

MF3 – Equations locales de la dynamique des fluides

4.3.3 Équations dynamiques locales		
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	On va combiner les cours MF1 et MF2 pour obtenir l'équation de Navier-Stokes.
Notion d'écoulement parfait et de couche limite.	Exploiter l'absence de forces de viscosité et le caractère isentropique de l'évolution des particules de fluide. Utiliser la condition aux limites sur la composante normale du champ des vitesses.	On a déjà vu l'essentiel dans MF2.
Relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser la relation de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène dans le champ de pesanteur uniforme dans un référentiel galiléen.	On n'oubliera pas les conditions d'applications du théorème de Bernoulli.

I – Equation de Navier-Stokes

I-1) Expression

Ecrivons la deuxième loi de Newton, dans le référentiel d'étude R. On se place dans le cas d'un écoulement incompressible d'un fluide newtonien. Pour une particule de fluide de volume $d\tau$:

$$\frac{D\vec{p}}{Dt} = \overrightarrow{dF} \Leftrightarrow \mu d\tau \frac{D\vec{v}}{Dt} = \overrightarrow{f_v} d\tau - \overrightarrow{grad} p d\tau + \eta \overrightarrow{\Delta v} d\tau$$

$$\text{Or : } \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v}$$

Pour un écoulement incompressible d'un fluide newtonien, on vérifie l'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = \overrightarrow{f_v} - \overrightarrow{grad} p + \eta \overrightarrow{\Delta v}$$

$$\text{ou } \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) = \overrightarrow{f_v} - \overrightarrow{grad} p + \eta \overrightarrow{\Delta v}$$

$\overrightarrow{f_v}$: forces volumiques qui contient la pesanteur et les forces d'inertie...

I-2) Analyse dimensionnelle

L'équation de NS peut s'écrire si $\vec{v} = v_x \vec{u}_x$ et si $\vec{f}_v = -\mu g \vec{u}_z$:

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \underbrace{\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}_{\text{convectif}} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{f}_v + \underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{diffusif}}$$

On utilise l'analyse par ordre de grandeurs afin de comparer les termes diffusifs et convectifs.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \Delta v \rightarrow \eta U / L^2 \\ \mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \rightarrow \mu \frac{U^2}{L} \end{array} \Rightarrow R_e = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\mu U L}{\eta}$$

Le nombre de Reynolds permet de comparer le terme convectif et le terme diffusif.

$$R_e = \frac{\underbrace{\mu (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}}_{\text{convectif}}}{\underbrace{\eta \Delta \vec{v}}_{\text{diffusif}}} = \frac{\mu U L}{\eta}$$

- Pour les nombres de Reynolds faibles, les phénomènes de diffusion dominant. Ce sont des termes linéaires donc on aura un écoulement linéaire.
- Pour les nombres de Reynolds élevés, ce sont les phénomènes de convection qui dominant. Ce sont des termes non linéaires, il y aura plutôt un écoulement instable et turbulent

I-3) Conditions aux limites

a) Ecoulement réel

Dans le cas d'un écoulement parfait, on néglige les effets de d'irréversibilité donc de diffusion, par conséquent $\eta \rightarrow 0$ et $R_e \rightarrow \infty$.

Dans le cas réel, les forces de viscosité se concentrent dans la

couche limite. On décompose alors l'étude de l'écoulement en deux parties :

- Ecoulement parfait en dehors de la couche limite.
- Ecoulement visqueux dans la couche limite.

Écoulement parfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta \rightarrow 0 \text{ et } R_e \rightarrow \infty \\ \text{couche limite d'épaisseur nulle} \\ \text{Evolution isentropique} \end{array} \right.$$

Écoulement réel :

- Ecoulement parfait en dehors de la couche limite.
- Ecoulement visqueux dans la couche limite.

b) Continuité de la vitesse

Dans le chapitre MF1 on a vu que la composante de la vitesse normale était continue dans le cas de fluide parfait.

Si les fluides sont visqueux, on doit ajouter une condition de non glissement d'un fluide sur l'autre, ce qui se traduit par la continuité tangentielle de la vitesse.

