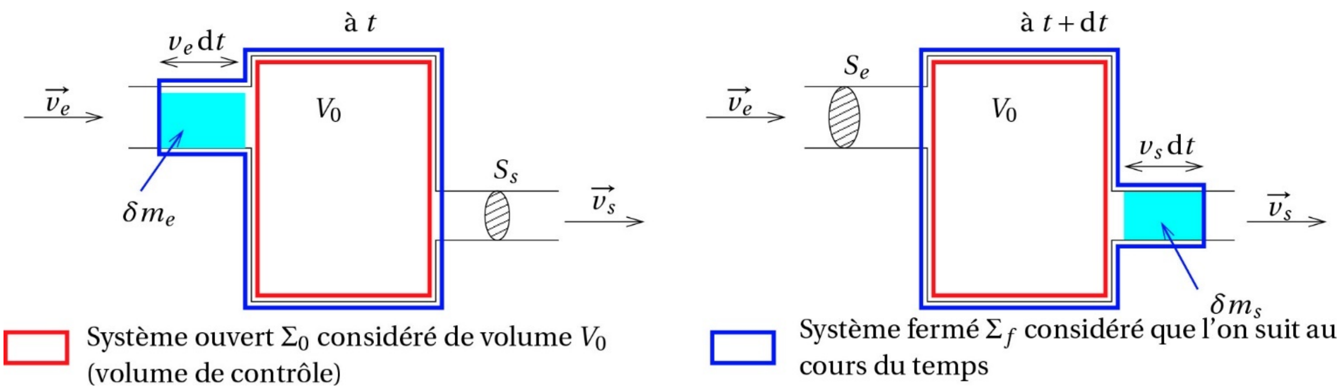
MF4 – Bilans macroscopiques

4.3.4 - Bilans macroscopiques		
Bilans de masse.	Établir un bilan de masse en raisonnant sur un système ouvert et fixe ou sur un système fermé et mobile.	Partie qui pose souvent des problèmes aux candidats car ils ne font pas de schémas explicites ou ne posent pas bien les bilans
Bilans de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel à une entrée et une sortie.	Associer un système fermé à un système ouvert pour faire un bilan. Utiliser le théorème de la quantité de mouvement et le théorème de l'énergie cinétique pour réaliser un bilan. Exploiter la nullité (admise) de la puissance des forces intérieures dans un écoulement parfait et incompressible.	

I – Bilan de masse

I-1) Système fermé mobile



Il serait naturel de considérer le système matériel Σ_0 constitué du fluide contenu à l'instant t dans l'enceinte, mais ce système est un système ouvert. Il est plus fructueux ici de considérer le système fermé constitué du fluide contenu à l'instant t dans l'enceinte et de la masse δm_e qui y entre, entre t et t +dt. Ce système se compose à l'instant t +dt du fluide contenu dans l'enceinte et de la masse δm_s qui en est sortie entre t et t +dt.

$$\begin{cases} m_{\Sigma_f}(t) = m_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e \\ m_{\Sigma_f}(t+dt) = m_{\Sigma_o}(t+dt) + \delta m_s \end{cases}$$

Or le système étant fermé :

$$m_{\Sigma_f}(t) = m_{\Sigma_f}(t+dt)$$

$$\Leftrightarrow m_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e = m_{\Sigma_o}(t+dt) + \delta m_s$$

D'où le bilan de masse :

$$\begin{cases} dm_{\Sigma_o} = \delta m_e - \delta m_s \\ ou\ \dfrac{dm_{\Sigma_o}}{dt} + D_{ms} - D_{me} = 0 \end{cases}$$

I-2) Système ouvert fixe

Intéressons-nous au système ouvert qui présente une entrée et une sortie ainsi on peut écrire :

$$\begin{cases} \text{À } t : \ m_{\Sigma_o}(t) = m_{\Sigma_o}(t) \\ \text{À } t+dt : \ m_{\Sigma_o}(t+dt) = \underbrace{m_{\Sigma_o}(t)}_{ce\ que\ j'avais} + \underbrace{\delta m_e}_{ce\ qui\ est\ rentré} - \underbrace{\delta m_s}_{ce\ qui\ est\ sorti} \end{cases}$$

Donc :

$$m_{\Sigma_o}(t+dt) - m_{\Sigma_o}(t) = \delta m_e - \delta m_s$$
$$\Leftrightarrow dm_{\Sigma_o} = \delta m_e - \delta m_s$$

Bien entendu on retrouve le même résultat.

