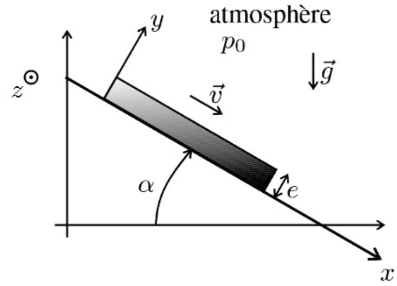
MF3 – Equations locales de la dynamique des fluides

A – Travaux dirigés

MF31 – Ecoulement sur un plan incliné



On considère un fluide de viscosité η, de masse volumique μ qui s'écoule sur un plan incliné d'angle α entre z = 0 et z = L. On néglige les forces de viscosité à l'interface entre le fluide et l'atmosphère. L'écoulement est stationnaire, homogène et incompressible. Le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = v(x,y,z)\overrightarrow{u_x}$

1°) Démontrer que $v(x,y,z) = v(y)$

2°) Exprimer p la pression du fluide en fonction de $P_0, \mu, g, \alpha, y\ et\ e$.

3°) Exprimer v(y) en fonction de $\mu, g, \eta, \alpha, y\ et\ e$. Calculer v_{max} et tracer $\frac{v}{v_{max}} = f\left(\frac{y}{e}\right)$.

4°) En déduire le débit massique D_m.

Rép : 1°) Ecoulement incompressible… 2°) $p - p_0 = -\mu g\cos(\alpha)\,(y-e)$ 3°) $v_{max} = \frac{\mu g \sin(\alpha)}{\eta}\frac{e^2}{2}$ 4°) $D_m = \frac{\mu^2 gL\sin(\alpha)}{\eta}\frac{e^3}{3}$

MF32 - Écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles

On réalise un écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles, considérés tous deux comme incompressibles, entre deux plaques planes horizontales. Les masses volumiques des liquides sont $\mu_1\ et\ \mu_2$. Ils sont tous deux newtoniens, de viscosités dynamiques $\eta_1\ et\ \eta_2$. L'écoulement est stationnaire. On travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, dans lequel les deux plaques sont fixes. L'axe (Oz) du repère cartésien est vertical ascendant. Le liquide indicé 2 occupe la zone comprise entre $z = -\frac{b}{2}\ et\ z = 0$. Le liquide indicé 1, celle comprise entre $z = 0\ et\ z = \frac{b}{2}$. On néglige les effets de bord c'est-à-dire qu'on suppose ces deux zones infiniment étendues selon (Ox) et (Oy). On impose une pression P_e uniforme dans le plan x = 0, et une pression $P_s < P_e$ dans le plan x = L.

1°) Quelle est la relation d'ordre entre $\mu_1\ et\ \mu_2$? Justifier.

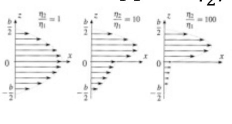
2°) On néglige désormais l'effet du poids. On admet que le champ des vitesses est de la forme :

$$\overrightarrow{v_1} = v_1(x,z)\overrightarrow{u_x}\ et\ \overrightarrow{v_2} = v_2(x,z)\overrightarrow{u_x}$$

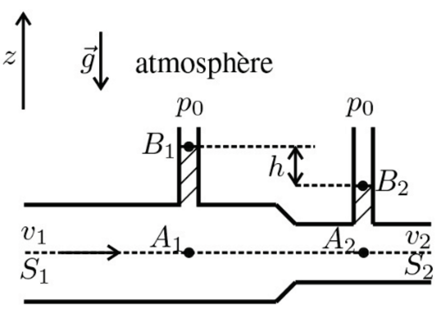
Montrer que la pression ne dépend que de x.

3°) Montrer que dans chacun des deux liquides, le champ des vitesses ne dépend pas de x. Établir les expressions des deux champs des vitesses.

4°) Donner les allures possibles du champ des vitesses en fonction de z selon la valeur du rapport η_2/η_1.