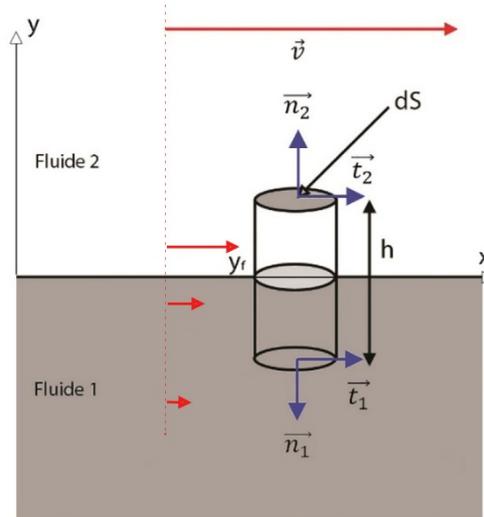
Pour des fluides parfaits on a continuité de la composante normale de la vitesse :

- Interface fluide/Solide : $\vec{v}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{paroi} \cdot \vec{n}$
- Interface fluide1/fluide 2 : $\vec{v}_{fluide1} \cdot \vec{n} = \vec{v}_{fluide2} \cdot \vec{n}$

Pour des fluides visqueux (réels) on a continuité de la vitesse :

- Interface fluide/Solide : $\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$
- Interface fluide1/fluide 2 : $\vec{v}_{fluide1} = \vec{v}_{fluide2}$

c) Continuité de la contrainte



À l'interface entre deux fluides, le fluide 1 situé en $y > 0$ exerce sur le fluide 2 situé en $y < 0$ une force de viscosité de cisaillement :

$$\vec{dF}_{1/2} = \eta_1 dS \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^+} \vec{u}_x$$

Le fluide 2 quant à lui exerce une force de cisaillement :

$$\vec{dF}_{2/1} = -\eta_2 dS \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^-} \vec{u}_x$$

Par la loi des actions réciproques ces deux forces doivent être opposées, par conséquent on peut en déduire :

$$\eta_2 dS \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^-} = \eta_1 dS \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^+}$$

A la traversée d'une interface entre 2 fluides non miscibles on a :

- Continuité de la contrainte normale : $p_1(y_f^-) = p_2(y_f^+)$
- Continuité de la composante tangentielle.
 - o Dans le cas de fluide newtoniens :

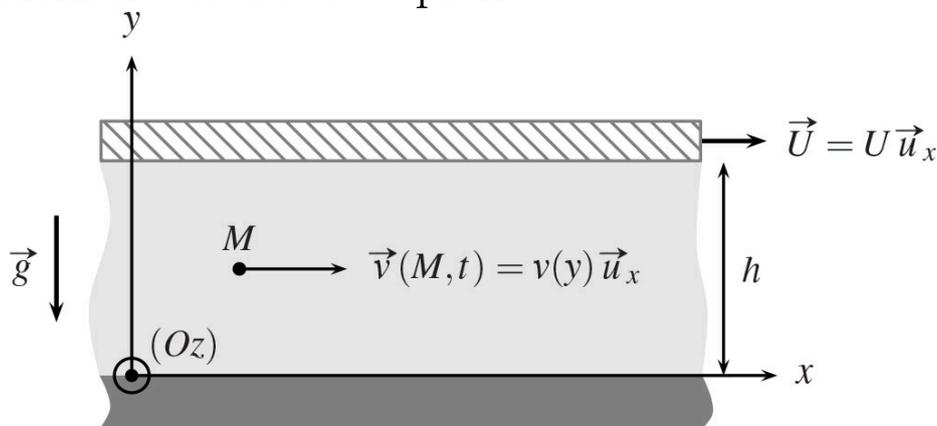
$$\eta_2 \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^-} = \eta_1 \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0^+}$$

d) Tableau récapitulatif

Interface	Fluide parfait	Fluide visqueux
Fluide \rightarrow Paroi	$v_{n,fluide} = v_{n,paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$	$\vec{v}_{fluide} = \vec{v}_{paroi}$ $p_{fluide} = p_{paroi}$
Fluide 1 \rightarrow Fluide 2	$v_{n,fluide1}$ $= v_{n,fluide2}$ $p_{fluide1} = p_{fluide2}$	$\vec{v}_{fluide1} = \vec{v}_{fluide2}$ $p_{fluide1} = p_{fluide2}$ $\eta_2 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big _{y=0^-} = \eta_1 \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big _{y=0^+}$

