

MF2 - Actions mécaniques sur un fluide en mouvement

4.3.2 - Actions de contact dans un fluide en mouvement		
Forces de pression. Équivalent volumique.	Exprimer la force de pression exercée par un fluide sur une surface élémentaire. Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.	Retour sur la partie statique des fluides de PCSI.
Contraintes tangentielles dans un écoulement $\mathbf{v} = v_x(y) \mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité.	Utiliser l'expression fournie : $\overrightarrow{dF_t} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \overrightarrow{u_x}$	À retenir car souvent non rappelée dans les sujets.
Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Établir l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas d'un écoulement de cisaillement à une dimension et utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.	On prépare MF3 et l'équation de Navier-Stokes.
Traînée d'une sphère solide en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien : nombre de Reynolds ; coefficient de traînée C_x ; graphe de C_x en fonction du nombre de Reynolds.	Évaluer un nombre de Reynolds pour choisir un modèle de traînée linéaire ou un modèle de traînée quadratique.	Facile à retenir et souvent utilisé dans les exercices d'oraux.

I – Contraintes dans un fluide

I-1) Forces volumiques

Un élément de fluide de volume $d\tau$ est soumis à des forces volumiques : les forces de pesanteur par exemple. Ces actions sont ressenties par toutes les particules du fluide. Elles sont proportionnelles au nombre de particules, donc au volume élémentaire $d\tau$ considéré. Nous les écrirons sous la forme :

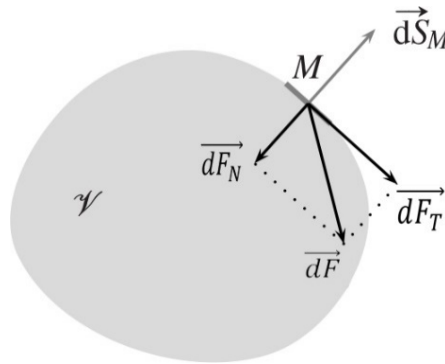
$$\overrightarrow{dF(M, t)} = \overrightarrow{f_v}(M, t) d\tau_M$$

Un élément de fluide de volume $d\tau_M$ est soumis à des forces à longue distance, de représentation volumique selon l'expression :

$$\overrightarrow{dF(M, t)} = \underbrace{\overrightarrow{f_v}(M, t)}_{N.m^{-3}} d\tau_M$$

Pour la pesanteur : $\overrightarrow{f_v} = \mu \vec{g}$

I-2) Forces surfaciques



Délimitons à l'intérieur d'un fluide une surface fictive fermée S . Que le fluide soit homogène ou non, les particules de fluide extérieures à S exercent des actions sur les particules intérieures, actions à courte portée et donc situées au voisinage de la surface S . Soit un élément de surface $\overrightarrow{dS_M}$ de S : la résultante des forces exercées par les particules externes sur les particules internes possède une composante normale et une composante tangentielle. Cette force élémentaire s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_N} + \overrightarrow{dF_T}$$

I-3) Forces de pression

a) Composante normale

Les forces de pression correspondent, en chaque point de la surface du volume V , à la composante normale de la force exercée par le fluide extérieur. Cette force est orientée vers l'intérieur du volume (le fluide extérieur « appuie » sur la surface).

À la surface d'un volume de fluide, le fluide extérieur exerce sur le fluide intérieur une force de pression, orthogonale à la surface :

$$\overrightarrow{dF_p} = \overrightarrow{dF_N} = \underbrace{-p(M, t)}_{Pa} \overrightarrow{dS_M}$$

b) Résultante des forces de pression

La résultante des forces de pression que le fluide extérieur exerce sur une surface S est :

$$\vec{F}_p = - \iint_{M \in S} p(M, t) \overrightarrow{dS}_M$$

Dans le cas où la surface est fermée et la pression uniforme on a donc :

