MF3 – Equations locales de la dynamique des fluides

A – Travaux dirigés

MF31 – Effet Magnus – Voile Flettner

1. Il y a continuité de la vitesse au niveau du cylindre d'où :

$$a\omega = \frac{C}{2\pi a} \Rightarrow C = 2\pi a^2 \omega$$

2.

a) On a : $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{grad}\,\phi_1 + \frac{C}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$ où $\phi_1 = u\cos(\theta)\left(\frac{a^2}{r} + r\right)$

Or : $\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$

$$\Rightarrow \vec{v} = u\cos(\theta)\left(-\frac{a^2}{r^2} + 1\right)\overrightarrow{u_r} - u\sin(\theta)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{a^2\omega}{r}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = u\cos(\theta)\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}\left(\frac{a^2\omega}{r} - u\sin(\theta)\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

b) Les points d'arrêt sont tel que : $\vec{v} = \vec{0}$. Deux cas sont à étudier :

$$\begin{cases} r = a \Rightarrow \omega a = 2\,u\sin\theta \\ \theta = \frac{\pi}{2}\left(ou - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{a^2\omega}{r} = u\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \Rightarrow a^2\omega r = u(a^2 + r^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = a \; et \sin(\theta) = \frac{\omega a}{2u} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \; et \; r^2 - \frac{a^2\omega}{u} r + a^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = a \; et \sin(\theta) = \frac{\omega a}{2u} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \; et \; r = \frac{a^2\omega}{2u} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2\omega}{u}\right)^2 - 4a^2} \end{cases}$$

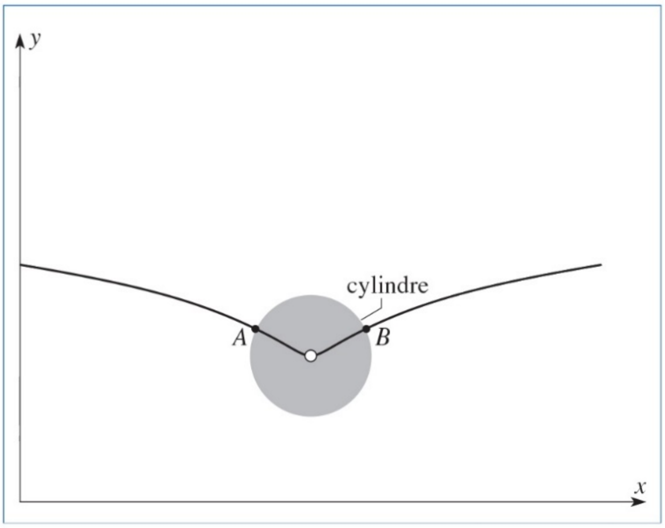
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = a \; et \sin(\theta) = \frac{\omega a}{2u} \; si \; \frac{\omega a}{2u} \le 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \; et \; r = \frac{a^2\omega}{2u}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4u^2}{\omega^2 a^2}}\right) \; si \; \frac{\omega a}{2u} \ge 1 \end{cases}$$

Remarque pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient : $r = \frac{a^2\omega}{2u}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4u^2}{\omega^2 a^2}}\right) < 0$ ce qui est impossible.

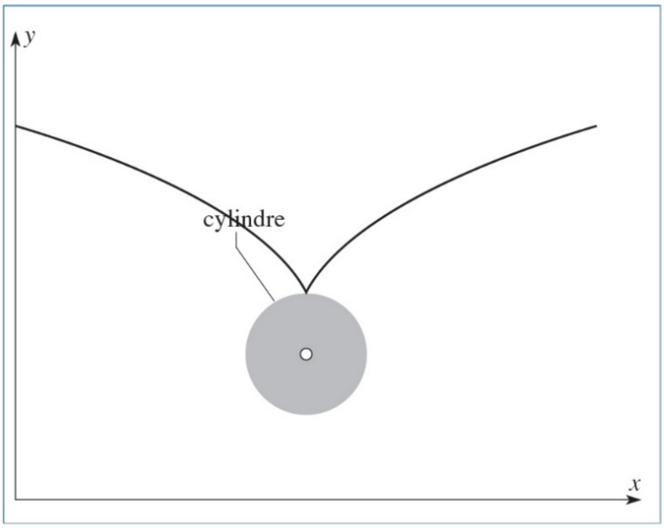
Premier cas

$r = a$ et $\omega a - 2v_0 \sin\theta = 0$, ce qui donne $\sin\theta = \dfrac{\omega a}{2v_0}$ *si* $\omega < \dfrac{2v_0}{a}$.

Il existe alors deux points d'arrêt A et B sur le cylindre, symétriques par rapport à l'axe (Oy) (*cf. schéma*).

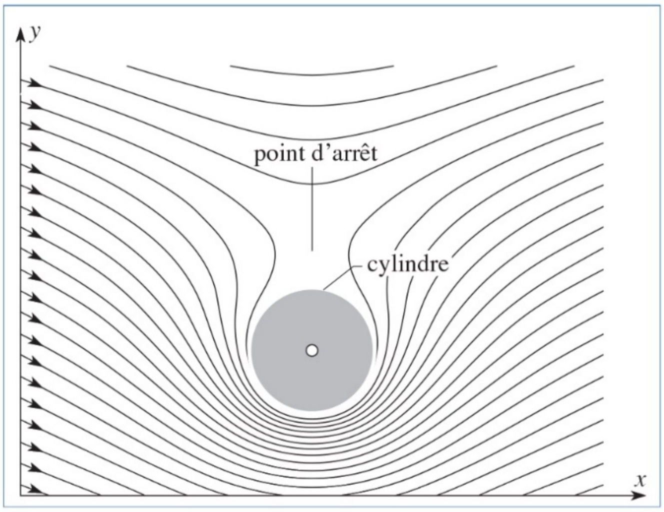


Au cas particulier $\omega = \dfrac{2v_0}{a}$ correspond un point d'arrêt sur le cylindre en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ (*cf. schéma*).



Deuxième cas

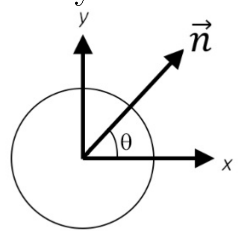
Si $\omega > \dfrac{2v_0}{a}$, il existe alors un point de vitesse nulle à l'extérieur du cylindre (*cf. schéma*).