I-4) Exemples d'application

a) Ecoulement de Couette plan



Le système étudié est invariant par translation selon (Oz) . Une plaque entraînée à la vitesse $\vec{U} = U \vec{u}_x$ entraîne une couche de fluide, d'épaisseur uniforme h . Aucune force n'est appliquée au fluide, qui est seulement soumis à l'action de la pesanteur et de la plaque. On se place en régime stationnaire. On cherche une solution de l'équation de Navier-Stokes sous la forme : $\vec{v} = v(x, y, t) \vec{u}_x$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecoulement incompressible : } \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x = v_x(y) \\ \text{Ecoulement stationnaire : } \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

L'équation de Navier-Stokes :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = \overrightarrow{f_v} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \overrightarrow{\Delta v}$$

se simplifie en :

$$\Rightarrow \mu v_x \cdot \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} \overrightarrow{u_x} = -\mu g \overrightarrow{u_y} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \overrightarrow{u_x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} & (1) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu g & (2) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow p = p(x, y) \end{cases}$$

(2) se résout ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_x &= -\mu g \\ \Rightarrow p(x, y) &= -\mu g y + f(x) \end{aligned}$$

Or le système présente une invariance par translation selon (Ox) :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(y) &= -\mu g y + cste \\ \Rightarrow p(y) &= -\mu g y + p(0) \end{aligned}$$

Donc (1) se résout :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = Ay + B$$

Le fluide étant visqueux (réel) :

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 = B \\ v_x(h) = Ah + B = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{U}{h} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{U}{h} y \overrightarrow{u_x}$$

D'où la force exercée par le fluide sur la plaque :

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{plaque}} = -\eta S \frac{\partial v_x}{\partial y} \overrightarrow{u_x} = -\frac{\eta S U}{h} \overrightarrow{u_x}$$

L'opérateur devra exercer une force constante pour s'opposer à cette force de frottement fluide.

b) Écoulement de Poiseuille



L'écoulement de Poiseuille correspond à l'écoulement d'un fluide réel à l'intérieur d'une conduite cylindrique de rayon R . L'axe de symétrie de révolution de la conduite est (Oz) . Pour forcer le liquide à s'écouler, un opérateur impose :

$$\begin{cases} p_e = p(0) \\ p_s = p(L) < p_e \end{cases} \text{ avec } \Delta p = p_e - p_s > 0$$

Hypothèses :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Écoulement incompressible} \\ \text{Écoulement stationnaire} \\ \text{pesanteur négligée} \\ \vec{v}(M, t) = v(r)\vec{u}_x \Rightarrow \Delta v_x = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \end{array} \right.$$

L'équation de NS se simplifie en :

$$\begin{cases} \mu v_x \frac{\partial v(r)}{\partial x} \vec{u}_x = -\vec{\text{grad}} p + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \vec{u}_x \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \text{ et } 0 = -\frac{\partial p}{\partial \theta} \end{array} \right. \end{cases}$$

Donc p ne dépend que de x et v dépend que de r donc :

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) \Leftrightarrow F(x) = G(r)$$

Comme x et r sont deux variables indépendantes, chacune de ces deux fonctions est nécessairement égale à une constante, indépendante de r et de x , que nous notons K :

$$\frac{dp}{dx} = K \Rightarrow p(x) = Kx + B$$

$$\text{Or : } \begin{cases} p(0) = p_e \\ p(L) = p_s \end{cases} \Rightarrow p(x) = \frac{p_s - p_e}{L} x + p_e$$

D'où :

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{L}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{dv_x}{dr} \right) = - \frac{\Delta p}{\eta L} r$$

$$\Rightarrow r \frac{dv_x}{dr} = - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dr} = - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r}{2} + \frac{C}{r}$$

$$\Leftrightarrow v_x = - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{4} + C \ln(r) + D$$