I-3) Équation de conservation de la masse.

Le système ouvert échange par ses canalisations d'entrée et de sortie les masses suivantes :

$$\begin{cases} \delta m_e = \iint_{entrée} \overrightarrow{J_{me}}.\overrightarrow{dS} = \iint_{entrée} \mu \overrightarrow{v_e}.\overrightarrow{dS} \\ \delta m_s = \iint_{sortie} \overrightarrow{J_{ms}}.\overrightarrow{dS} = \iint_{sortie} \mu \overrightarrow{v_S}.\overrightarrow{dS} \end{cases}$$

Et :

$$dm_{\Sigma_o} = m_{\Sigma_o}(t+dt) - m_{\Sigma_o}(t)$$
$$= \iiint_{V_0} \mu(M, t+dt)\, d\tau - \iiint_{V_0} \mu(M,t) d\tau$$
$$\Rightarrow \iiint_{V_0} \frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} dt d\tau = \iint_{entrée} \mu \overrightarrow{v_e}.\overrightarrow{dS}\, dt - \iint_{sortie} \mu \overrightarrow{v_S}.\overrightarrow{dS} dt$$

$$\Leftrightarrow \iiint_{V_o} \frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} dt d\tau = -\oiint_{S_0} \mu \vec{v}.\overrightarrow{dS_{sortant}}$$

$$\overset{G.O}{\widetilde{\Leftrightarrow}} \iiint_{V_o} \left(\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + div(\mu\vec{v})\right) d\tau = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + div(\mu\,\vec{v}) = 0$$

II – Bilan de quantité de mouvement

II-1) Principe de la méthode

Soit Σ_f un système fermé, étudié dans le référentiel R. À l'instant t, sa quantité de mouvement dans R est $\vec{p}(t)$, somme des quantités de mouvement de toutes les particules de fluide et des solides éventuels qui le composent. À l'instant t+dt, sa quantité de mouvement est $\vec{p}(t+dt)$. Ce système est soumis à un certain nombre de forces intérieures et extérieures.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à S dans le référentiel R s'écrit :

$$\lim_{dt\to 0}\left(\frac{\vec{p}_{\Sigma_f}(t+dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t)}{dt}\right) = \sum \vec{F}_{ext}$$

ou encore, de manière plus directement exploitable :

$$\frac{\vec{p}_{\Sigma_f}(t+dt) - \vec{p}_{\Sigma_f}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad au\ premier\ ordre\ en\ dt$$

Or : $\begin{cases} \vec{p}_{\Sigma_f}(t) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e \overrightarrow{v_e} \\ \vec{p}_{\Sigma_f}(t+dt) = \vec{p}_{\Sigma_o}(t+dt) + \delta m_s \overrightarrow{v_s} \end{cases}$

Donc :

$$\frac{\vec{p}_{\Sigma_o}(t+dt) + \delta m_s \overrightarrow{v_s} - \left(\vec{p}_{\Sigma_o}(t) + \delta m_e \overrightarrow{v_e}\right)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{\overrightarrow{dp_{\Sigma_o}}}{dt} + D_{ms}\overrightarrow{v_s} - D_{me}\overrightarrow{v_e} = \sum \vec{F}_{ext}$$

On retrouve un résultat général.

Bilan de quantité de mouvement sur un système ouvert :

$$\frac{\overrightarrow{dp_{\Sigma_f}}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dp_{\Sigma_o}}}{dt} + D_{ms}\overrightarrow{v_s} - D_{me}\overrightarrow{v_e} = \sum \vec{F}_{ext\to\Sigma_f}$$

Et en régime stationnaire :

$$D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}) = \sum \vec{F}_{ext\to\Sigma_f}$$