$$\vec{F}_p = -p(t) \oint\!\!\!\oint_{M \in S} \overrightarrow{dS}_M$$

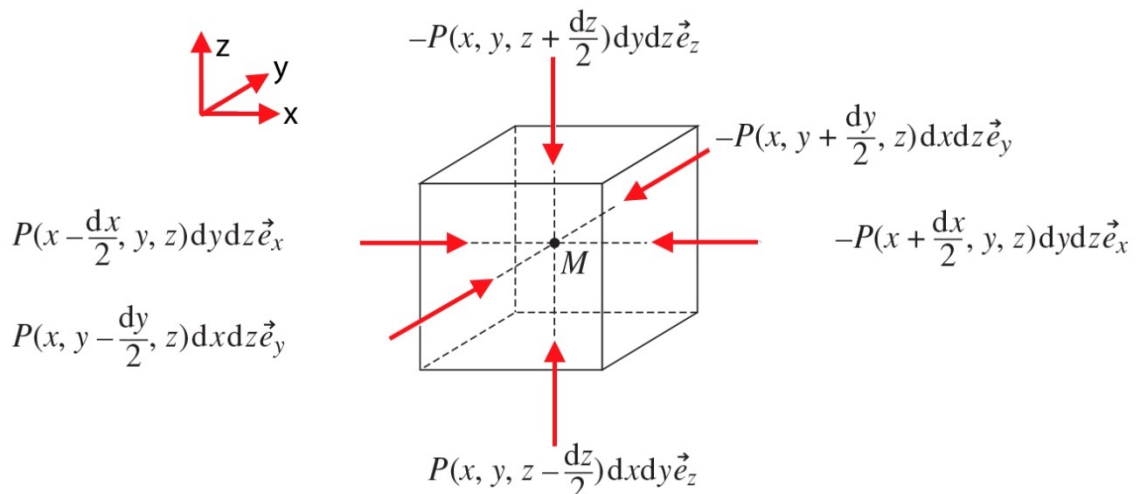
$$\text{Or : } \oint\!\!\!\oint_{M \in S} \overrightarrow{dS}_M = \vec{0}$$

(On peut le vérifier pour un cube où les 6 forces s'annulent deux à deux.)

La résultante des forces de pression qui s'exerce sur un volume est nulle lorsque la pression est uniforme à la surface de ce volume.

c) Equivalent volumique des forces de pression

On considère un élément de fluide mésoscopique, de forme parallélépipédique, de côtés dx , dy et dz respectivement parallèles aux axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , dont le centre est de coordonnées (x, y, z) .



On veut calculer la résultante $\overrightarrow{dF_p}$ des forces de pression exercées par le fluide qui l'entoure sur cet élément de fluide.

$\overrightarrow{dF_p}$ est la somme de six forces s'exerçant sur les six faces. La composante dF_{pz} , provient des forces s'exerçant sur les deux faces orthogonales à (Oz), qui ont pour surface $dS=dx dy$.

Elle s'écrit :

$$dF_{pz} = p\left(x, y, z - \frac{dz}{2}\right) dS - p\left(x, y, z + \frac{dz}{2}\right) dS$$

$$\Leftrightarrow dF_{pz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dS = -\frac{\partial p}{\partial z} d\tau$$

De la même manière on montre que :

$$dF_{py} = -\frac{\partial p}{\partial y} d\tau \text{ et } dF_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x} d\tau$$

Donc :

$$d\overrightarrow{F_p} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \overrightarrow{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y} \overrightarrow{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z} \overrightarrow{u_z}\right) d\tau = -\overrightarrow{grad p} d\tau$$

La résultante des forces de pression sur un volume mésoscopique $d\tau$ de fluide est donnée par la formule :

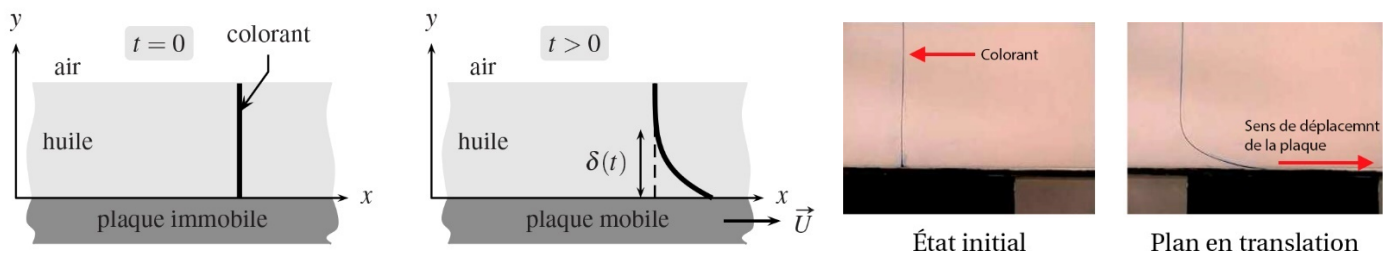
$$d\overrightarrow{F_p} = -\overrightarrow{grad p} d\tau = \overrightarrow{f_p} d\tau$$