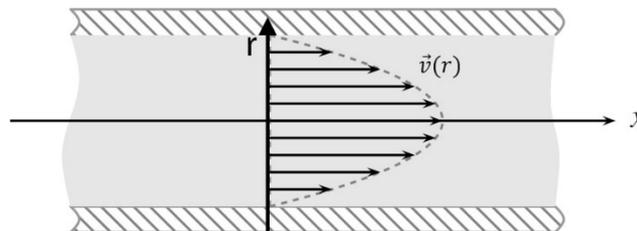
Or $\ln(r)$ diverge en $r=0$ donc $C=0$ d'où :

$$v_x = - \frac{\Delta p}{\eta L} \frac{r^2}{4} + D$$

Les parois étant immobiles :

$$v(R) = 0 \Rightarrow v_x = - \frac{\Delta p}{4 \eta L} (r^2 - R^2)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(r) = \frac{\Delta p}{4 \eta L} (R^2 - r^2) \vec{u}_x$$



c) Loi de Hagen-Poiseuille

Calculons le débit volumique du fluide dans l'écoulement de Poiseuille :

$$D_v = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2) \cdot \underbrace{r dr d\theta}_{\text{couronne cylindrique}}$$

$$\Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{4\eta L} 2\pi \left(R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\Delta p}{2\eta L} \frac{\pi R^4}{4}$$

On fait l'analogie avec la loi d'ohm en électrocinétique :

$$I = \frac{U}{R} \Leftrightarrow D_v = \frac{\Delta p}{R_h} \text{ où } R_h = \text{résistance hydraulique}$$

Dans un écoulement incompressible et stationnaire le débit dans une conduite cylindrique vérifie la loi de Hagen-Poiseuille :

$$D_v = \frac{\Delta p}{R_h} = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p \text{ où } R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

La résistance hydraulique augmente fortement lorsqu'on diminue le rayon. Ceci entraîne de sévères limitations dans le développement actuel de la micro fluidique. Il faut en effet 10000 tubes de 1 mm de rayon pour obtenir le même débit volumique qu'avec un seul tube de rayon égal à 1 cm.

A haute vitesse d'écoulement, l'écoulement devient turbulent, en effet :

$$R_e = \frac{\mu U(2R)}{\eta} = \frac{2\mu v_m R}{\eta} \text{ où } \underbrace{v_m}_{\text{vitesse débitante}} = \frac{D_v}{\pi R^2}$$

$$\Leftrightarrow R_e = 2 \frac{v_m R}{\nu} < R_{ec} \sim 2000 \Rightarrow v_m < \frac{\nu \times R_{ec}}{2R} \sim 0,1 \text{ ms}^{-1}$$

Au-dessus de cette vitesse le régime devient turbulent et notre loi de Hagen-Poiseuille n'est plus applicable sur cette conduite.

II – Théorème de Bernoulli

II-1) Equation d'Euler

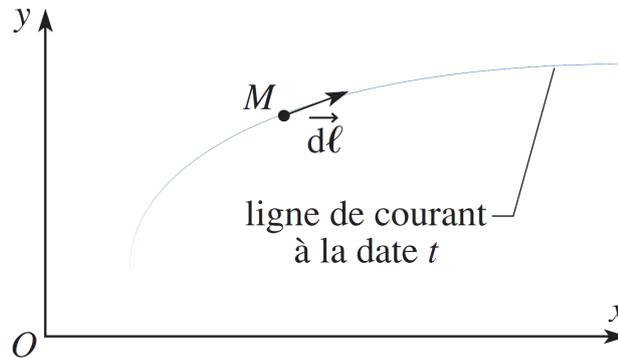
On se place dans le cas d'un écoulement parfait : la viscosité est négligée. L'équation NS devient l'équation d'Euler :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad} p$$

II-2) Démonstration

a) Ecoulement tourbillonnaire

Considérons un écoulement parfait et tourbillonnaire on peut donc partir de l'équation d'Euler.



Intégrons l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant. Pour ce faire multiplions par un élément de longueur \vec{dl} .

