écoulement étant stationnaire, on a :

$$m(t) = m(t+dt) \Rightarrow \delta m_1 = \delta m_2$$
$$\Leftrightarrow \rho L h (v+w) dt = \rho L h' w dt$$
$$\Leftrightarrow h(v+w) = h'w$$
$$\Leftrightarrow (h'-h)w = hv$$

2. Bilan de quantité de mouvement sur Σ^* :

$$\begin{cases} \overrightarrow{p^*}(t) = \vec{p}(t) + \delta m_1\,(\vec{v}+\vec{w}) \\ \overrightarrow{p^*}(t+dt) = \vec{p}(t+dt) + \delta m_2\,\vec{w} \end{cases}$$

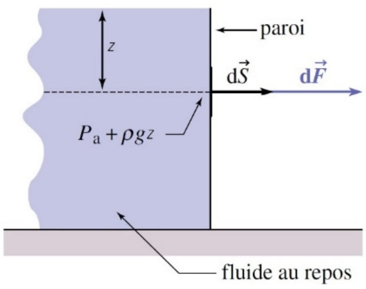
L'écoulement étant stationnaire, on a :

$$\frac{D\overrightarrow{p^*}}{Dt}dt = \delta m_2\,\vec{w} - \delta m_1\,(\vec{v}+\vec{w})$$
$$\Leftrightarrow \frac{D\overrightarrow{p^*}}{Dt} = \frac{\delta m_2}{dt}\left(\vec{w} - (\vec{v}+\vec{w})\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{D\overrightarrow{p^*}}{Dt} = -\rho L h' w\,\vec{v}$$

Donc :

$$\frac{Dp_x^*}{Dt} = -\rho L h' w\, v$$

3.



- Sur la surface S_1, la pression extérieure est : $p_0 + \rho g z$.
- Sur la surface S_2, la pression extérieure est : $p_0 + \rho g z$.
- Sur le front de vague, la pression extérieure est : p_0.

D'où :

$$\begin{cases} \vec{F}_{S1} = \int_0^h (p_0 + \rho g z)\, L dz\, \overrightarrow{u_x} = \left(p_0 L h + \dfrac{\rho g L h^2}{2}\right)\overrightarrow{u_x} \\ \vec{F}_{S2} = \int_0^{h'} (p_0 + \rho g z)\, L dz\, (-\overrightarrow{u_x}) = -\left(p_0 L h' + \dfrac{\rho g L h'^2}{2}\right)\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F_{vague}} = \int_h^{h'} p_0\, L\, dz\, \overrightarrow{u_x} = (p_0 L h' - p_0 L h)\overrightarrow{u_x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\rho g L}{2}(h^2 - h'^2)\overrightarrow{u_x}$$

4. D'où le bilan sur (Ox) où le poids n'intervient pas :

$$\frac{\rho g L}{2}(h^2 - h'^2) = -\rho L h' w\, v$$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{2}(h'^2 - h^2) = h' w\, v$$

5. On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{g}{2}(h'^2 - h^2) = h' w\, v \\ (h' - h) w = h v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{2}(h'^2 - h^2) = h' w^2 \frac{(h' - h)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g}{2}(h' + h) = \frac{h'}{h} w^2$$

$$\Leftrightarrow w = \sqrt{\frac{gh}{2h'}(h' + h)}$$

6.

a) Par un bilan d'énergie mécanique sur Σ^* :

$$\frac{DE_m^*}{Dt} = E_m^*(t + dt) - E_m^*(t) = D_{m2}\left(\frac{w^2}{2} + \frac{gh'}{2}\right) - D_{m1}\left(\frac{(w + v)^2}{2} + \frac{gh}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho L h' w}{2}\left(w^2 - (v + w)^2 + g(h' - h)\right)$$

Or : $h(v + w) = h' w$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho L h' w}{2}\left(w^2 - \left(\frac{h'}{h} w\right)^2 + g(h' - h)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho L h' w}{2}\left(w^2\left(1-\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) + g(h'-h)\right)$$