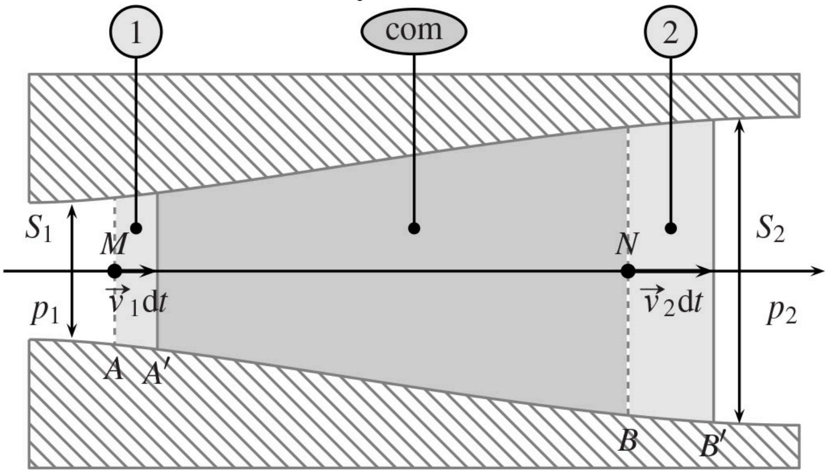
II-2) Conduite de section variable

Considérons un fluide en écoulement :

- Parfait
- Incompressible
- Permanent
- Unidimensionnel : $\vec{v} = v(x,t)\overrightarrow{u_x}$

Grâce à un bilan de quantité de mouvement sur un système soigneusement défini, nous allons calculer la force horizontale $\overrightarrow{F_{op}}$ que l'on doit exercer sur le tuyau pour le maintenir immobile.

Le tuyau étant immobile, la force recherchée est l'opposée de celle que le fluide exerce sur le tuyau.



Le système étudié est le fluide compris entre les sections A et B à l'instant t. À l'instant t +dt, ce système est compris entre les sections A' et B'. La zone notée « com » est le système ouvert aussi appelée zone commune.

Bilan de quantité de mouvement :

$$\begin{cases} \vec{p}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + \overrightarrow{p_1}(t) \\ \vec{p}(t+dt) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t+dt) + \overrightarrow{p_2}(t+dt) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{p}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + \delta m_1 \overrightarrow{v_1}(t) \\ \vec{p}(t+dt) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t+dt) + \delta m_2 \overrightarrow{v_2}(t) \end{cases}$$

$$Ecoulement\ permanent : \begin{cases} \vec{p}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + D_m dt\, \overrightarrow{v_1}(t) \\ \vec{p}(t+dt) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + D_m dt\, \overrightarrow{v_2}(t) \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(v_2 - v_1)\overrightarrow{u_x} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Or :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{F_{p_1}} + \overrightarrow{F_{p_2}} + \vec{F}_{paroi\to fluide} + \vec{P}$$

En projection sur (Ox) :

$$D_m(v_2 - v_1) = p_1 S_1 - p_2 S_2 + F_{paroi\to fluide}$$
$$\Leftrightarrow F_{paroi\to fluide} = D_m(v_2 - v_1) - p_1 S_1 + p_2 S_2$$

$$Or : \begin{cases} v_2 = \dfrac{D_m}{\mu S_2} \\ v_1 = \dfrac{D_m}{\mu S_1} \\ \dfrac{p_2}{\mu} + \dfrac{v_2^2}{2} = \dfrac{p_1}{\mu} + \dfrac{v_1^2}{2} \Rightarrow p_2 = p_1 + \dfrac{\mu}{2}(v_1^2 - v_2^2) \end{cases}$$

D'où :

$$F_{paroi\to fluide} = \frac{D_m^2}{\mu}\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right) - p_1 S_1 + \left(p_1 + \frac{\mu}{2}(v_1^2 - v_2^2)\right) S_2$$

$$= \frac{D_m^2}{\mu}\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}\right) + p_1(S_2 - S_1) + \frac{\mu}{2}\left(\left(\frac{D_m}{\mu S_1}\right)^2 - \left(\frac{D_m}{\mu S_2}\right)^2\right)S_2$$

$$= \frac{D_m^2}{\mu}\left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{S_2}{S_1^2} - \frac{1}{S_2}\right)\right) + p_1(S_2 - S_1)$$

$$= \frac{D_m^2}{\mu}\left(\frac{1}{2S_2} - \frac{1}{S_1} + \frac{1}{2}\frac{S_2}{S_1^2}\right) + p_1(S_2 - S_1)$$

$$\Rightarrow F_{paroi\to fluide} = \frac{D_m^2}{\mu S_1}\left(\frac{S_1}{2S_2} - 1 + \frac{1}{2}\frac{S_2}{S_1}\right) + p_1 S_1\left(\frac{S_2}{S_1} - 1\right)$$