3. L'écoulement du fluide parfait est permanent, incompressible, et irrotationnel à l'extérieur du cylindre d'où :

$$p_0 + \mu\frac{u}{2} = p(a,\theta) + \mu\frac{v(a,\theta)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow p_0 + \mu\frac{u}{2} = p(a,\theta) + \mu\frac{v(a,\theta)^2}{2}$$
$$\Leftrightarrow p(a,\theta) = p_0 + \mu\frac{u}{2} - \frac{\mu}{2}(a\omega - 2u\sin(\theta))^2$$
$$\Leftrightarrow p(a,\theta) = p_0 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{u}{2} - a^2\omega^2\right) - \frac{\mu}{2}(4u^2\sin^2\theta) + 2\,\mu\,u\,a\,\omega\sin\theta$$

On va calculer la force résultante sur le cylindre :



On a :

- $d\vec{F} = -p\,\vec{n}\,dS \Leftrightarrow \begin{cases} dF_y = -pdS\sin\theta = -p\,ha\ \sin\theta\ d\theta \\ dF_x = -pdS\cos\theta = -p\,ha\ \cos\theta\ d\theta \end{cases}$
- $p(a,\theta) = A + B\sin\theta + C\sin^2\theta$

D'où les intégrales suivantes à calculer :

$$\begin{cases} \oint A\sin\theta d\theta = \oint A\cos\theta d\theta = 0 \\ \oint B\sin^2\theta d\theta = \pi \\ \oint B\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta = \oint B\sin(\theta)\,d(\sin(\theta)) = B\ \left[\dfrac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \oint C\cos^2\theta\sin\theta d\theta = -\oint C\cos^2\theta d(cos\theta) = -C\ \left[\dfrac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \\ \oint C\,sin^2\theta\sin\theta d\theta = -\oint C\,(1-\cos^2)\,\theta d(cos\theta) = 0 \end{cases}$$

Donc : $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -B\,\pi ha = -2\,\mu u\,\pi h\,a^2\,\omega \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -2\,\mu u\,\pi h\,a^2\,\omega\overrightarrow{u_y}}$$

MF32 – Plaque oscillante

1. ▹ Supposons l'écoulement incompressible. Dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, l'équation de Navier-Stokes permet alors d'écrire :

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right)=-\overrightarrow{\text{grad}}\,p+\eta\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{v}+\rho\overrightarrow{g}.$$

▹ D'après l'énoncé, la pesanteur est négligeable ce qui autorise à négliger le poids. De plus, le champ de pression est supposé uniforme donc de gradient nul. L'équation de Navier-Stokes se simplifie en :

$$\rho\left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}+(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}\right)=\eta\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{v}.$$

▹ Par ailleurs, la forme sous laquelle on cherche le champ des vitesses annule le terme non linéaire :

$$(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{v}=(v\overrightarrow{u_x})\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\overrightarrow{v}=v\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}.$$

▹ Finalement, il reste : $\rho\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}=\eta\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{v}=\eta\dfrac{\partial^2\overrightarrow{v}}{\partial z^2}$.
En projection sur $\overrightarrow{u_x}$, on tire l'équation demandée :

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

où l'on reconnaît la viscosité cinématique $\nu=\eta/\rho$. Cette équation a la forme d'une équation de diffusion sans terme de source externe, avec un coefficient de diffusion ν.

2. ▹ Transcrivons l'équation (10.8) en notation complexe :

$$j\omega\,\underline{v}=\nu(-\underline{k}^2)\underline{v}\quad\text{d'où}\quad\underline{k}^2=-j\frac{\omega}{\nu}.$$

▹ Extrayons la racine complexe de $\underline{k}^2$:

$$\underline{k}^2=e^{-j\pi/2}\frac{\omega}{\nu}\quad\text{d'où}\quad\underline{k}=\pm e^{-j\pi/4}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}=\pm\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}=\pm\frac{1-j}{\delta}\quad\text{avec}\quad\delta=\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}.$$

En reportant dans la forme de la solution cherchée :

$$\underline{v}(z,t)=\underline{A}\exp\left(\mp\frac{z}{\delta}\right)\exp\left(j\omega t\mp j\frac{z}{\delta}\right),$$

puis, en écrivant $\underline{A}=A\exp(-j\varphi)$:

$$v(z,t)=\mathfrak{Re}\,\underline{v}(z,t)=A\exp\left(\mp\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t\mp\frac{z}{\delta}-\varphi\right).$$

Dans le domaine $z>0$, l'amplitude $A\exp\left(\mp\frac{z}{\delta}\right)$ du champ des vitesses ne peut pas diverger lorsque $z\to+\infty$: il faut donc choisir le signe « $-$ ».

▹ Examinons les conditions aux limites sur la plaque. L'écoulement étant visqueux, le fluide « colle » aux parois imperméables : la vitesse du fluide est donc confondue avec la vitesse de la plaque en $z = 0$.

$$v(z=0,t) = U\cos(\omega t).$$

En identifiant à la solution trouvée prise en $z = 0$, il vient, à chaque instant :

$$A\cos(\omega t - \varphi) = U\cos(\omega t) \quad \text{d'où} \quad A = U \quad \text{et} \quad \varphi = 0.$$

▹ En conclusion, le champ des vitesses s'écrit pour $z > 0$:

$$\overrightarrow{v}(z>0,t) = U\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u_x}.$$

▹ Le domaine $z < 0$ est symétrique du domaine $z > 0$. Le champ des vitesses s'y déduit par parité :

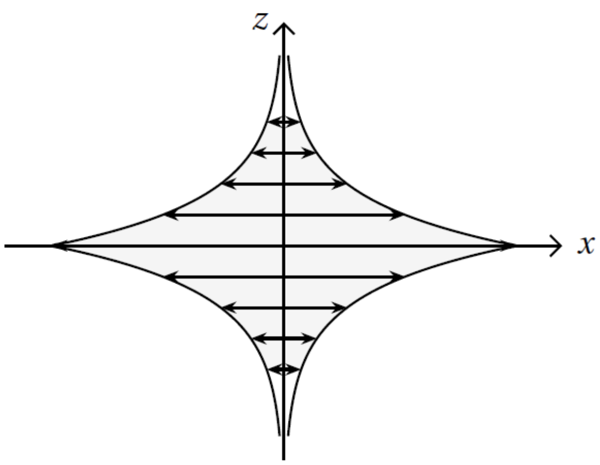
$$\overrightarrow{v}(z<0,t) = U\exp\left(\frac{z}{\delta}\right)\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right)\overrightarrow{u_x}.$$

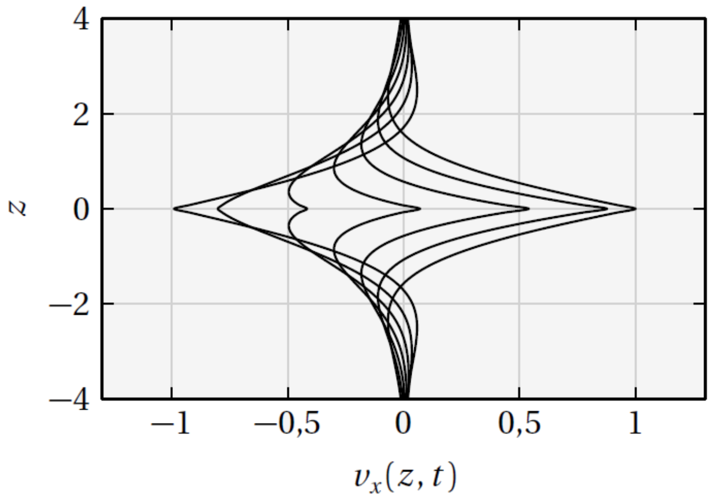
On pouvait aussi raisonner de manière analogue à ce qui a été fait pour $z > 0$: l'amplitude du champ des vitesses ne peut pas physiquement diverger lorsque $z \to -\infty$, d'où le choix du signe « + » dans l'équation (10.9).