Or : $w = \sqrt{\frac{gh}{2h'}(h'+h)}$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho L h' w}{2}\left(\frac{gh}{2h'}(h'+h)\left(1-\left(\frac{h'}{h}\right)^2\right) + g(h'-h)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{2}\left(\frac{1}{2h'h}(h'+h)(h^2-h'^2) + (h'-h)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{2}(h-h')\left(\frac{1}{2h'h}(h'+h)^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{4hh'}(h-h')((h'+h)^2 - 2h'h)$$

$$\Rightarrow \frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{2}(h-h')\ \frac{(h'^2+h^2)}{2hh'}$$

b) Or : $P_p = \overrightarrow{F_{s1}}.(\vec{v}+\vec{w}) + \overrightarrow{F_{S2}}.\vec{w} + \overrightarrow{F_{vague}}.\vec{0}$

$$\Leftrightarrow P_p = \left(p_0 L h + \frac{\rho g L h^2}{2}\right)(v+w) - w\left(p_0 L h' + \frac{\rho g L h'^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow P_p = \frac{\rho g L h^2}{2}(v+w) - \frac{\rho g L h'^2}{2} w$$

Or : $h(v+w) = h'w$

$$\Leftrightarrow P_p = \frac{\rho g L h' w}{2}(h-h')$$

c) Or : $\frac{DE_m^*}{Dt} = P_{int} + P_p$

$$\Rightarrow P_{int} = -\frac{\rho g L h' w}{2}(h-h') + \frac{\rho g L h' w}{2}(h-h')\ \frac{(h'^2+h^2)}{2hh'}$$

$$\Rightarrow P_{int} = \frac{\rho g L h' w}{2}(h-h')\left(-1 + \frac{h'^2+h^2}{2hh'}\right)$$

$$\Rightarrow P_{int} = \rho g L h' w.\frac{(h-h')}{4hh'}(h'^2+h^2-2hh')$$

$$\Rightarrow P_{int} = \rho g L h' w.\frac{(h-h')^3}{4hh'} < 0$$

d) Dans le cas du mascaret : $w = 9{,}5\ ms^{-1}\ et\ P_{int} = -1{,}9\ MW$

MF49 - Division et déflexion de jets d'eau

1°)

a) Sur une ligne de courant A_1A_2 : $P_0 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 + \mu g z = P_0 + \frac{1}{2}\mu v_2^2 + \mu g z$

Sur une ligne de courant AA_1 : $\frac{1}{2}\mu v^2 + \mu g z_A = \frac{1}{2}\mu v_1^2 + \mu g z_{A_1}$

Si on néglige le terme de pesanteur, on a alors : $v = v_1 = v_2$

b) Considérons le système ouvert S constitué par la plaque et le fluide. Effectuons un bilan de quantité de mouvement sur le système fermé S* :

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{m2}\overrightarrow{v_2} + D_{m1}\overrightarrow{v_1} - D_m\vec{v} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{D\vec{p}}{Dt} = -Q\vec{v} + Q_2\overrightarrow{v_2} + Q_1\overrightarrow{v_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_0} + \overrightarrow{F_{pression}} = -Q\vec{v} + Q_2\overrightarrow{v_2} + Q_1\overrightarrow{v_1}$$

La pression étant égale à la pression atmosphérique en tout point de la frontière de S, la résultante des forces de pressions est nulle.

Donc sur Ox : $-Qv\sin\alpha + Q_1v_1 - Q_2v_2 = 0 \Rightarrow Q\sin\alpha + Q_2 - Q_1 = 0$

Bilan de masse : $Q = Q_1 + Q_2$

Donc : $Q\sin\alpha + (Q - Q_1) - Q_1 = 0 \Leftrightarrow Q(\sin\alpha + 1) = 2Q_1$

$$\Leftrightarrow Q_1 = \frac{Q(\sin\alpha + 1)}{2} \quad et\ donc : \ Q_2 = \frac{Q(-\sin\alpha + 1)}{2}$$

Or : $\frac{Q_1}{Q_2} = 3 \Rightarrow \frac{\sin\alpha + 1}{-\sin\alpha + 1} = 3 \Rightarrow \sin\alpha + 1 = 3 - 3\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

Et : $Q = Sv = 60Ls^{-1} \Rightarrow Q_1 = 45Ls^{-1}\ et\ Q_2 = 15Ls^{-1}$

c) Sur Oz : $Qv\cos\alpha = \frac{F_0}{\mu} = -\frac{F_1}{\mu}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_1} = -\overrightarrow{F_0} = -\mu S v^2 \cos\alpha \ \overrightarrow{u_z} \text{ où } F_1 = 1560N$$