$$\text{où } \overrightarrow{f_p} = -\overrightarrow{grad p}$$

$\overrightarrow{f_p}$ est la densité volumique de force équivalente aux forces de pression.

I-4) Forces de viscosité

a) Mise en évidence



On verse une couche d'huile de silicone dans le fond d'un récipient constitué d'une plaque solide qu'un opérateur extérieur peut entraîner. À l'aide d'une seringue, on dépose sur toute la hauteur de la couche d'huile une colonne de colorant. À l'instant $t=0$, l'opérateur commence à entraîner la plaque à une vitesse $U \vec{u}_x$ constante. Aucune autre force n'est exercée dans la direction horizontale.

On observe alors, pour $t > 0$, une déformation de la colonne de colorant qui s'étend sur une hauteur $\delta(t)$ comptée depuis la surface de la plaque. Au fur et à mesure que la plaque avance, on constate que $\delta(t)$ croît dans le temps. On constate que la colonne de colorant adhère à la paroi solide. On en déduit que la couche de fluide au contact de la plaque ne glisse pas sur la plaque, mais adhère à celle-ci : $\vec{v}(x, y = 0, t > 0) = U \vec{u}_x$

À un instant $t > 0$, suffisamment loin de la plaque, la colonne de colorant n'est pas encore déformée, et le fluide est encore immobile : $\vec{v}(x, y \rightarrow \infty, t > 0) = \vec{0}$

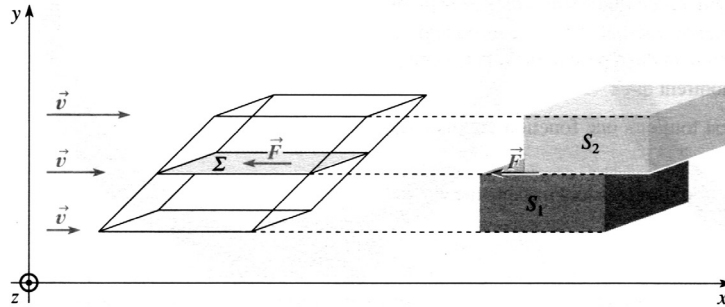
Ces conditions aux limites imposent au champ de vitesse de varier en fonction de y (il est aussi non stationnaire) :

$$\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{u}_x$$

C'est la différence de vitesse entre chaque couche (d'épaisseur dy) qui provoque un transfert de quantité de mouvement entre couches. Ce transfert de quantité de mouvement va entraîner ces forces de cisaillement.

b) Force surfacique

Considérons deux éléments de fluide, S_1 et S_2 , séparés par la surface Σ , d'aire dS , normale à (Oy) .



La force de cisaillement, exercée à travers Σ par S_1 sur S_2 , est tangente à Σ . Elle doit s'opposer au glissement de S_2 par rapport à S_1 . Elle est donc :

- Proportionnelle à S (aire de Σ) ;
- De sens opposé à $\vec{u}_x$ si $v_x(y, t)$ est une fonction croissante de y .

Si la force de cisaillement est une fonction linéaire de la dérivée $\frac{\partial v}{\partial y}$, le fluide est dit newtonien. Ce modèle est très satisfaisant pour la plupart des fluides.