▹ Le champ des vitesses complet fait apparaître une atténuation de la vitesse du fluide sur une distance caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$, d'autant plus courte que la plaque oscille rapidement. Inversement, cette distance caractéristique augmente avec la viscosité cinématique du fluide environnant.

De plus, les différentes couches mises en mouvement par l'oscillation de la plaque n'oscillent pas en phase. Ainsi, par rapport à la plaque, la couche de fluide se trouvant à distance $|z|$ oscille à la même pulsation que la plaque mais avec (voir figure 10.28) :

- une amplitude atténuée d'un facteur $\exp(-|z|/\delta)$;
- un retard de phase $|z|/\delta$.





a) Ensemble des vecteurs-vitesses explorés au cours du temps pour différents z. b) Représentation de $v_x(z,t)$ en fonction de z à différents instants.

MF33 - Chariot entraîné

1. On a : $\overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}$
2. La particule de fluide est soumise au poids et aux forces de pression.

3. On a :

$$dm\overrightarrow{a_t} = dm\vec{g} - \overrightarrow{grad}p\, d\tau \Leftrightarrow \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} = \vec{g} - \overrightarrow{grad}p\,\frac{1}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \rho\,(\overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} - \vec{g}) = -\overrightarrow{grad}p$$

4. Si le fluide est au repos : $\rho\,(\overrightarrow{a_e} - \vec{g}) = -\overrightarrow{grad}p$

5. Donc :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a \text{ et } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Qui s'intègre en :

$$p = -\rho a x - \rho g z + C$$

Or au niveau de la surface :

$$p = -\rho a x - \rho g z + C = p_0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{a}{g}x + \underbrace{\frac{C - p_0}{\rho g}}_{cste}$$

Vu que la surface libre est une droite et que le volume est conservé. Le point milieu est aussi conservé ainsi :

$$z\left(\frac{a}{2}\right) = H$$

$$\Rightarrow H = -\frac{a}{g} \times \frac{a}{2} + \text{cste} \Rightarrow \text{cste} = \text{H} + \frac{\text{a}^2}{2\text{g}}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -\frac{a}{g}\left(x - \frac{a}{2}\right) + H}$$

B – Exercices supplémentaires

MF34 – Ecoulement sur un plan incliné

1. La vitesse est de la forme : $\vec{v} = v(x, y, z)\overrightarrow{u_x}$. Or l'écoulement est incompressible et homogène donc :

$$div\,\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v = v(y, z)$$

On suppose qu'il y a invariance suivant Oz, d'où :

$$\vec{v} = v(y)\,\overrightarrow{u_x}$$

2°) L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu\vec{a} = \mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right) = \mu\vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}p + \eta\Delta\vec{v}$$

L'accélération locale $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ est nulle puisque l'écoulement est stationnaire.

L'accélération convective est : $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$.

$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}$ est un opérateur que l'on peut exprimer avec les coordonnées cartésiennes :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v} = \left(\left|\begin{array}{l} v(y) \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \cdot \left|\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array}\right.\right)\vec{v} = v(y)\,\frac{\partial v(y)}{\partial x}\vec{u}_x = \vec{0}$$

Attention à l'écriture de l'opérateur Laplacien vecteur. En coordonnées cartésiennes, l'opérateur Laplacien scalaire est :

$$\Delta U = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

L'opérateur Laplacien vecteur s'écrit : $\Delta\vec{a} = \left|\begin{array}{l} \Delta a_x \\ \Delta a_y \\ \Delta a_z \end{array}\right.$

Le Laplacien du vecteur vitesse est : $\Delta\vec{v} = \left|\begin{array}{l} \Delta v_x = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \Delta v_y = 0 \\ \Delta v_z = 0 \end{array}\right.$

La projection de l'équation de Navier-Stokes dans la base des coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu g \sin\alpha + \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} - \mu g \cos\alpha \\ 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial z} \end{array}\right.$$

D'après la troisième projection, la pression p ne dépend pas de z.
On utilise la deuxième projection pour exprimer la pression p en fonction de y. On a donc $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_x = -\mu g \cos\alpha$.

On utilise l'équation $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_x = -\mu g \cos\alpha$. On travaille à x constant. On peut remplacer la dérivée partielle $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)_x$ par $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, séparer les variables et intégrer. Attention, pour chaque valeur de x, on a une constante d'intégration. On a donc en fait une fonction $f(x)$ qui apparaît lors de l'intégration.

On travaille à x constant. La deuxième projection s'écrit : $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\mu g \cos\alpha$.

On sépare les variables :

$$\mathrm{d}p = -\mu g(\cos\alpha)\mathrm{d}y$$

L'intégration donne :

$$p(x,y) = -\mu g(\cos\alpha)y + f(x) \quad \text{(éq.1)}$$

Conditions aux limites

Le fluide est en contact avec l'atmosphère pour $y = e$. On a donc égalité des pressions pour $y = e$.
On doit donc avoir :

$$p(x, y = e) = p_0 = -\mu g(\cos\alpha)e + f(x) \quad \text{(éq.2)}$$

On fait la différence des équations (1) et (2). On obtient :

$$p - p_0 = -\mu g \cos\alpha\,(y - e)$$

3°) On utilise la première projection de l'équation de Navier-Stokes pour déterminer la vitesse $v(y)$: $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

D'après la question précédente, p ne dépend que de y. On a donc $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

L'équation différentielle se réduit à : $0 = \mu g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, soit $\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}$.

L'intégration donne : $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta} y + C_1$.

Une deuxième intégration fournit la vitesse :

$$v = -\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2.$$

Conditions aux limites

- La première condition aux limites est pour $y = 0$. Le fluide est en contact avec le plan incliné, donc $v = 0$ et $C_2 = 0$.
- La deuxième condition aux limites est plus délicate à exprimer en $y = e$ puisqu'on ne connaît pas la vitesse pour $y = e$. Il faut trouver une condition sur la dérivée de la vitesse.

Il n'y a **pas de force de cisaillement ou de force de viscosité** sur l'interface fluide/air, donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y = e) = 0$.

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(y = e) = 0 = -\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta} e + C_1$, soit $C_1 = \frac{\mu g \sin\alpha}{\eta} e$.