2°) Déflexion du jet par une plaque courbe fixe

- Bilan de quantité de mouvement : $\frac{D\vec{p}}{Dt} = D_{ms}\overrightarrow{v'} - Dm_e\vec{v}$

Or la pression est uniforme d'où : $\frac{\overrightarrow{F_2}}{\mu} = Q\overrightarrow{v'} - Q\vec{v}$

Sur Ox : $F_{2x} = \mu S v'^2 cos\alpha - \mu S v^2 = \mu S v^2(-1 + cos\alpha)$

Sur Oz : $F_{2z} = \mu S v'^2 sin\alpha = \mu S v^2 sin\alpha$

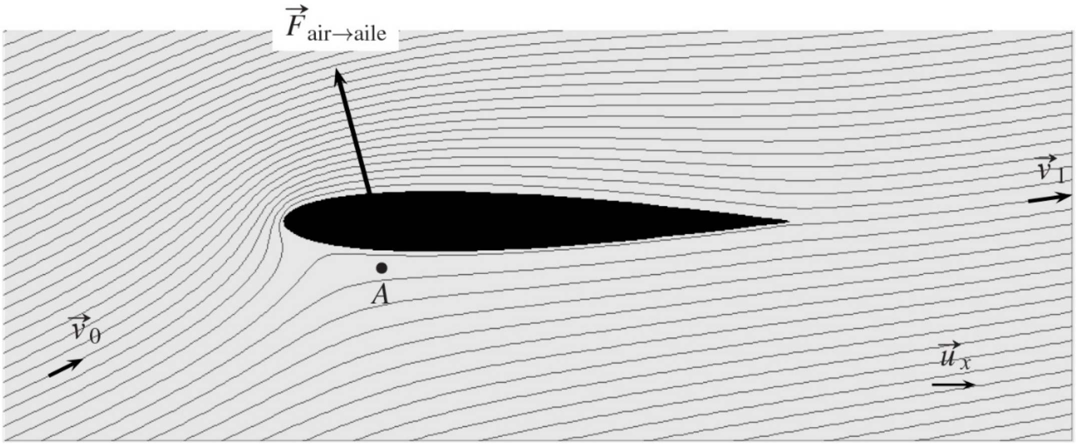
Donc :

$$F_2 = \sqrt{\mu S v^2(2 - 2cos\alpha)}\ et\ tan\theta_2 = \frac{\sin\alpha}{-1 + cos\alpha} \text{ où } \theta_2\ est\ l'angle\ entre\ Ox\ et\ \overrightarrow{F_2}$$

$$\Rightarrow F_2 = 3118\ N\ et\ \theta_2 = -30°$$

MF410 - Écoulement autour d'une aile d'avion

1. On raisonne dans le référentiel $\mathscr{R}$ lié à l'aile d'avion, où l'écoulement de l'air est stationnaire. On définit un système fermé en considérant, d'une part, le fluide contenu, à l'instant t, dans un tube de courant qui contient l'aile d'avion, et, d'autre part, le fluide qui va entrer dans ce tube de courant pendant la durée $\mathrm{d}t$. Le tube de courant s'appuie sur deux lignes de courant qui sont suffisamment éloignées de l'aile pour qu'on puisse considérer que la pression à la surface du tube de courant est partout égale à P_0.



Le fluide considéré est soumis aux actions mécaniques suivantes :
- la résultante des forces de pression extérieure, qui est nulle, car la pression est uniforme sur toute la surface du système considéré ;
- la force $\vec{F}_{\text{aile}\to\text{air}}$ que l'aile d'avion exerce sur l'air.

La quantité de mouvement du système considéré est :
- à l'instant t, égale à la somme de la quantité de mouvement contenue dans la zone commune $\vec{P}_{\text{com}}(t)$ et de la quantité de mouvement du fluide dans la zone d'entrée $D_m \mathrm{d}t\,\vec{v}_0$, où D_m représente le débit massique.
- à l'instant $t+\mathrm{d}t$, égale à la somme de la quantité de mouvement contenue dans la zone commune $\vec{P}_{\text{com}}(t+\mathrm{d}t)$ et de la quantité de mouvement du fluide dans la zone de sortie $D_m \mathrm{d}t\,\vec{v}_1$.