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{dl} = \vec{f}_v \cdot \vec{dl} - \overrightarrow{grad} p \cdot \vec{dl}$$

Or : $\left((\overrightarrow{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v} \right) \cdot \vec{dl} = 0$ car $\vec{dl} = \vec{v} dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{dl} = \frac{\vec{f}_v}{\mu} \cdot \vec{dl} - \frac{\overrightarrow{grad} p}{\mu} \cdot \vec{dl}$$

On suppose que les forces massiques dérivent d'une énergie potentielle d'où :

$$\frac{\vec{f}_v}{\mu} = \vec{f}_m = -\overrightarrow{grad} e_p = -\overrightarrow{grad} (gz) \text{ pour la pesanteur}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{dl} + \overrightarrow{grad} \left(\frac{v^2}{2} + e_p \right) \cdot \vec{dl} = -\frac{\overrightarrow{grad} p}{\mu} \cdot \vec{dl}$$

On rajoute les hypothèses d'écoulement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{Stationnaire} : \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \textit{ et } \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \\ \textit{Fluide homogène} : \frac{\overrightarrow{\text{grad}} p}{\mu} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{p}{\mu} \right) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow d \left(\frac{v^2}{2} + e_p + \frac{p}{\mu} \right) = 0$$

Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, tourbillonnaire d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on vérifie le théorème de Bernoulli, le long d'une ligne de courant :

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$$

où A et B appartiennent à la même ligne de courant.

On retrouve incompressible dans l'énoncé car un écoulement stationnaire d'un fluide homogène est incompressible.

b) Ecoulement irrotationnel

On considère un écoulement répondant aux hypothèses suivantes :

- L'écoulement est parfait ;
- L'écoulement du fluide homogène est stationnaire et incompressible ;
- L'écoulement est irrotationnel ;
- Le fluide n'évolue que sous l'action des forces de pression et du champ de pesanteur uniforme.

Compte tenu de ces hypothèses, dans le référentiel d'étude R galiléen, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{aligned}\mu \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \overrightarrow{f_v} - \overrightarrow{\text{grad}} p \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} \right) &= \frac{\overrightarrow{f_v}}{\mu} = -\overrightarrow{\text{grad}} e_p \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left(\mu \frac{v^2}{2} + p + e_p \right) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Dans un écoulement parfait, incompressible, stationnaire, irrotationnel d'un fluide homogène évoluant dans le champ de pesanteur, on vérifie le théorème de Bernoulli (1738) :

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} + gz &= \text{cste si } z \text{ ascendant} \\ \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\mu} - gz &= \text{cste si } z \text{ descendant}\end{aligned}$$

c) Ecoulement lent d'un fluide compressible

Revenons sur la condition d'incompressibilité qui ne s'applique pas à l'air par exemple. Pour les écoulement parfaits les transformations sont isentropiques, introduisons le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_s$$

Supposons qu'il soit possible de négliger les variations de μ pour une vitesse v variant entre 0 et v_{max} . Dans ce cas la relation de Bernoulli est applicable tel que :

$$\frac{p_{max}}{\mu} = \frac{p_{min}}{\mu} + \frac{v_{max}^2}{2} \Rightarrow \Delta p = p_{max} - p_{min} = \frac{\mu v_{max}^2}{2}$$

Or pour de faibles variations de μ , on a :

$$\chi_s \sim \frac{1}{\mu} \frac{\Delta \mu}{\Delta p} \Rightarrow \Delta \mu \sim \mu \Delta p \chi_s \ll \mu$$

$$\Rightarrow \Delta p \chi_s \ll 1 \Rightarrow \frac{\mu v_{max}^2}{2} \chi_s \ll 1$$

$$\Rightarrow v_{max}^2 \ll \frac{2}{\mu \chi_s}$$

On admettra, pour le moment que la célérité du son s'écrit :