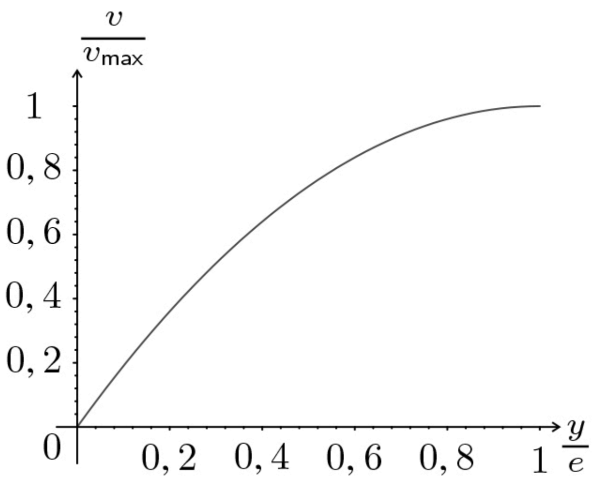
La vitesse s'écrit donc :

$$v = -\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\frac{y^2}{2} + \frac{\mu g \sin\alpha}{\eta} y e = \frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\left(ye - \frac{y^2}{2}\right)$$

La vitesse maximale est obtenue pour $y = e$ et vaut :

$$v_{\max} = \frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\frac{e^2}{2}$$

Le graphe représentant v en fonction de y est représenté ci-dessous.



On vérifie que $v = 0$ pour $y = 0$ et que la dérivée de la vitesse est nulle pour $y = e$.

4°) On considère une surface élémentaire orientée dans le sens de l'écoulement : $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_x$.

On a vu que $v = \dfrac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\left(ye - \dfrac{y^2}{2}\right)$.

On a donc : $D_m = \displaystyle\iint \mu\,\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta}\left(ye - \frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

On intègre y entre 0 et e et z entre 0 et L.

On obtient : $D_m = \mu\,\dfrac{\mu g \sin\alpha}{\eta} L \left[\dfrac{y^2 e}{2} - \dfrac{y^3}{6}\right]_0^e$, d'où :

$$D_m = \mu\,\frac{\mu g \sin\alpha}{\eta} L \left(\frac{e^3}{2} - \frac{e^3}{6}\right)$$

On en déduit finalement :

$$D_m = \frac{\mu^2 g L \sin\alpha}{\eta}\frac{e^3}{3}$$

MF35 - Écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles

1. Le liquide qui est en-dessous est celui qui a la masse volumique la plus élevée. Cela a été justifié dans le chapitre 10 en raisonnant sur une goutte d'un des deux fluides qui serait insérée dans l'autre. Soumise à son poids et à la poussée d'Archimède, elle monte si elle est constituée du fluide le moins dense et inversement dans le cas contraire. On a donc $\mu_1 < \mu_2$.

2. Pour commencer, le caractère incompressible des liquides, donc homogène et incompressible de l'écoulement, se traduit pour chaque liquide par $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, comme on l'a vu à la fin du chapitre 11. Puisque le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(x,z)\,\vec{u_x}$, cela donne $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, d'où $\vec{v} = v(z)\,\vec{u_x}$. On prend comme système une particule de fluide, de l'un ou l'autre des deux fluides (donc sans indice pour le moment), de dimensions $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$, située dans le voisinage de $M(x,y,z)$. On l'assimile à un point matériel. Elle est soumise à (pesanteur négligée) :

- la résultante des forces de pression $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;
- les forces de viscosité exercées par les particules voisines ; ces forces de friction sont colinéaires au mouvement, donc à $\vec{u_x}$;

Puisque le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(z)\,\vec{u_x}$, les lignes de courant sont des droites parallèles à (Ox). L'écoulement étant stationnaire, les trajectoires sont aussi des droites parallèles à (Ox). L'accélération $\vec{a}$ d'une particule est nulle puisqu'elle se déplace en ligne droite en occupant successivement des points pour lesquels le champ des vitesses est le même. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la particule de fluide, dans le référentiel terrestre, il vient : $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{d}F_{visco}\vec{u_x} = \vec{0}$. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ est selon $\vec{u_x}$ et que $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$, d'où $P = P(x)$.

3. Les forces de viscosité qui agissent sur la particule de fluide sont :

- celle exercée par la particule au-delà de $z + \mathrm{d}z$, soit $+\eta\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z + \mathrm{d}z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{u_x}$;
- celle exercée par la particule en-deçà de z, soit $-\eta\,\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{u_x}$;

La relation fondamentale de la dynamique projetée selon $\vec{u_x}$ donne :

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,\ \text{d'où}\ \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta\,\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}.$$

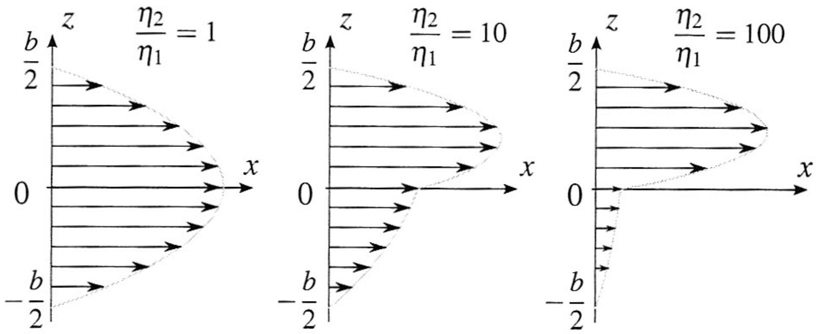
Le premier membre ne dépend pas de z, le second ne dépend pas de x, donc la quantité commune est une constante K_0 et $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = K_0$ conduit à $K_0 = \dfrac{P_s - P_e}{L}$. Dans le fluide 1, l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}z^2} = \dfrac{K_0}{\eta_1}$ s'intègre (avec une notation qui facilite la détermination des constantes) en $\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}z} = \dfrac{K_0}{\eta_1}\left(z - \dfrac{b}{2}\right) + A_1$ puis en $v_1(z) = \dfrac{K_0}{2\eta_1}\left(z - \dfrac{b}{2}\right)^2 + A_1\left(z - \dfrac{b}{2}\right) + B_1$.