La variation de la quantité de mouvement du système est :

$$\begin{aligned}\vec{P}(t+\mathrm{d}t)-\vec{P}(t) &= \left(\vec{P}_{\text{com}}(t+\mathrm{d}t)+D_m\mathrm{d}t\,\vec{v}_1\right)-\left(\vec{P}_{\text{com}}(t)+D_m\mathrm{d}t\,\vec{v}_0\right),\\ &= D_m\mathrm{d}t\left(\vec{v}_1-\vec{v}_0\right),\end{aligned}$$

puisque $\vec{P}_{\text{com}}(t+\mathrm{d}t)=\vec{P}_{\text{com}}(t)$ car l'écoulement est stationnaire. La deuxième loi de Newton appliquée au fluide considéré s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=D_m\left(\vec{v}_1-\vec{v}_0\right)=\vec{F}_{\text{aile}\to\text{air}}\,.$$

On en déduit, grâce à la loi des actions réciproques (troisième loi de Newton) :

$$\vec{F}_{\text{air}\to\text{aile}}=D_m\left(\vec{v}_0-\vec{v}_1\right).$$

Sur la figure ci-dessus, on a représenté un vecteur, représentant $\vec{F}_{\text{air}\to\text{aile}}$, et orienté selon $\vec{v}_0-\vec{v}_1$. La composante de cette force dans la direction de $\vec{v}_0$ correspond à la force de traînée alors que la composante orthogonale à $\vec{v}_0$ correspond à la force de portance (on rappelle que dans le référentiel où l'air devant l'aile est immobile, l'avion se déplace à la vitesse $-\vec{v}_0$).

2. Dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$, loin devant l'avion, pour $x \to -\infty$, l'air est supposé immobile. Dans ce référentiel, l'avion se déplace à une vitesse $\vec{V}_0 = -v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 = 100\ \text{m.s}^{-1}$. On écrit la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_{\text{air}/\mathscr{R}}(x \to -\infty) = \vec{v}_{\text{air}/\mathscr{R}_T}(x \to -\infty) + \vec{v}_{\mathscr{R}_T/\mathscr{R}} = \vec{0} - \vec{V}_0 = v_0 \vec{u}_x\,.$$

En supposant que la vitesse d'écoulement de l'air est suffisamment faible devant la vitesse de propagation des ondes sonores, on peut supposer que l'écoulement est incompressible. On écrit alors la conservation du débit volumique dans le tube de courant où se situe le point A : $v_0 S_0 = v_A S_A$, d'où : $v_A = v_0 \dfrac{S_0}{S_A}$. Sur la figure, on peut estimer que $\dfrac{S_0}{S_1} = 0,7$, d'où $v_A = 70\ \text{m.s}^{-1}$. La loi de composition des vitesses donne, en supposant que les lignes de courant sont horizontales en A :

$$\vec{v}_{\text{air}/\mathscr{R}_T}(A) = \vec{v}_{\text{air}/\mathscr{R}}(A) + \vec{v}_{\mathscr{R}/\mathscr{R}_T} = v_A \vec{u}_x + \vec{V}_0 = (v_A - v_0)\,\vec{u}_x\,.$$

D'où $v_{\text{air}/\mathscr{R}_T}(A) = -30\ \text{m.s}^{-1}$.

Le même type de raisonnement donne : $v_B = v_0 \dfrac{S_0}{S_B} = 1,7 v_0 = 170\ \text{m.s}^{-1}$. En utilisant la loi de composition des vitesses (la vitesse d'écoulement en B est orientée selon $\vec{u}_x$) :

$$\vec{v}_{\text{air}/R_T}(B) = (v_B - v_0)\,\vec{u}_x\,.$$

D'où $v_{\text{air}/\mathscr{R}_T}(B) = 70\ \text{m.s}^{-1}$.

3. On applique le théorème de Bernoulli, dans le référentiel $\mathscr{R}$ où l'écoulement est stationnaire, sur une ligne de courant allant de $-\infty$ à A. On suppose toujours que l'écoulement est incompressible. On obtient :

$$\frac{P_0}{\mu} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{P_A}{\mu} + \frac{v_A^2}{2}\,.$$

On en déduit : $P_A - P_0 = \dfrac{1}{2}\mu\left(v_0^2 - v_A^2\right) = 3,3 \times 10^3$ Pa. De même : $P_B - P_0 = \dfrac{1}{2}\mu\left(v_0^2 - v_B^2\right) = -1,2 \times 10^4$ Pa. On constate que la pression est plus importante sous l'aile que dessus, ce qui contribue à l'effet de portance.