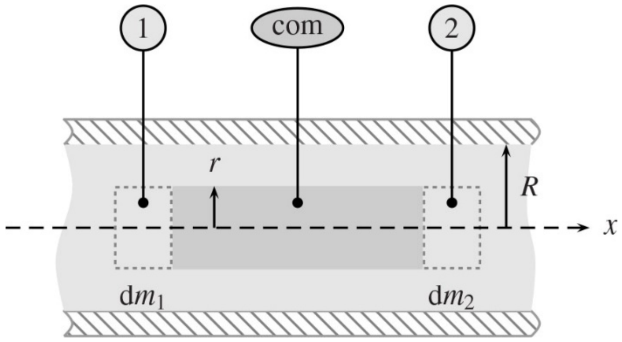
A.N :

$$\begin{cases} p_1 = 1bar \\ D_m = 1kg\ s^{-1} \\ S_1 = 2S_2 = 10cm^2 \Rightarrow \dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow F = -49{,}7N \\ \mu = 1000kg\ m^{-3} \end{cases}$$

Donc :

$$\vec{F}_{fluide\to paroi} = |F|\,\overrightarrow{u_x}$$

II-3) Ecoulement de Poiseuille



Bilan de quantité de mouvement, en écoulement permanent et incompressible, appliquée au cylindre de rayon r et de longueur L :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(v_2 - v_1)\overrightarrow{u_x} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Avec :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p2}} + \overrightarrow{F_{visc}} + \vec{P}$$

$$\text{où} \begin{cases} \overrightarrow{F_{p1}} = p_e \pi r^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F_{p2}} = -p_s \pi r^2 \overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F_{visc}} = +\eta \dfrac{\partial v}{\partial r} S_{lat} \overrightarrow{u_x}\ (Les\ veines\ rapides\ sont\ au\ centre) \end{cases}$$

Donc : $D_m(v_2 - v_1) = (p_e - p_s)\pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r}(2\pi r L)$

Or : $v = v(r)$ donc $v_2 = v_1$ et :

$$(p_e - p_s)\pi r^2 + \eta \frac{\partial v}{\partial r}(2\pi r L) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{p_s - p_e}{2\eta L} r$$

$$\Rightarrow v(r) = \frac{p_s - p_e}{4\eta L} r^2 + B$$

$$Or\ v(R) = 0 \Rightarrow v(r) = \frac{p_s - p_e}{4\eta L}(r^2 - R^2)$$

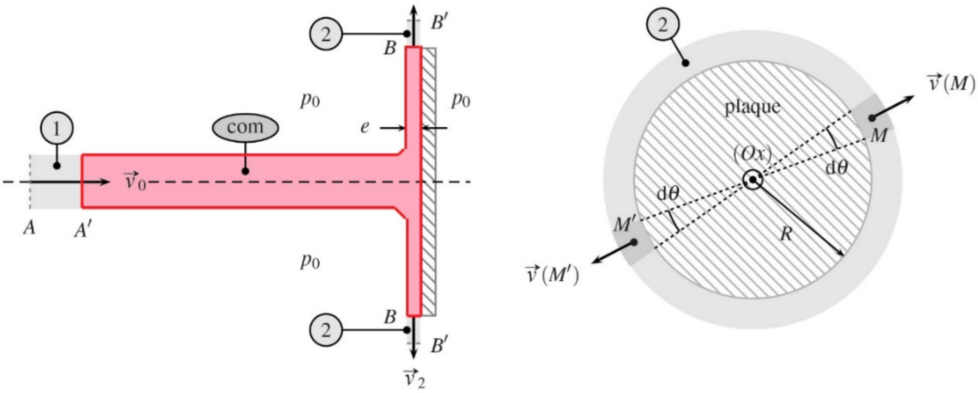
On retrouve le même résultat que lors de la résolution de NS.

II-4) Action d'un jet cylindrique sur une plaque

a) Surface de contrôle qui n'englobe pas la plaque

Un jet d'eau cylindrique, de section s est envoyé sur une plaque en forme de disque de rayon R. L'eau est émise avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. La pression atmosphérique p_o est uniforme à l'extérieur du jet. L'eau est un fluide incompressible de masse volumique μ. On suppose le régime permanent et on néglige la pesanteur.