Et de la même façon, $\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}z} = \dfrac{K_0}{\eta_2}\left(z + \dfrac{b}{2}\right) + A_2$ puis $v_2(z) = \dfrac{K_0}{2\eta_2}\left(z + \dfrac{b}{2}\right)^2 + A_2\left(z + \dfrac{b}{2}\right) +$

B_2. Les conditions d'adhérence sur les plaques en $z = b/2$ et $z = -b/2$ permettent d'écrire $B_1 = 0$ et $B_2 = 0$. La continuité de la vitesse en $z = 0$ donne $\frac{b^2 K_0}{8}\left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right) = (A_1 + A_2)\frac{b}{2}$, soit $\frac{bK_0}{4}\left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right) = (A_1 + A_2)$. Il manque encore une équation pour pouvoir déterminer l'ensemble des constantes. Celle-ci vient du principe des actions réciproques à l'interface : la force de cisaillement exercée par le fluide 1 sur une surface dS du fluide 2 est l'opposée de celle exercée par le fluide 2 sur la surface dS du fluide 1. $\eta_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}z}(0)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x} = -\left(-\eta_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}z}(0)\,\mathrm{d}S\overrightarrow{u_x}\right)$, soit $\eta_1\left(-\frac{K_0 b}{2\eta_1} + A_1\right) = \eta_2\left(\frac{K_0 b}{2\eta_2} + A_2\right)$. On en déduit :

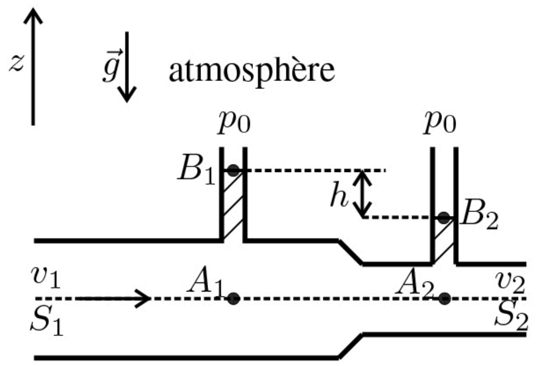
$$v_1(z) = \frac{P_s - P_e}{2\eta_1 L}\left(z - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b(P_s - P_e)(3\eta_1 + \eta_2)}{4\eta_1 L(\eta_1 + \eta_2)}\left(z - \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{et } v_2(z) = \frac{P_s - P_e}{2\eta_2 L}\left(z + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b(P_e - P_s)(\eta_1 + 3\eta_2)}{4\eta_2 L(\eta_1 + \eta_2)}\left(z + \frac{b}{2}\right).$$



MF36 – Débitmètre

1.



$A_1 \to A_2$

L'écoulement est homogène, parfait, permanent et incompressible (HPPI). On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \to A_2$, soit :

$$\frac{p_{A_1}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{p_{A_2}}{\mu} + \frac{1}{2}v_{A_2}^2 + gz_{A_2}$$

On en déduit :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = +\frac{1}{2}\mu\left(v_2^2 - v_1^2\right)\ (eq.1)$$

Conservation du débit volumique

L'écoulement est incompressible. On a donc la conservation du débit volumique :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2\,(eq.2)$$

$A_1 \to B_1$ et $A_2 \to B_2$

L'écoulement est parfait et les lignes de courant sont horizontales, alors on peut appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides homogènes et incompressibles dans la direction verticale, donc :

$$p_{A_1} = p_{B_1} + \mu g h_1$$

On peut appliquer la même relation pour $A_2 \to B_2$, soit

$$p_{A_2} = p_{B_2} + \mu g h_2$$

Les points B_1 et B_2 sont en contact avec l'atmosphère, donc $p_{B_1} = p_{B_2} = p_0$. On en déduit que :

$$p_{A_1} - p_{A_2} = \mu g h \,(eq.3)$$

Des équations (1) et (3), on en déduit :

$$\mu g h = \frac{1}{2}\mu\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

En utilisant l'équation (2), on a :

$$2gh = \left(\left(\frac{v_1 S_1}{S_2}\right)^2 - v_1^2\right) = v_1^2\left(\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right)$$

Soit :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

Le débit volumique est :

$$D_V = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}}$$

2. Si $S_2 < S_1$, alors $v_2 > v_1$ d'après la conservation du débit volumique. D'après le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant $A_1 \rightarrow A_2$, on a

$$p_{A_2} < p_{A_1}$$

Un rétrécissement du conduit provoque une dépression.
Cet effet s'appelle l'effet Venturi. Exemple d'application : trompe à eau utilisée en chimie.

MF37 – Cyclone

1°) Comme $\vec{v} = v(r)\,\vec{u}_\theta$, le rotationnel du vecteur vitesse s'écrit en projection sur $\vec{u}_z$: $\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rv(r)\right)$.

- **1^er^ cas :** $r \leqslant R$. On a

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rv(r)\right) = 2\Omega$$

On sépare les variables : $\mathrm{d}(rv) = 2\Omega r\mathrm{d}r$

L'intégration donne : $rv = \Omega r^2 + C_1$. Soit :

$$v = r\Omega + \frac{C_1}{r}$$

Si $r \to 0$, la vitesse est nécessairement définie, alors $C_1 = 0$.
A l'intérieur du cylindre, la vitesse est donc :

$$v = r\Omega$$

- **2^ème^ cas :** $r \geqslant R$. On a :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(rv(r)\right) = 0$$

On a donc $rv = C_2$, soit $v = \frac{C_2}{r}$.

La vitesse est nécessairement continue pour $r = R$, donc $\frac{C_2}{R} = R\Omega$. On en déduit donc la constante d'intégration :

$$C_2 = R^2\Omega$$

La vitesse à l'extérieur du cylindre est :

$$v = \frac{R^2\Omega}{r}$$

2. À l'extérieur du cylindre :

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel (HPPII). On peut donc appliquer le théorème de Bernoulli.

La quantité $\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} + gz = cte$ est constante en tout point de l'écoulement. Si $r \to \infty$, alors la vitesse est nulle et la pression tend vers p_0. On reste à la même altitude, donc :

$$\frac{p}{\mu} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_0}{\mu}$$

On a vu dans la question précédente que $v = \frac{R^2\Omega}{r}$. On a :

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\mu\frac{R^4\Omega^2}{r^2}$$

À l'intérieur du cylindre :

L'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et rotationnel. On pourrait appliquer le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant mais pour chaque cercle, on aurait une constante différente. Cette méthode ne permet pas de calculer la pression.
Il faut donc revenir à l'équation d'Euler.

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{v^2}{2}+\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}\right)\wedge\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}p+\mu\vec{g}$$

On est en régime permanent donc $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$. A l'intérieur du cylindre : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v}=2\Omega\vec{u}_z$. On néglige les effets de la pesanteur.
On a donc :

$$\mu\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{r^2\Omega^2}{2}\right)+2\Omega\vec{u}_z\wedge r\Omega\vec{u}_\theta\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}\vec{u}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\vec{u}_\theta-\frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z$$

Soit :

$$\mu r\Omega^2\vec{u}_r-\mu 2r\Omega^2\vec{u}_r=-\frac{\partial p}{\partial r}\vec{u}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\vec{u}_\theta-\frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z$$

On peut projeter dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.

$$\left|\begin{array}{l}-\mu r\Omega^2=-\dfrac{\partial p}{\partial r}\\ 0=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta}\\ 0=-\dfrac{\partial p}{\partial z}\end{array}\right.$$

La pression ne dépend pas de θ et de z. On peut remplacer $\frac{\partial p}{\partial r}$ par $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$. On a alors : $-\mu r\Omega^2=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$

Il reste à séparer les variables : $\mathrm{d}p=\mu r\Omega^2\mathrm{d}r$

On intègre : $p=\mu\frac{r^2}{2}\Omega^2+cte$

Pour déterminer la constante d'intégration, on se place en $r=R$ puisque la pression est continue en tout point de l'espace. On doit donc avoir :

$$p_0-\frac{1}{2}\mu\frac{R^4\Omega^2}{R^2}=\mu\frac{R^2}{2}\Omega^2+cte$$

Soit :

$$cte=p_0-\mu R^2\Omega^2$$

On en déduit la pression à l'intérieur du cylindre :

$$p=\mu\frac{r^2}{2}\Omega^2+\left(p_0-\mu R^2\Omega^2\right)$$

MF38 – Ecoulement de Poiseuille dans un cylindre

1. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\mu\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}\right)=\mu\vec{g}-\overrightarrow{\text{grad}}p+\eta\Delta\vec{v}$$

On néglige les effets de la pesanteur, ce qui revient à négliger $\mu\vec{g}$ devant les autres forces volumiques.