Dans un écoulement de cisaillement $\vec{v}(M, t) = v_x(y, t) \vec{u}_x$ d'un fluide newtonien, la force tangentielle exercée sur un élément de surface dS est :

$$\vec{dF}_t = \pm \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} S \vec{u}_x \quad \text{où} \quad \underbrace{\eta}_{\substack{\text{Pa.s} \\ \text{ou Pl}}} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \sigma$$

- Dans notre cas on prendra le signe « + » pour l'action de la veine supérieure sur la veine inférieure.
- Cette force $\vec{dF}_t$ tend à accélérer les veines lentes, et à ralentir les veines rapides :
- Le coefficient η est appelée viscosité dynamique du fluide
- σ est appelée contrainte de cisaillement ($N.m^{-2}$).

c) La viscosité dynamique

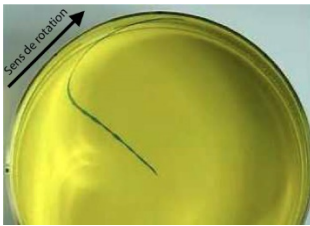
- La viscosité (dynamique) possède la dimension :

$$[\eta] = [F] \frac{L}{[v]} * \frac{1}{L^2} = \frac{[F]}{[S]} T = [Pression] T = ML^{-1}T^{-1}$$

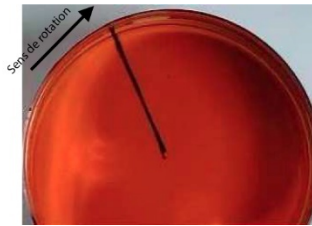
$$\Rightarrow [\eta] = Pa \cdot s \text{ ou } kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

Son unité dans le système international est donc le $kgm^{-1}s^{-1}$ mais on utilise plus communément le $Pa \cdot s$. Dans le monde industriel le $Pa \cdot s$ est souvent appelé poiseuille (Pl). Par définition, pour un fluide newtonien, la viscosité est indépendante du taux de cisaillement $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Elle dépend du fluide utilisé et est a priori fonction de la température et de la pression.

On observe l'entraînement en rotation d'un fluide dans un récipient cylindrique.



Si le fluide est peu visqueux
 $\Rightarrow$ la mise en mouvement est progressive



Si le fluide est très visqueux,
 la mise en mouvement se fait en bloc.

Suivant le type de fluide on remarque que le filet de colorant est plus au moins entraîné par la rotation du cylindre, c'est la valeur de la viscosité dynamique η qui est responsable de cette différence de comportement :

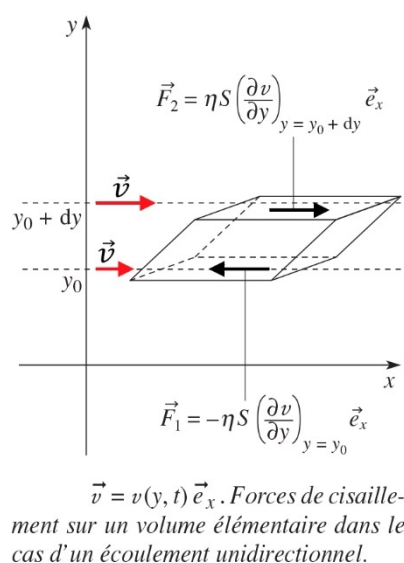
Fluide	air	eau	Huile 15W40 à 40°C	Glycérol	Miel	Magma
$\eta (Pa \cdot s)$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-3}$	0,1	1,5	10	10

Remarques :

- Un lubrifiant efficace doit pouvoir former un film suffisamment résistant entre deux surfaces de contact. Afin que ce soit le cas, le lubrifiant doit posséder une viscosité assez importante, afin de bien rester au contact des surfaces concernées.
- Les fluides non-newtoniens ont une viscosité « non constante ». Le caractère non newtonien le plus répandu est le fait que la viscosité dynamique d'un fluide soit dépendante du taux de cisaillement : le sang, les mélanges eau-fécule de maïs, le dentifrice... En général, la viscosité diminue lorsque le taux de cisaillement augmente (fluide rhéofluidifiant), comme dans le cas du sang.

d) Equivalent volumique

Comme nous l'avons fait pour la résultante des forces de pression, nous cherchons à calculer la résultante des forces de viscosité de cisaillement qui s'exercent sur une particule de fluide que l'on suppose située, à un instant t , entre x_0 et $x_0 + dx$, y_0 et $y_0 + dy$, z_0 et $z_0 + dz$



L'écoulement du fluide est un écoulement de cisaillement décrit par le champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$.