On recherche la force d'un opérateur maintenant la plaque immobile.



Le système étudié est le fluide compris entre les sections A et B à l'instant t. À l'instant t+dt, ce système est compris entre les sections A' et B'.

Les sections B et B' sont des petites couronnes cylindriques, donc le volume a la forme d'un anneau entourant la plaque.

Bilan de quantité de mouvement

À l'instant t : $\vec{p}(t) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t) + \overrightarrow{p_1}$

À l'instant t + dt : $\vec{p}(t+dt) = \overrightarrow{p_{\Sigma_0}}(t+dt) + \overrightarrow{p_2}$

Le régime est permanent donc : $(\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}) = \overrightarrow{F_{ext}}dt$

Avec : $\begin{cases} \overrightarrow{p_1} = \delta m_1 \overrightarrow{v_0} \\ \overrightarrow{p_2} = \vec{0} \end{cases}$

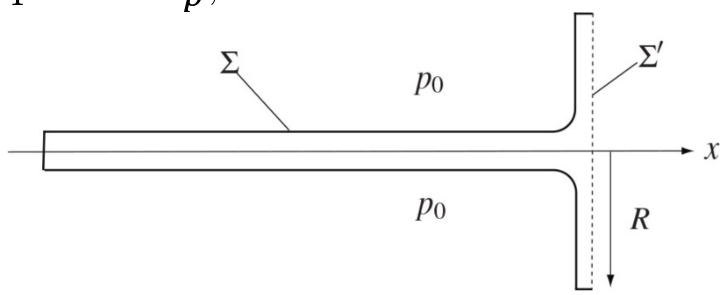
En effet la symétrie cylindrique du problème, entraîne que les contributions élémentaires prises deux à deux s'annulent d'où :

$$\overrightarrow{dp_{2,M}} = -\overrightarrow{dp_{2,M'}} \Rightarrow \overrightarrow{p_2} = \iint_{S_2} \overrightarrow{dp_{2,M}} = \vec{0}$$

En conclusion :

$$-\delta m_1 \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{F_{ext}}dt \Rightarrow \overrightarrow{F_{ext}} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{plaque \to fluide} + \overrightarrow{F_p} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{plaque \to fluide} - \iint_{\Sigma} p_0 \, \overrightarrow{dS} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}$$

Le calcul direct de la résultante de forces de pression est impossible puisque nous ne connaissons pas la forme exacte de la surface Σ . Pour exprimer $\overrightarrow{F_p}$, utilisons un artifice de calcul.



Soit Σ' la surface plane représentée ci-dessus. La surface Σ U Σ' est une surface fermée, et la pression est uniforme donc :

$$-\oiint_{\Sigma U \Sigma\prime} p_0 \overrightarrow{dS} = \vec{0}\; car\; p_0\; uniforme$$

Or :

$$\oiint_{\Sigma U \Sigma\prime} p_0 \overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma} p_0 \overrightarrow{dS} + \iint_{\Sigma\prime} p_0 \overrightarrow{dS} = \iint_{\Sigma} p_0 \overrightarrow{dS} + p_0 \pi R^2\, \overrightarrow{u_x}$$

donc :

$$\overrightarrow{F_p} = -\iint_{\Sigma} p_0 \overrightarrow{dS} = p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x}$$

D'où :

$$\Rightarrow \vec{F}_{plaque \to fluide} + p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}$$
$$\Rightarrow \vec{F}_{plaque \to fluide} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0} - p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x}$$

Il reste maintenant à calculer la force que doit exercer l'opérateur pour maintenir la plaque immobile. Pour cela, appliquons le théorème de la résultante cinétique à la **plaque**. Celle-ci est soumise :