Le Laplacien du vecteur vitesse est $\Delta\vec{v}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{u}_z$.

L'opérateur dans la dérivée convective s'écrit :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\bullet=v(r)\,\vec{u}_z\cdot\frac{\partial\bullet}{\partial z}\vec{u}_z=v(r)\,\frac{\partial\bullet}{\partial z}$$

Comme $v_x=v_y=0$ et v_z ne dépend que de r, l'accélération convective est :

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}=\left|\begin{array}{l} v(r)\,\dfrac{\partial v_x}{\partial z}=0\\ v(r)\,\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=0\\ v(r)\,\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=0\end{array}\right.$$

La projection de l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} 0=-\dfrac{\partial p}{\partial r}\\ 0=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial\theta}\\ 0=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\eta\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)\end{array}\right.$$

La pression ne dépend pas de r et de θ. Elle ne dépend que de z. La vitesse ne dépend que de r d'après l'énoncé. On peut donc remplacer les dérivées partielles par des dérivées « droites ». On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=\eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$$

Cours : Soit f une fonction ne dépendant que de z et g une fonction ne dépendant que de r. Comment exploiter la relation $f(z)=g(r)$ valable $\forall r$ et $\forall z$?

- La dérivée partielle par rapport à z s'écrit $\left(\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right)_r=\left(\frac{\partial g(r)}{\partial z}\right)_r$. Elle est nulle car g ne dépend que de r. On en déduit que f ne dépend pas de z. Comme f ne dépend pas de r, la fonction f est donc constante.

- La dérivée partielle par rapport à r s'écrit : $\left(\frac{\partial f(z)}{\partial r}\right)_z = \left(\frac{\partial g(r)}{\partial r}\right)_z$. Elle est nu
  ne dépend que z. On en déduit que g dépend pas de r. Comme g ne dépend pas
  fonction g est donc constante.

On a donc $f(z) = A$ et $g(r) = A$ avec A une constante.

La relation $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)$ est valable $\forall r$ et $\forall z$.
On doit donc avoir deux relations :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = A \text{ (eq.1)}$$

et

$$\eta\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = A \text{ (eq.2)}$$

avec A une constante que l'on va déterminer au cours de la résolution.

Première équation :

$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = A$. En intégrant, on a : $p = Az + B$. D'après l'énoncé, $p = p_A$ pour $z = 0$ et $p = p_B$ pour $z = L$. On a donc $B = p_A$ et $p_B = AL + p_A$, soit

$$A = \frac{p_B - p_A}{L}$$

La pression est donc :

$$p = \frac{p_B - p_A}{L}z + p_A$$

Deuxième équation :

La séparation des variables donne : $\mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{Ar}{\eta}\mathrm{d}r$.

En intégrant, on a : $r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{Ar^2}{2\eta} + C$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{Ar}{2\eta} + \frac{C}{r}$$

Argument physique pour déterminer une constante d'intégration : dans le cylindre, la vitesse et la dérivée de la vitesse doivent rester finies.

Si $r \to 0$, la dérivée de la vitesse doit rester finie, donc la constante d'intégration C est nulle.
On a donc : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \dfrac{(p_B - p_A)}{2\eta L} r$.

On intègre une deuxième fois : $v = \dfrac{(p_B - p_A)}{4\eta L} r^2 + D$ (eq.3).

Remarque : Autre argument physique pour déterminer une constante d'intégration : La vitesse est nulle pour $r = R$ car le fluide accroche à la paroi à cause des forces de viscosité.

On doit avoir $0 = \dfrac{(p_B - p_A)}{4\eta L} R^2 + D$ (eq .4).
En faisant la différence (eq.3) – (eq.4), on en déduit la vitesse :

$$v = \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} \left(r^2 - R^2\right)$$

2. Le débit massique est défini par : $D_m = \iint \mu \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$.
On considère une surface élémentaire orientée dans le sens de l'écoulement :
$\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta\, \vec{u}_z$.

On a alors : $D_m = \iint\limits_S \mu v(r)\, \mathrm{d}r\, r\mathrm{d}\theta = \int\limits_{r=0}^{R} \mu v(r)\, \mathrm{d}r\, r \int\limits_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta$.
Soit :

$$D_m = \int\limits_{r=0}^{R} \mu \frac{(p_B - p_A)}{4\eta L} \left(r^2 - R^2\right) 2\pi r \mathrm{d}r = \mu \frac{\pi}{2} \frac{(p_B - p_A)}{\eta L} \left[\frac{r^4}{4} - R^2 \frac{r^2}{2}\right]_0^R.$$

On obtient :

$$D_m = \mu \frac{\pi}{2} \frac{(p_B - p_A)}{\eta L} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right) = \frac{\mu\pi}{8} \frac{(p_A - p_B)}{\eta L} R^4$$

C'est la loi de Poiseuille pour laquelle le débit massique est proportionnel à R^4 et proportionnel à $\dfrac{1}{L}$. On vérifie que $p_A > p_B$ si $D_m > 0$. On a bien une baisse de la pression dans le cylindre.

MF39 - Écoulement de Poiseuille dans un tuyau

1. *A priori*, $\vec{v}$ est fonction de r, θ et z, mais pas du temps car l'écoulement est permanent. Comme la pesanteur est négligée, il y a physiquement une symétrie de révolution autour de l'axe z, donc $\vec{v}$ ne dépend pas de θ et il reste $\vec{v} = f(r,z)\,\vec{u}_z$. Le fluide qui s'écoule est un liquide, dont l'incompressibilité se traduit par div $\vec{v} = 0$ dans tout l'écoulement, soit $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ partout d'après le formulaire d'analyse vectorielle. Par conséquent, f ne dépend pas de z et il reste $\boxed{\vec{v} = f(r)\,\vec{u}_z}$.