On suppose que les seules forces sont celles de cisaillement, dues à la viscosité. Alors, le système subit une force de la partie du fluide au-dessus, et une du fluide au-dessous :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dF_t} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}(y + dy, t) - \frac{\partial v_x}{\partial y}(y, t) \right) dx dz \overrightarrow{u_x} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{dF_t} &\sim \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \right) dS \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{dF_t} &= \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

Dans ce cas particulier on a :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \overrightarrow{u_x} = \Delta v_x \overrightarrow{u_x} = \vec{\Delta} \vec{v}$$

vu l'écriture de $\vec{v} = v_x(y, t) \overrightarrow{u_x}$.

On admettra la généralisation du résultat.

La résultante des forces de viscosité de cisaillement qui s'exerce, dans un écoulement incompressible d'un fluide newtonien, sur un volume de fluide $d\tau$ est :

$$\begin{cases} \overrightarrow{dF_t} = \eta \vec{\Delta} \vec{v} d\tau = \vec{f}_{visc} d\tau \\ \text{où } \vec{f}_{visc} = \eta \vec{\Delta} \vec{v} \end{cases}$$

$\vec{f}_{visc}$ est l'équivalent volumique des forces de viscosité de cisaillement.

e) Transport diffusif de quantité de mouvement

En appliquant la loi de la quantité de mouvement à la particule de fluide on obtient :

$$dm \frac{D\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{dF_t} + \underbrace{\overrightarrow{dF_p}}_{=\vec{0}}$$

Illustrons ce principe sur l'écoulement de cisaillement décrit par le champ de vitesse : $\vec{v} = v_x(y, t) \vec{u}_x$. Ainsi en projection sur $\vec{u}_x$:

$$\mu d\tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial x}}_{=0} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

ce qui correspond à une équation de diffusion de coefficient $\nu = \frac{\eta}{\mu}$.

Posons la quantité de mouvement volumique :

$$p_{x,v} = \mu v_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_{x,v}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_{x,v}}{\partial y^2}$$

La viscosité, dans un écoulement unidirectionnel, a pour effet d'accélérer les éléments lents et de freiner les éléments rapides. Il s'agit d'un transfert interne de quantité de mouvement dans la direction transverse à l'écoulement, selon un phénomène de diffusion caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \text{ ou } \frac{\partial p_{x,v}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 p_{x,v}}{\partial y^2} \\ \text{où } \nu = \frac{\eta}{\mu} : \text{viscosité cinématique } (D_{visco}) \end{array} \right.$$

II – Nombre de Reynolds

II-1) Comparaison convection/diffusion

On a vu que le terme associé à l'accélération convective peut s'écrire :

$$\mu \overrightarrow{a_{convection}} = \mu(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

Et que la force de viscosité volumique peut s'écrire à une dimension :

$$\overrightarrow{f_{v,x}} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \overrightarrow{u_x}$$

On peut ainsi réaliser une comparaison de ces deux termes en ordre de grandeur sans dimension :

$$\begin{cases} \text{force volumique convective} \sim \mu \frac{U^2}{L} \\ \text{force volumique diffusive} \sim \eta \frac{U}{L^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\mu}{\eta} UL$$

Ce rapport qu'on vient de construire s'appelle le nombre de Reynolds il traduit l'importance des deux termes diffusifs ou convectifs dans l'écoulement :

$$R_e = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\mu}{\eta} UL \text{ ou } \nu UL$$

II-2) Temps caractéristique

L'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Si on écrit cette équation en ordre de grandeur on a alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} \leftrightarrow \frac{V_x}{\tau_{diff}} \\ \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \leftrightarrow \nu \frac{V_x}{L^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{V_x}{\tau_{diff}} \sim \nu \frac{V_x}{L^2}$$

Alors, le temps τ_{diff} nécessaire pour une diffusion sur une distance L est :

$$\tau_{diff} = \frac{L^2}{\nu} = \frac{\mu L^2}{\eta}$$

Or le temps caractéristique de convection sur une distance L à la vitesse U peut s'écrire :

$$\tau_{conv} = \frac{L}{U}$$

Le nombre de Reynolds s'identifie alors au rapport :

$$Re = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\frac{1}{\tau_{conv}}}{\frac{1}{\tau_{diff}}}$$

En effet plus le phénomène de convection a un temps caractéristique court plus, celui-ci va s'installer rapidement par rapport au phénomène de diffusion.

$$\Rightarrow Re = \frac{\mu UL}{\eta} \text{ ou } \nu UL$$

Si $Re \ll 1$, le transfert de quantité de mouvement par diffusion est bien plus rapide que par convection : les effets visqueux dominent.