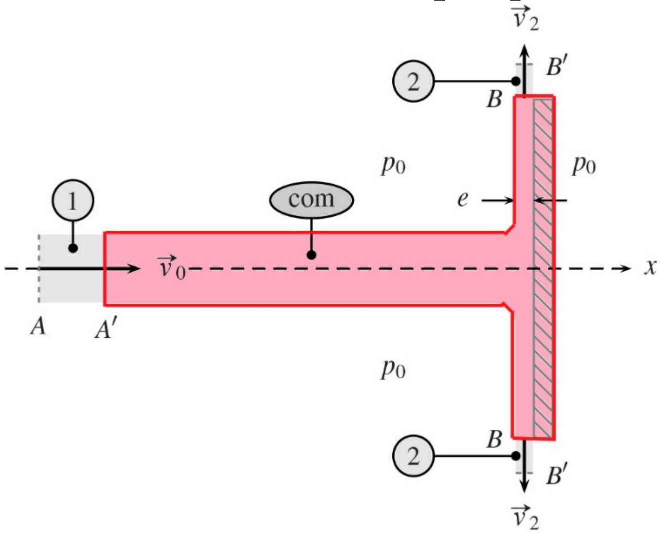
- A l'action de l'opérateur $\vec{F}_{op}$,
- A l'action du fluide : $\vec{F}_{fluide \to \text{plaque}}$
- Aux efforts de la pression ambiante sur la face en contact avec l'air, de résultante : $\vec{F}_{air \to \text{plaque}} = -p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x}$

L'équilibre de la plaque se traduit par :

$$\vec{F}_{op} - p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x} + \mu s v_0 \overrightarrow{v_0} + p_0 \pi R^2 \overrightarrow{u_x} = \vec{0}$$

$$\boxed{\Rightarrow \vec{F}_{op} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}}$$

b) La surface de contrôle inclut la plaque



Nous allons choisir comme système : le système précédent et la plaque. Le bilan de quantité de mouvement ne change pas puisque la plaque est immobile. Le bilan des actions mécaniques devient :

- Action de l'opérateur $\vec{F}_{op}$ sur la plaque,
- Efforts de pression $\overrightarrow{F_p} = \vec{0}$ de résultante nulle puisque la surface du système est fermée et que la pression ambiante est uniforme sur cette surface.

Le théorème de la résultante cinétique appliqué à ce nouveau système s'écrit simplement :

$$-\mu s v_0 \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{F_{ext}} \Rightarrow -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{F_{op}}$$

On retrouve le résultat précédent :

$$\overrightarrow{F_{op}} = -\mu s v_0 \overrightarrow{v_0}$$

Cette méthode est beaucoup plus simple car :

- **L'action du fluide sur la plaque devient une action intérieure donc n'apparaît pas dans l'écriture du théorème de la résultante cinétique.**
- La résultante des efforts de pression est nulle puisque la surface du système est fermée et que la pression ambiante y est uniforme.

Chaque fois que cela sera possible il faudra donc inclure les obstacles dans le système étudié.

III – Bilans d'énergie cinétique

III-1) Principe

On reprend le système fermé précédent, étudié dans le référentiel R. À l'instant t, son énergie cinétique dans R est $E_c(t)$, somme des énergies cinétiques de toutes les particules de fluide et des solides éventuels qui le composent. À l'instant t+dt, son énergie cinétique est $E_c(t+dt)$.

$$\begin{cases} E_c(t) = E_{c\,\Sigma_0}(t) + \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2 \\ E_c(t+dt) = E_{c\,\Sigma_0}(t+dt) + \frac{1}{2}\delta m_s v_s^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{dE_{c\,\Sigma_0}}{dt} + \frac{1}{2}D_{ms}v_s^2 - \frac{1}{2}D_{me}v_e^2 = P_{int} + P_{ext}$$

Bilan d'énergie cinétique :

$$\begin{cases} \frac{dE_{c\,\Sigma_0}}{dt} + D_{ms}\frac{v_s^2}{2} - D_{me}\frac{v_e^2}{2} = P_{int\to\Sigma_f} + P_{ext\to\Sigma_f} \\ Régime\ permanent : \frac{D_m}{2}(v_s^2 - v_e^2) = P_{int\to\Sigma_f} + P_{ext\to\Sigma_f} \end{cases}$$

III-2) Écoulement parfait et incompressible

On admettra que pour un écoulement incompressible et parfait :

$$P_{int\to\Sigma_f} = 0$$

Ainsi :

$$\frac{D_m}{2}(v_s^2 - v_e^2) = P_{poids} + P_{pression} + P_{utile}$$

Intéressons-nous à P_{poids} :

$$P_{poids} = \frac{\delta W}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$$

$$Or \begin{cases} E_p(t) = E_{p_{\Sigma_0}}(t) + \delta m_e g z_e \\ E_p(t+dt) = E_{p_{\Sigma_0}}(t+dt) + \delta m_s g z_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dt} dt = \delta m_s g z_s - \delta m_e g z_e$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dt} = D_{ms} g z_s - D_{me} g z_e$$