2. La loi de la quantité de mouvement appliquée à une particule mésoscopique (volume $\mathrm{d}\tau$ de fluide) s'écrit

$$\underbrace{\varrho\,\mathrm{d}\tau\,\vec{a}}_{=\vec{0}} = -(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P)\,\mathrm{d}\tau + \underbrace{\varrho\,\mathrm{d}\tau\,\vec{g}}_{\text{négligé}} + \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}}\,,$$

où $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}}$ est la résultante des actions de viscosité sur la particule.

D'après la forme du champ de vitesse, les lignes de courant sont des droites parallèles à l'axe du tuyau. L'écoulement étant permanent, les trajectoires des particules de fluide se confondent avec ces lignes, qui sont à $r =$ cte, donc à $\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$. Toute particule a ainsi un mouvement rectiligne uniforme, et son accélération $\vec{a}$ est nulle. D'autre part, la pesanteur est négligée, donc il ne reste que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P = \mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}}$. Les actions de viscosité (cisaillement) sont parallèles à $\vec{u}_z$, donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P$ possède seulement une composante non nulle sur $\vec{u}_z$, soit

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0\,,$$

d'après l'expression du gradient en coordonnées cylindriques. Ces deux équations montrent que P est uniforme sur une section du tuyau orthogonale à $\vec{u}_z$.

3a)

Méthode **Viscosité dynamique**

Pour un écoulement incompressible de la forme $\vec{v} = f(y)\,\vec{u}_x$, l'action de viscosité exercée par la couche de fluide située en y^+ sur celle située en y^- à travers une surface mésoscopique d'aire $\mathrm{d}S$ séparant les deux couches s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}} = \eta\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_x\,.$$

L'adaptation de cette définition au cas d'un champ de vitesse de forme quelconque n'est pas triviale, surtout si la géométrie n'est pas cartésienne. Cependant, le champ étudié ici est similaire à celui de la définition, $\vec{v} = f(r)\,\vec{u}_x$. L'action de la couche r^+ sur la couche r^- à travers un élément mésoscopique de surface $\mathrm{d}S$ s'écrit donc

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{visc}} = \eta\,\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{d}S\,\vec{u}_z \quad \text{avec} \quad \mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}\,. \qquad (1.12.1)$$

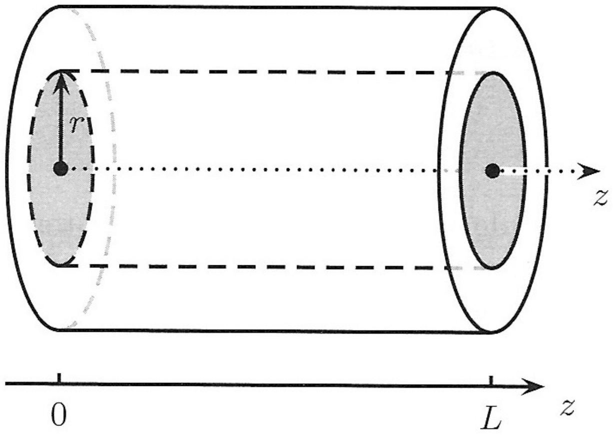


FIG. 1.12.2. Cylindre de fluide de longueur L et de rayon r.

3.b. La résultante des actions visqueuses sur un cylindre de fluide de rayon r et de longueur L s'obtient en intégrant la relation (1.12.1) sur la surface latérale de ce cylindre (voir figure 1.12.2),

$$\vec{F}_{\text{visc}} = \int_{z=0}^{L} \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{d}\vec{F}_{\text{visc}} = 2\pi r L\, \eta \frac{\partial f}{\partial r}\, \vec{\mathrm{u}}_z\,.$$

Par ailleurs, le cylindre de fluide est soumis aux actions de pression sur ses faces $z = 0$ et $z = L$, soit

$$P(z=0)\, \pi r^2\, \vec{\mathrm{u}}_z - P(z=L)\, \pi r^2\, \vec{\mathrm{u}}_z\,.$$

On note $\vec{p}$ la quantité de mouvement du cylindre de fluide. On lui applique ensuite la loi de la quantité de mouvement,

$$P(z=0)\, \pi r^2\, \vec{\mathrm{u}}_z - P(z=L)\, \pi r^2\, \vec{\mathrm{u}}_z + 2\pi r L\, \eta \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\, \vec{\mathrm{u}}_z = \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{0}}\,.$$

Chaque particule de fluide du cylindre a un mouvement rectiligne uniforme, donc une quantité de mouvement constante. La quantité de mouvement $\vec{p}$ du cylindre, qui est, par construction, la somme de ces quantités de mouvement individuelles, est donc constante, d'où $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. En projection sur $\vec{u}_z$, il reste

$$\boxed{[P(0) - P(L)]\,\pi r^2 + 2\pi r L\,\eta\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0}\ .$$

3.c. Compte tenu de la condition d'adhérence du liquide aux parois ($f(R) = 0$), cette équation s'intègre en

$$f(r) = -\frac{P(0) - P(L)}{L}\,\frac{1}{4\eta}\,(r^2 - R^2)\,.$$

Le champ de vitesse s'écrit donc $\boxed{\vec{v} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\,(R^2 - r^2)\,\vec{u}_z}$.

4. Il a la même expression que celui étudié dans l'exercice 1.4 (voir page 4), en notant $v_0 \overset{\text{déf.}}{=} \frac{P_1 - P_2}{4\eta L}\,R^2$. On peut donc reprendre l'équation (1.4.1) (voir page 5) donnant le débit volumique, $D_\mathrm{v} = v_0\,\frac{1}{2}\,\pi R^2$, soit $\boxed{D_\mathrm{v} = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L}\,\pi R^4}$. Cette relation s'intitule loi de Hagen-Poiseuille, du nom des biologistes Hagen (allemand) et Poiseuille (français) qui ont travaillé dessus indépendamment vers 1840.
On peut dresser un tableau d'analogies entre la situation hydraulique et une résistance électrique R_el (voir tableau 1.12.1).

	Hydraulique	**Électrique**
Débit	D_v	i
Cause du débit	$P_1 - P_2$	$V_1 - V_2$
Loi associée	$P_1 - P_2 = R_\mathrm{hyd}\,D_\mathrm{v}$	$V_1 - V_2 = R_\mathrm{el}\,i$

Tableau 1.12.1. Analogies entre un résistor électrique et un tuyau parcouru par un écoulement laminaire.

L'identification entre la loi de Hagen-Poiseuille et la loi d'Ohm conduit à définir la résistance hydraulique du tuyau $\boxed{R_\mathrm{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}$.

MF310 – Vidange d'un récipient

a) La vitesse V dans le récipient doit être suffisamment faible. Par conservation du débit volumique,

$$VS = v\pi R^2$$

en notant v la vitesse dans le tuyau horizontal. Par ailleurs, toujours par conservation du débit volumique, cette vitesse est uniforme à un instant donné dans le tuyau. Ainsi, la condition $V \ll v$ revient à $S \gg \pi R^2$. Comme $S = 8.10^3$ cm^2 alors que $\pi R^2 \simeq 0{,}8$ cm^2, c'est bien le cas.

b) Déjà, la pression en sortie du tuyau est la pression atmosphérique, notée P_0.