II-3) Écoulement laminaire ou turbulent

Le nombre de Reynolds permet d'évaluer l'importance relative du transport par convection ou diffusion, de la quantité de mouvement.

- Si $Re \ll 1$: le transport diffusif (viscosité) prédomine, on nomme ce type d'écoulement : écoulement laminaire
- Si $Re \gg 1$: le transport convectif prédomine, on nomme ce type d'écoulement : écoulement turbulent



On constate expérimentalement qu'un écoulement est :

- Laminaire pour $Re < 10$. (Filet d'eau à faible débit...)
- Turbulent pour $Re > 1000$. (Filet d'eau à haut débit...)
- Entre les deux : on ne peut le qualifier à l'aide du nombre de Reynolds...

Quelques types d'écoulement :

Écoulement	$\nu(m^2s^{-1})$	$\nu(ms^{-1})$	$L(m)$	Re	Type
Avion en vol	10^{-5}	300	30	10^9	Turbulent
Voiture dans l'air	10^{-5}	30	2	10^7	Turbulent
Nageur dans l'eau	10^{-6}	1	1	10^6	Turbulent
Marcheur dans l'air	10^{-5}	2	1	10^5	Turbulent
Têtard dans l'eau	10^{-6}	10^{-2}	10^{-3}	10	Laminaire
Coulée de lave	10^3	1	10	10^{-2}	Laminaire
Mouvement d'un glacier	10^8	10^{-7}	10^3	10^{-12}	Laminaire

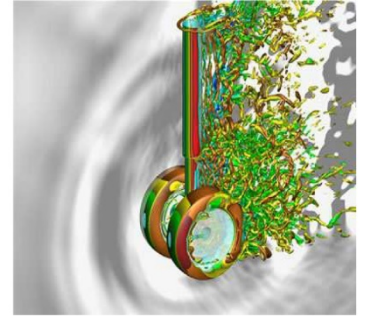
Quelques images d'écoulement turbulent :



traînée turbulente d'un ballon de foot

Panache volcanique turbulent présentant des remous de différentes échelles

Turbulence dans le cours d'une rivière



Structures turbulentes autour du train d'atterrissage Lagoon (simulation numérique)

II-4) Écoulement parfait

Un écoulement est parfait si tous les phénomènes diffusifs sont négligeables.

Pour une particule de fluide, cela correspond à négliger les phénomènes diffusifs :

- De quantité de mouvement : Absence de viscosité.
- De transfert thermique : Évolution adiabatique.

Un écoulement est parfait si tous les phénomènes diffusifs sont négligeables.

Un écoulement parfait évolue de manière adiabatique réversible.

II-5) Couche limite

a) Définition

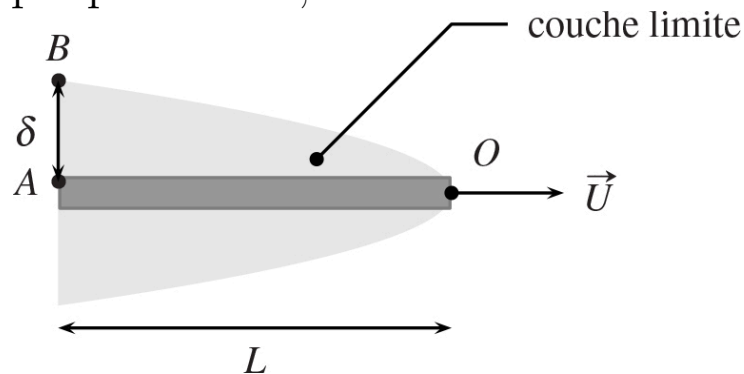
L'expérience présentée pour étudier la viscosité de cisaillement révèle l'existence d'une région de l'écoulement limitée au voisinage de la plaque où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement. Cette région est appelée couche limite visqueuse, ou plus simplement, couche limite. **La vorticité reste localisée dans la couche limite visqueuse** : elle est créée par le cisaillement

important à la surface de la plaque, qui résulte de l'adhérence du fluide à la plaque. En dehors de la couche limite visqueuse, l'écoulement n'est pas affecté par le mouvement de la plaque (le fluide y est quasiment immobile).