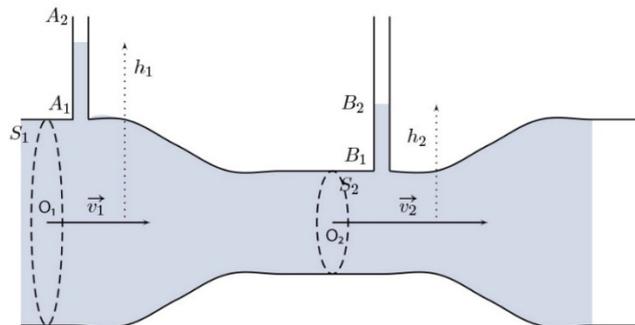
$$c^2 = \frac{1}{\mu \chi_s}$$

L'équation de Bernoulli est applicable pour un fluide compressible si : $v \ll c_{son}$

III – Applications

III-1) Effet Venturi

a) Principe



Un écoulement stationnaire homogène et incompressible, soumis aux seules forces de pression, est limité par une conduite de section variable. L'écoulement étant incompressible, le débit volumique se conserve :

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$$

L'application de la relation de Bernoulli, le long de la ligne de courant entre O_1 et O_2 entraîne :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\mu}$$

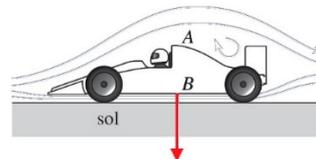
Si $S_1 > S_2$, alors $v_2 > v_1$ et $P_2 < P_1$.

Effet Venturi :

Les régions de faible section, donc de grande vitesse, sont aussi des régions de basse pression.

b) Effet de sol

On utilise l'effet Venturi pour plaquer les voitures au sol, le rétrécissement de la section sous la voiture entraîne une baisse de pression sous la voiture :



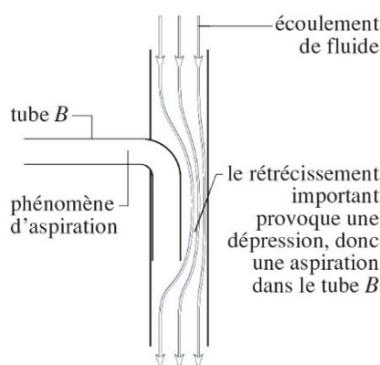
Effet de sol pour un véhicule de compétition : $P_A > P_B$.

c) Trompe à eau et vaporisateur

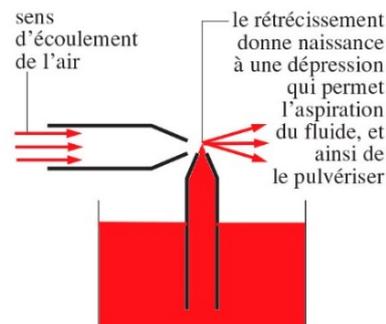
Une dépression est observée au niveau du rétrécissement d'une conduite : cet effet a de nombreuses applications. Citons, par exemple, la trompe à eau où un étranglement d'une conduite d'eau est relié à un récipient dans lequel on souhaite faire le vide.

Le principe des vaporisateurs et de certains pistolets à peinture est basé sur le même principe.

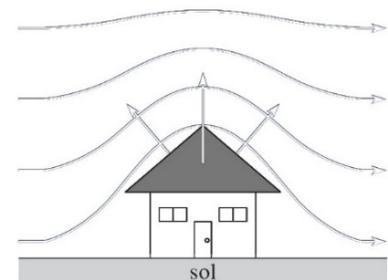
Soumis à un vent violent, le toit d'une maison peut se soulever pour les mêmes raisons. (Tornade...)



Principe de la trompe à eau.

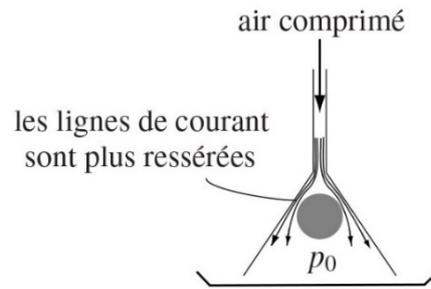


Principe de fonctionnement d'un vaporisateur ou d'un pistolet à peinture.