En entrée, la pression est donnée par la loi de la statique des fluides :

$$\boxed{P_e = P_0 + \mu g h}.$$

c) Dans le cadre d'un écoulement laminaire stationnaire, la formule de Hagen-Poiseuille est valable :

$$\boxed{D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{P_e - P_s}{L} = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mu g h}{L}}.$$

d) Numériquement, $D_V = 2{,}2.10^{-5}$ m^3.s^{-1} à l'ouverture. Ensuite, comme h diminue, D_V et la vitesse débitante de sortie v diminuent aussi.

Comme $D_V = \pi R^2 v$, on obtient $v = 28$ cm.s^{-1}.

e) Le nombre de Reynolds est :

$$\boxed{\text{Re} = \frac{v 2 R \mu}{\eta} = 8{,}4 < 2\,000}.$$

L'écoulement est bien laminaire.

f) On effectue un bilan du volume de fluide dans le récipient. À l'instant t, le volume $V(t)$ dans la partie verticale du récipient est $V(t) = Sh(t)$. Ce volume diminue à cause de la partie d'écoulement dans la section horizontale, soit $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -D_V$. Le signe moins traduit que c'est une perte.

Ainsi,
$$S\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{\mu g h(t)}{L}$$

soit encore :
$$\dot{h} + \frac{h}{\tau} = 0$$

avec $\boxed{\tau = \frac{8 S \eta L}{\pi R^4 \mu g}}$.

g) La solution est de la forme $h(t) = h \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. La durée de vidange est de :

$$\boxed{t_{1/2} = \tau \ln 2 \simeq 21 \text{ h.}}$$

L'écoulement est très visqueux, ce qui explique cette longue durée.

MF311 – Ecoulement du Ketchup

1. L'écoulement étudié est un écoulement stationnaire : l'accélération locale d'une particule de fluide est nulle. Il est aussi parallèle : l'accélération convective est aussi nulle. Le mouvement de la particule de fluide considéré est vertical. On ne considère donc que les actions mécaniques verticales qui s'exercent sur la particule de fluide :

• le poids $2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mu g\vec{u}_z$;

• les forces de pression $\left(2\pi r\mathrm{d}rp(r,z) - 2\pi r\mathrm{d}rp(r,z+\mathrm{d}z)\right)\vec{u}_z = \vec{0}$ car la pression ne dépend pas de z.

• les forces de viscosité $\left(2\pi r\mathrm{d}z\sigma(r) - 2\pi(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}z\sigma(r+\mathrm{d}r)\right)\vec{u}_z$.

En projection sur l'axe $\vec{u}_z$, l'équation du mouvement se réduit à :

$$0 = 2\pi r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mu g - \sigma(r+\mathrm{d}r)2\pi(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}z + \sigma(r)2\pi r\mathrm{d}z\,.$$

Finalement, on arrive à :

$$\frac{\mathrm{d}(r\sigma)}{\mathrm{d}r} = \mu g r\,.$$

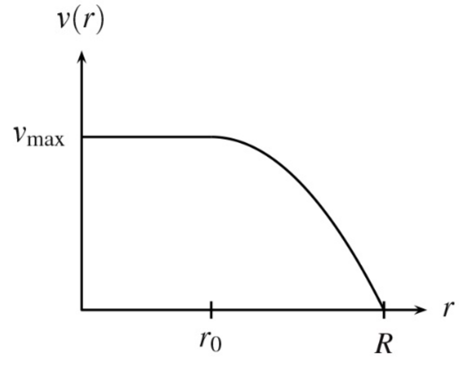
2. Par intégration, on arrive à : $r\sigma(r) = \dfrac{1}{2}\mu g r^2 + A$. Comme $\sigma(0)$ ne diverge pas, alors on a $A = 0$: $\sigma(r) = \dfrac{1}{2}\mu g r$.

3. La contrainte de cisaillement $\sigma(r)$ dépasse la contrainte seuil σ_0 pour $r \geq \dfrac{2\sigma_0}{\mu g}$. On pose $r_0 = \dfrac{2\sigma_0}{\mu g}$. Pour $r_0 \leq r \leq R$, on a $\sigma(r) \geq \sigma_0$, donc : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \dfrac{\sigma_0 - \sigma(r)}{\eta} = -\mu g\dfrac{r-r_0}{2\eta}$, ce qui donne, compte tenu de la condition aux limites $v(r=R) = 0$:

$$v(r) = \frac{\mu g}{4\eta}(R-r_0)^2 - \frac{\mu g}{4\eta}(r-r_0)^2\,.$$

Pour $r \leq r_0$, on a $v(r) = \mathrm{cste}$. La continuité des vitesses en $r = r_0$, donne : $v(r) = \dfrac{\mu g}{4\eta}(R-r_0)^2$.

L'allure du champ des vitesses est le suivant :



Au centre de l'écoulement, la vitesse sature à une valeur maximale, car les contraintes de cisaillement ne parviennent pas à déformer suffisamment le fluide, il s'écoule en bloc. On parle d'écoulement bouchon.

4. Lorsque $r_0 > R$, nulle part la contrainte de cisaillement ne dépasse la contrainte seuil. Alors $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$ dans tout le tube. Comme $v(r=R) = 0$, on a $v(r) = 0$ quel que soit r. Le fluide ne parvient pas à s'écouler. Le rayon minimal pour que le fluide puisse s'écouler est r_0. Pour le ketchup, avec les valeurs proposées, on a r_0 de l'ordre de la dizaine de millimètres, ce qui ne semble pas incompatible avec le tube que l'auteur tient sous ses yeux…

MF312 – Viscosimètre à boules

1) Dans un tube capillaire, le débit volumique est donné par

$$D_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\Delta P = \alpha \frac{\Delta P}{\eta}.$$

La force imposant le mouvement du fluide à travers le capillaire est directement fonction de l'écart de pression ΔP dû à une hauteur donnée de fluide, donc directement proportionnelle à la masse volumique ρ.

Le débit volumique à travers ce capillaire à nombre de Reynolds très faible est constant au cours du temps. Le temps τ de l'expérience est inversement proportionnel au débit volumique.

Cela donne $\tau = \dfrac{K}{D_v} = \beta \dfrac{\eta}{\rho}$, où β est une constante de l'expérience indépendante du fluide. On a donc :

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\rho_1 \tau_1}{\rho_2 \tau_2}.$$

2) L'application numérique donne :

$$\eta_{\text{acétone}} = \eta_{\text{eau}} \frac{\rho_{\text{acétone}}\tau_{\text{acétone}}}{\rho_{\text{eau}}\tau_{\text{eau}}} = 0{,}328.10^{-3}\ \text{Pl}.$$