Donc :

$$D_m\left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) - D_m\left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e\right) = P_{pression} + P_{autre}$$

Bilan d'énergie mécanique en régime stationnaire pour un écoulement parfait et incompressible :

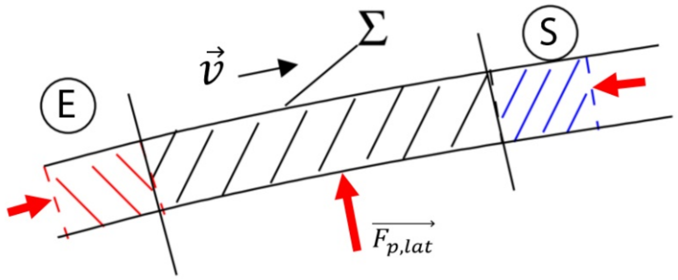
$$D_m\left[\underbrace{\left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s\right)}_{e_{ms}} - \underbrace{\left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e\right)}_{e_{me}}\right] = P_{pression} + P_{autre}$$

III-3) Equation de Bernoulli

Intéressons-nous, à un écoulement stationnaire, incompressible, parfait on a le bilan d'énergie mécanique :

$$D_m\left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) - D_m\left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e\right) = P_{pression} + P_{autre}$$

Appliquons un bilan d'énergie à un tube de courant :



Ainsi $P_{press} = P_e + P_s + P_{lat}$ mais $\overrightarrow{F_{p,lat}} \perp \vec{v}$ d'où $P_{lat} = 0$

$$\Rightarrow D_m\left(\frac{v_s^2}{2} + g z_s\right) - D_m\left(\frac{v_e^2}{2} + g z_e\right) = D_m(-p_s v_s + p_e v_e) + P_{autre}$$

Pour un fluide homogène : $\mu = \frac{1}{v_s} = \frac{1}{v_e}$

$$\Rightarrow D_m \Delta\left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = P_{autre}$$

Pour un écoulement stationnaire, parfait, incompressible d'un fluide homogène, le long d'une ligne de courant, le bilan d'énergie cinétique nous permet de retrouver l'équation de Bernoulli si <u>(Oz) ascendant</u> :

$$D_m \Delta\left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = P_{autre}$$

Si $P_{utile} = 0$:

$$\frac{v_s^2}{2} + gz_s + \frac{p_s}{u} = \frac{v_e^2}{2} + gz_e + \frac{p_e}{\mu}$$

III-4) Lien avec le premier principe de la thermodynamique

On a pu voir que le premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement s'écrivait :

$$D_m \Delta\left(h + \frac{v^2}{2} + gz\right) = P_{th} + P_{autre}$$

Or d'après la première identité thermodynamique :

$$dh = Tds + vdP = Tds + \frac{dP}{\mu}$$

Si on se place dans le cas d'un écoulement isentropique alors :

$$\begin{cases} P_{th} = 0 \\ ds = 0 \end{cases}$$

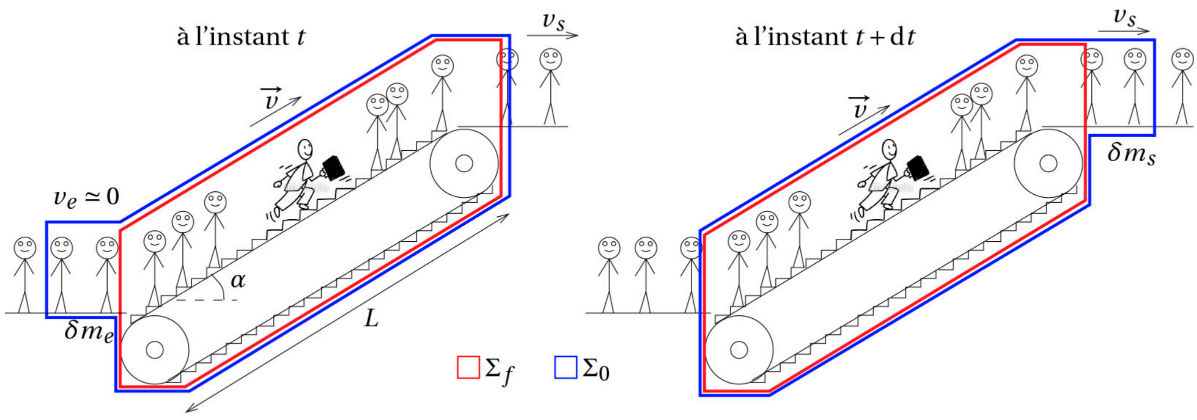
On obtient alors :

$$D_m \Delta\left(\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz\right) = P_{autre}$$