Les lignes de courant au voisinage d'un toit sont plus « serrées ». La pression sur le toit est plus faible que la pression à l'intérieur de la maison.

d) Balle de ping-pong



Posons une balle de ping-pong dans une coupelle, le tout étant surmonté d'un entonnoir renversé. Envoyons de l'air comprimé par le haut de l'entonnoir. La balle de ping-pong est aspirée et vient se coller contre le fond de l'entonnoir.

Nous pouvons interpréter cette expérience par le fait que l'air a moins de place pour passer entre la balle et le bord de l'entonnoir. Les lignes de courant sont donc plus resserrées à cet endroit-là que dans la partie évasée de l'entonnoir. La résultante des forces de pression sur la balle est dirigée vers le haut, ce qui peut suffire à compenser le poids et à la faire monter.

e) Débitmètre

On ajoute, à la conduite rétrécie envisagée précédemment, un capteur permettant la mesure de la différence de pression $P_1 - P_2$ entre un point situé en amont et le cœur de l'étranglement. On parle de manomètre différentiel.

On a vu :

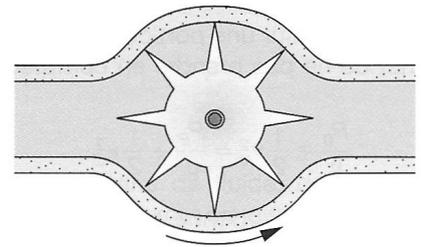
$$\begin{cases} v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} \\ \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\mu} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\mu} \end{cases}$$

La mesure de la dépression $P_1 - P_2$ donne ainsi une information sur la vitesse d'écoulement v_1 , loin de l'étranglement :

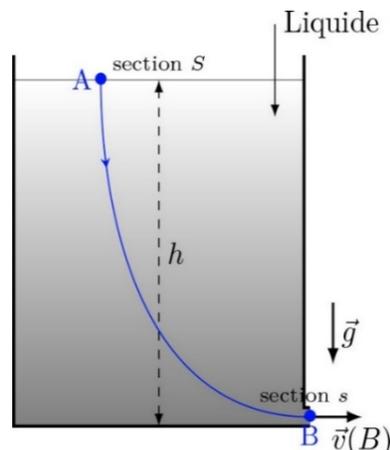
$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\mu} = \frac{v_1^2}{2} \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{p_2}{\mu} \Leftrightarrow v_1^2 = \frac{2}{\mu} \frac{p_2 - p_1}{1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow D_v = v_1 S_1 = S_1 \sqrt{2g \frac{h_1 - h_2}{\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1}} \text{ car } p_2 - p_1 = \mu g(h_2 - h_1)$$

De nombreux dispositifs sont alors basés sur la détection ou la mesure de ce débit, liés à cette différence de pression (le manomètre différentiel délivre généralement une grandeur électronique à traiter ensuite). On atteint couramment 2 % de précision, pour une perturbation induite sur l'écoulement bien moindre qu'avec un dispositif volumétrique, comme celui utilisé dans un compteur domestique de consommation d'eau ; Ce dernier perturbe en effet beaucoup l'écoulement.



III-2) Formule de Torricelli



Étudions la vidange d'un réservoir par une petite ouverture. Le fluide, supposé parfait et incompressible, s'écoule par un orifice de section s très inférieure à la section S du récipient. La hauteur de fluide comptée à partir de l'orifice de sortie est notée $h(t)$ à l'instant t . À l'instant initial, elle vaut h_0 .

A priori, l'écoulement n'est pas stationnaire. Nous allons

cependant comparer l'importance relative du terme local et du terme convectif dans l'expression de l'accélération d'une particule de fluide.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{v_0}{\tau} \\ \|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\| \sim \frac{v_0^2}{h_0} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\|} \sim \frac{h_0}{v_0 \tau}$$

On note v_0 l'ordre de grandeur du champ des vitesses et τ la durée caractéristique de variation temporelle de ce champ.

L'écoulement étant incompressible :

$$D_v = v_A S = v_B s \Rightarrow v_A = \left| \frac{dh}{dt} \right| = \frac{s}{S} v_B$$

En ordre de grandeur :

$$\frac{h_0}{\tau} \sim \frac{s}{S} v_0 \Rightarrow \frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}\|} \sim \frac{s}{S} \ll 1$$

On peut négliger l'accélération locale devant l'accélération convective. On dit que le régime est quasi-stationnaire.