Rép : 1°) $\mu_1 < \mu_2$ 2°) $\vec{v} = v(z)\,\overrightarrow{u_x}$… 3°) $v_1(z) = \frac{P_s - P_e}{2\eta_1 L}\left(z - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b(P_s - P_e)(3\eta_1+\eta_2)}{4\eta_1 L(\eta_1+\eta_2)}\left(z-\frac{b}{2}\right)$… 4°) 

MF33 – Débitmètre



On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible.

1°) Exprimer le débit volumique en fonction de S_1, S_2, g et h.

2°) Si $S_2 < S_1$, comparer les pressions à l'entrée et à la sortie de la canalisation.

Rép : 1°) $D_v = S_1 S_1 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$ 2°) $p_{A_2} < p_{A_1}$

MF34 – Cyclone

À l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz, de rayon R, l'écoulement de l'air est homogène, parfait, permanent, incompressible et tourbillonnaire. On définit à l'intérieur de ce cylindre (appelé œil du cyclone) le vecteur tourbillon :

$$\vec{\Omega} = \Omega\,\vec{u_z} \text{ où } \Omega = cste$$

À l'extérieur du cylindre, l'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel. On note p_0 la pression infiniment loin du cylindre. Les lignes de courant sont des cercles. On admet que $\vec{v} = v(r)\,\vec{u_\theta}$. On néglige les effets de la pesanteur. On rappelle que :

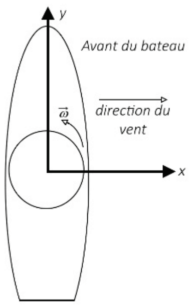
$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

1°) Exprimer v en fonction de r et R.

2°) Déterminer la pression p en négligeant les effets de la pesanteur.

Rép : 1°) $v(r<R) = \Omega r$ et $v(r \geq R) = \frac{R^2\Omega}{r}$ 2°) $p(r<R) = \frac{\mu r^2}{2}\Omega^2 + (p_0 - \mu R^2 \Omega^2)$ et $p(r \geq R) = p_0 - \frac{\mu R^4 \Omega^2}{2r^2}$

MF35 – Effet Magnus – Voile Flettner



Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon a et de hauteur h, tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{u_z}$. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible et le vent souffle à une vitesse uniforme constante $\vec{u} = u\,\vec{u_x}$.

L'écoulement de potentiel des vitesses $\phi_1 = u\cos(\theta)\left(\frac{a^2}{r} + r\right)$ correspond au mouvement du vent autour du cylindre fixe. L'écoulement de vitesse $\vec{v_2} = \frac{C}{2\pi r}\,\vec{u_\theta}$ pour $r \geq a$ correspond à l'effet d'entraînement de l'air par le cylindre en rotation. On supposera dans tout le problème le régime permanent établi et l'écoulement du fluide irrotationnel.

1°) Donner la relation entre la constante C et ω. On remarquera que dans ce modèle la vitesse du vent sur le cylindre est celle du cylindre.

2°)

a) Calculer les composantes de la vitesse du vent $\vec{v}$ dans la base polaire.

b) Représenter, pour différentes valeurs de ω, la carte des lignes de courant du fluide, en précisant les points d'arrêt ou points de vitesse nulle.

3°) Déterminer la pression $P(a,\theta)$ en tout point du cylindre et en déduire la force exercée par le fluide sur le cylindre, par unité de longueur de ce dernier.

4°) Préciser le sens de rotation du cylindre qui correspond à une force propulsive.

Rép : 1°) $C = 2\pi a^2 \omega$ 2a) $\vec{v} = u\cos(\theta)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{u_r} + \vec{u_\theta}\left(\frac{a^2\omega}{r} - u\sin(\theta)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\right)\vec{u_\theta}$ 2b) $\vec{v} = \vec{0}$ ...

3°) $p(a,\theta) = p_0 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{u}{2} - a^2\omega^2\right) - \frac{\mu}{2}(4u^2\sin^2\theta) + 2\,\mu\,u\,a\,\omega\sin\theta$ 4°) Le cylindre tourne dans le mauvais sens.