On appelle couche limite la région de l'écoulement, au voisinage d'une paroi, où la viscosité de cisaillement a une influence notable sur l'écoulement. C'est dans cette région que se concentre la vorticité ω générée par le cisaillement du fluide au contact de la paroi.

b) Epaisseur de la couche limite

La plaque mobile étudiée dans l'expérience précédente représente en fait un exemple d'objet se déplaçant dans un fluide visqueux. Envisageons une plaque mobile, dans un fluide immobile.



La couche limite étant liée à un phénomène de diffusion, on va écrire :

$$\delta = \sqrt{D_{diff} \tau}$$

Or la couche limite observée à l'arrière de la plaque (points A et B sur la figure) a commencé à se développer lorsque le point O (avant de la plaque) se trouvait au niveau du point A . Si l'on note t l'instant auquel la figure est représentée, la couche limite observée à l'arrière de la plaque a donc commencé à se développer à l'instant $t - \tau$ tel

que :

$$\tau = \frac{L}{U}$$
$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\nu \frac{L}{U}} = \frac{L}{\sqrt{\frac{UL}{\nu}}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

L'ordre de grandeur de l'épaisseur δ de la couche limite qui se développe à la surface d'un objet de taille caractéristique L placé dans un écoulement de vitesse U est donné par :

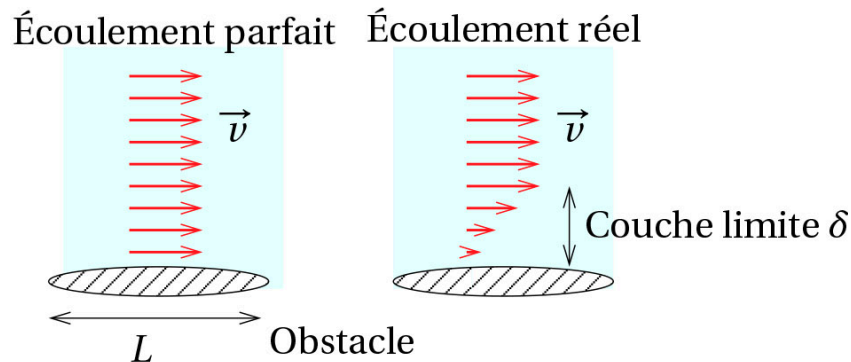
$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

- Si $Re \ll 1$: c'est le régime où les effets de viscosité dominent les effets de convection. On a $\delta \gg L$, cela signifie que la couche limite s'étend à tout l'écoulement. Autrement dit, la vorticité, générée par cisaillement sur les parois de l'obstacle, envahit tout l'écoulement. De fait, le concept de couche limite perd son sens dans cette situation.
- Si $Re \gg 1$: c'est le régime où les effets de la viscosité sont négligeables à l'échelle d'observation L . On obtient alors que $\delta \ll L$: la vorticité est confinée à la surface de l'obstacle. Dans l'écoulement extérieur à la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables devant les effets de convection. La frontière de la couche limite sépare un écoulement où la vitesse d'écoulement est proche de sa valeur U d'un écoulement fortement cisailé où la vitesse s'annule à la surface de l'obstacle.

La couche limite joue le rôle d'une zone d'adaptation où la vitesse du fluide passe d'une valeur nulle à la surface de l'obstacle à une valeur proche de U à l'extérieur.

c) Comportement de la couche limite

- Le modèle de l'écoulement parfait correspond à la limite où $\nu \rightarrow 0$. Dans cette limite, **l'épaisseur des couches limites tend vers zéro.**



- En général la couche limite à un comportement laminaire, cependant à très grand nombre de Reynolds elle peut devenir turbulente.
- Dans la couche limite, les effets de viscosité prédominent, au-delà ils sont négligeables et l'écoulement est celui d'un fluide parfait.