Appliquons le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant AB reliant la surface libre au jet de sortie. Nous ne l'appliquons pas dans tout l'écoulement car au niveau de l'orifice de sortie le jet est sans doute tourbillonnaire.

$$\frac{v_A^2}{2} + gz_A + \frac{p_A}{\mu} = \frac{v_B^2}{2} + gz_B + \frac{p_B}{\mu}$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_A \ll v_B \\ p_B = p_0 \text{ (jet horizontal)} \\ p_A = p_0 \end{array} \right.$$

D'où :

$$g(z_A - z_B) = \frac{v_B^2}{2}$$

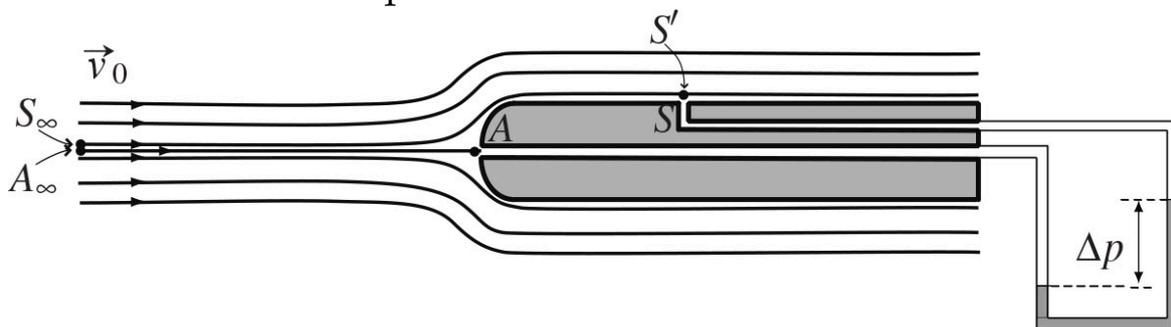
$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} : \text{Formule de Torricelli (1644)}$$

III-3) Tube de Pitot

Un capteur de vitesse très répandu est le tube de Pitot. Les fameuses sondes Pitot des Boeing ou Airbus :



La figure suivante montre un tube de Pitot placé dans un écoulement d'air permanent et uniforme, à la vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_x$, loin en amont du tube. On négligera l'influence de la pesanteur vu la faible taille du dispositif.



$$\text{Soit : } Re = \frac{UL}{\nu} = 300 \times \frac{0,2}{10^{-5}} = 6.10^6 \gg 1$$

Comme le nombre de Reynolds est très grand, tant que nous étudions l'écoulement en dehors de la couche limite, il est parfait. Nous supposons qu'il est permanent dans le référentiel lié au tube et que la vitesse de l'écoulement est faible devant celle du son dans le fluide pour pouvoir le considérer comme incompressible.

Toutes les conditions d'application du théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant sont vérifiées.

Appliquons-le dans un premier temps le long de la ligne de courant $A_\infty A$ où A_∞ est sur la ligne de courant arrivant au point d'arrêt A mais suffisamment loin du tube pour que la vitesse de l'écoulement y soit v_0 et la pression p_0 :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\mu} = \frac{p_A}{\mu} \text{ car } A \text{ point d'arrêt.}$$

Appliquons de nouveau le théorème de Bernoulli mais le long de la ligne de courant $S_\infty S'$ où S_∞ est sur la ligne de courant arrivant au point S' , proche de l'orifice S mais hors de la couche limite. Vu qu'on néglige la pesanteur $p_S = p_{S'}$ d'où :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\mu} = \frac{p_S}{\mu} + \frac{v_{S'}^2}{2}$$

Or : $v_{S'} = v_0$ car S' est assez éloigné de A .

$$\Rightarrow p_0 = p_S$$

Par conséquent on a accès à la vitesse du fluide grâce à la sonde :

$$\frac{v_0^2}{2} + \frac{p_S}{\mu} = \frac{p_A}{\mu} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu}(p_A - p_S)}$$