B – Exercices supplémentaires

MF36 - Chariot entraîné

Un chariot cubique, remplit d'un liquide, se déplace sur le sol avec une accélération constante : $\overrightarrow{a_e} = a\,\overrightarrow{e_x}$. Notons $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération relative du fluide par rapport au chariot.

a) Quelle est l'accélération du fluide par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen $\overrightarrow{a_t}$.

b) Faire un bilan des forces sur chaque la particule de fluide.

c) Appliquez la loi fondamentale de la dynamique à un volume mésoscopique dτ dans le référentiel terrestre. En déduire que : $\rho\,(\overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} - \vec{g}) = -\overrightarrow{grad}p$

d) En déduire la loi vérifiée si le fluide est au repos dans le référentiel lié au chariot.

e) Quelle est l'allure de la surface libre du liquide lorsqu'elle est stabilisée. On prendra comme origine la base-gauche du chariot et la hauteur d'eau pour x=0 sera notée z=H.

Rép : a) On a : $\overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}$ b) La particule de fluide est soumise au poids et aux forces de pression. c) On a : $dm\overrightarrow{a_t} = dm\vec{g} - \overrightarrow{grad}p\, d\tau$ ....
d) $\rho\,(\overrightarrow{a_e} - \vec{g}) = -\overrightarrow{grad}p$ e) $z = -\frac{a}{g}x + H$

MF37 – Ecoulement de Poiseuille dans un cylindre

On considère un cylindre horizontal de rayon R, de longueur L. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\,\overrightarrow{u_z}$. On appelle μ la masse volumique et η la viscosité du fluide. Le Laplacien du vecteur vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{\Delta}\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{u_z}$$

L'écoulement est stationnaire et incompressible. On néglige les effets de la pesanteur. On appelle p_A la pression à l'entrée du cylindre (z = 0) et p_B la pression à la sortie du cylindre (z = L).

1°) Déterminer la vitesse du fluide, à l'intérieur du cylindre, en fonction de $p_A, p_B, L, \eta, R\ et\ r$.

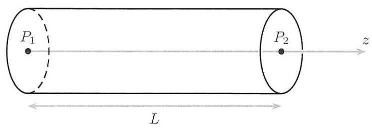
2°) Déterminer le débit massique, dû à l'écoulement, en fonction de $p_A, p_B, \eta, L\ et\ R$.

Rép : 1°) $v = \frac{p_B - p_A}{4\eta L}(r^2 - R^2)$ 2°) $D_m = \frac{\mu\pi}{8}\frac{p_A - p_B}{\eta L}R^4$

MF38 - Écoulement de Poiseuille dans un tuyau

On considère un tuyau cylindrique, de rayon R, de longueur L, horizontal et parcouru par un liquide newtonien de viscosité dynamique η. La pression sur l'axe du cylindre est P_1 à l'entrée et P_2 à la sortie du tuyau. L'écoulement est permanent et laminaire.

On ne tient pas compte de la pesanteur, dont les effets sur le fluide sont compensés par la réaction du tuyau. Dans ce cas, le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = f(r)\overrightarrow{u_z}$.



1°) Justifier que le champ de vitesse ne dépend que de la variable r.

2°) Justifier que la pression est uniforme sur une section droite du tuyau.

3°)

a) Comment s'adapte la définition de la viscosité dynamique dans le cas de l'écoulement étudié ?

b) En raisonnant sur un cylindre de fluide de longueur L et de rayon r, établir une équation liant le champ de vitesse et les pressions en z = 0 et z = L.

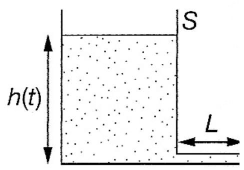
c) En déduire le profil de vitesse f (r).

4°) En déduire le débit volumique à travers une section du tuyau. En établissant une analogie avec la loi d'Ohm de l'électricité, définir la notion de résistance hydraulique. Exprimer la résistance hydraulique du tuyau en fonction des données.