- On retrouve la même expression que le théorème de Bernoulli en tenant compte par exemple de la P_{pompe}.
- On voit le lien direct entre écoulement parfait et incompressible et évolution isentropique.

III-5) Escalator

Un escalator de longueur L = 30m, incliné d'un angle α=30° avance à la vitesse $v = 5\ km\ h^{-1}$ et permet à 50 personnes par minute (de masse moyenne 70 kg) de gravir un étage d'un magasin. On admet que les personnes transportées arrivent avec une vitesse négligeable sur le tapis roulant. Quelle est la puissance minimale du moteur de l'escalator ?



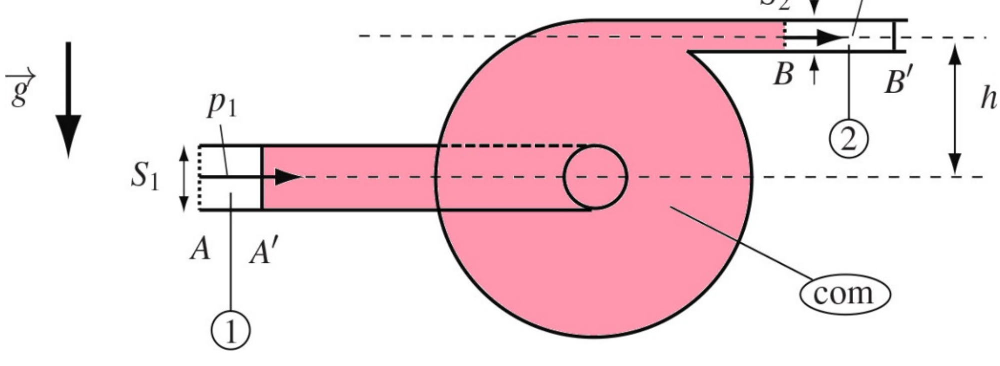
On se place en régime permanent d'où :

$$D_m\left[\frac{v^2}{2}+gz\right]_e^s = P_{ext\to\Sigma_f} = P_{moteur}$$

$$\Leftrightarrow P_{moteur} = D_m\left(\frac{v^2}{2}+gh\right) = 50*\frac{70}{60}\left(\frac{\left(\frac{5}{3.6}\right)^2}{2}+9.8*30\sin(30°)\right)$$

$$= 8{,}6kW$$

III-6) Pompe hydraulique



On considère la pompe ci-dessus. On note D_v le débit volumique, l'écoulement est supposé parfait, permanent et incompressible de masse volumique μ. Quelle puissance mécanique P_m faut-il fournir à la pompe sachant que son rendement est de r=80% ?

Données numériques :

$$\begin{cases} p_2 = 0{,}7bar\ ,\ \ p_1 = 0{,}3bar \\ h = 1{,}2m\ , \qquad S_1 = 0{,}07m^2\ , \qquad S_2 = 0{,}03m^2 \\ D_v = 150L.s^{-1} \end{cases}$$

Soit :

$$D_m\Delta\left(\frac{p}{\mu}+\frac{v^2}{2}+gz\right) = P_{autre}$$

$$\Rightarrow \mu D_v\left(\frac{p_2}{\mu}-\frac{p_1}{\mu}+\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}+gh\right) = P_{pompe\rightarrow fluide}$$

$$\Rightarrow P_{pompe\rightarrow fluide} = \mu D_v\left(\frac{v_2^2}{2}-\frac{v_1^2}{2}+\frac{p_2}{\mu}-\frac{p_1}{\mu}+gh\right)$$

$$\Rightarrow P_m = \frac{\mu D_v}{r}\left(\frac{D_v^2}{2S_2^2}-\frac{D_v^2}{2S_1^2}+\frac{p_2}{\mu}-\frac{p_1}{\mu}+gh\right) = 11kW$$