Rép : 1°) $f(r,\theta,z) = f(r)$ 2°) $PFD \Rightarrow p(r,\theta,z) = p(z)$ 3a) $\overrightarrow{dF_{visc}} = \eta\frac{\partial f}{\partial r}dS\,\overrightarrow{u_z}\ avec\ dS = rd\theta dz$ 3b) $(p(0) - p(L))\pi r^2 + 2\pi r L\eta\frac{df}{dr} = 0$
3c) $\vec{v} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}(R^2 - r^2)\overrightarrow{u_z}$ 4°) $R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$

MF39 - Vidange d'un récipient

On réalise l'expérience suivante : un récipient, de section S = 8.10^3 cm^2, rempli d'un fluide incompressible de viscosité η = 0,3 Pl et masse volumique μ = 900 kg.m^{-3} sur une hauteur initiale $h_0 = 3\ m$, se vide par un tuyau horizontal de longueur L=1 m et rayon R=5 mm situé sur sa partie basse. On prendra g = 9,8 m.s^{-2}.



On admet que dans le corps du récipient (en dehors du tuyau), la vitesse du fluide est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la situation comme statique.

a) À quelle condition sur la section S du récipient cette hypothèse est-elle vérifiée ?
b) Que vaut la pression P_e à l'entrée du tuyau ? Et celle P_s en sortie ?
c) En supposant l'écoulement laminaire et quasiment stationnaire, évaluer le débit volumique sortant du tuyau.
d) Que vaut la vitesse débitante de sortie v initialement ?
e) Vérifier a posteriori la nature laminaire de l'écoulement.
f) Trouver une équation différentielle satisfaite par h(t), hauteur de fluide dans le récipient.
g) Quelle est la durée nécessaire pour vidanger la moitié du récipient ?

Rép : a) $S \gg \pi R^2$ b) $P_e = P_0 + \mu g h$ c) $D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mu g h}{L}$ d) $v = 28 cm\ s^{-1}$ e) Re=8,4<< 2000 ⇒Laminaire f) $\tau = \frac{8S\eta L}{\pi R^4 \mu g}$ g) $t_{\frac{1}{2}} = 21h$

MF310 – Ecoulement du Ketchup

On considère l'écoulement laminaire, stationnaire, irrotationnel et incompressible du ketchup assimilé à un fluide visqueux, de masse volumique μ, dans une conduite verticale et cylindrique sous le seul effet de la pesanteur. On suppose que la pression ne varie pas le long du tube. On note Oz l'axe du tube. Le champ eulérien des vitesses est, en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$, où r est la distance du point M à l'axe du tube, et où le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est orienté dans le même sens que l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. On note σ(r) la projection sur $\overrightarrow{u_z}$ de la force tangentielle surfacique que le fluide situé à l'intérieur du cylindre de rayon *r* exerce sur le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon r. Le ketchup est un fluide non newtonien caractérisé par le comportement rhéologique suivant :

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0 - \sigma(r)}{\eta}\ pour\ \sigma(r) \geq \sigma_0 \\ 0\ pour\ \sigma(r) \leq \sigma_0 \end{cases}$$

Les deux paramètres η (homogène à une viscosité dynamique) et σ_0 sont deux caractéristiques du fluide étudié.

1°) On considère une particule de fluide, comprise entre z et z+dz et entre r et r+dr. Établir l'équation différentielle du mouvement de cette particule de fluide.

2°) Intégrer cette équation différentielle et donner l'expression de $\sigma(r)$.

3°) En déduire l'expression du champ des vitesses. On sera amené à distinguer deux cas, selon que r est supérieur ou inférieur à un rayon caractéristique r_0. On fera de plus l'hypothèse que $r_0 \leq R$. Donner l'allure du champ des vitesses en fonction du rayon r. Expliquer pourquoi on parle d'écoulement bouchon.

4°) Donner l'expression du champ des vitesses lorsque $r_0 \geq R$. Déterminer l'ordre de grandeur du rayon minimal d'un tube permettant l'écoulement du ketchup : σ_0 est de l'ordre de 50 Pa et η de l'ordre de 10^6 Pa.s et $\mu = 1400\ kg\ m^{-3}$.

Rép : 1°) $\frac{d(r\sigma)}{dr} = \mu g r$ 2°) $\sigma = \frac{1}{2}\mu g r$ 3°) $r_0 = \frac{2\sigma_0}{\mu g}$... 4°) $v(r) = 0$, on obtient $r_0 = 7mm$.