Application numérique :

Pour une aile d'avion pendant un vol :

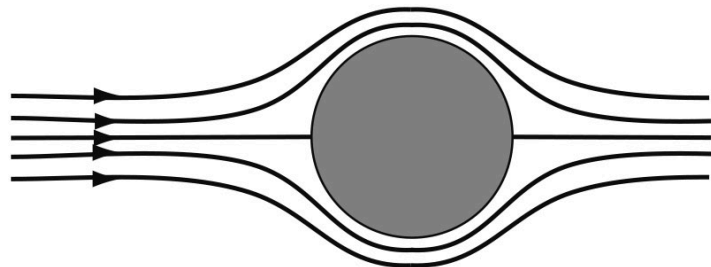
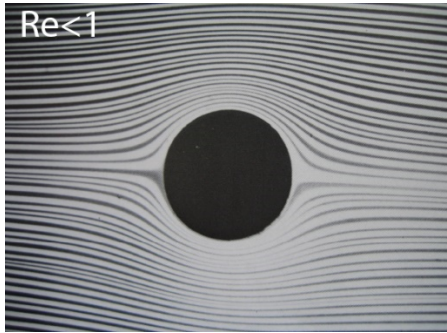
$$\begin{cases} L = 10m \\ v = 200ms^{-1} \\ \nu = 10^{-5}m^2s^{-1} \end{cases} \Rightarrow R_e = 200.10^6 \Rightarrow \delta = 0,7mm$$

L'épaisseur de la couche limite est très faible, ce qui permet de la négliger pour décrire l'écoulement du fluide.

III – Écoulement autour d'une sphère

III-1) Influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement

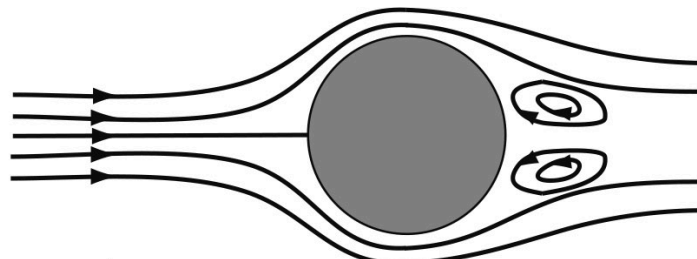
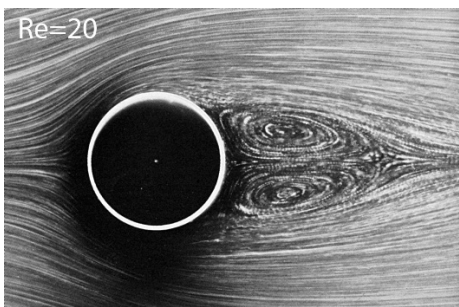
a) Si $Re < 1$



Écoulement autour d'une sphère, $Re < 1$

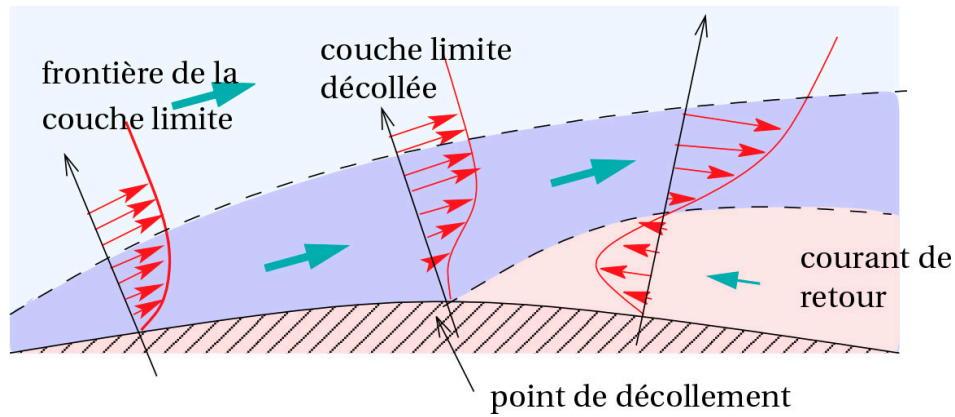
Les lignes de courant sont stationnaires et l'écoulement est partout laminaire. La couche limite reste en contact partout autour de la sphère. Elle est de très faible épaisseur. La dissipation visqueuse est essentiellement localisée dans la couche limite et reste donc limitée. En dehors de la couche limite, l'écoulement est proche de celui d'un fluide parfait.

b) Si $10 < Re < 100$

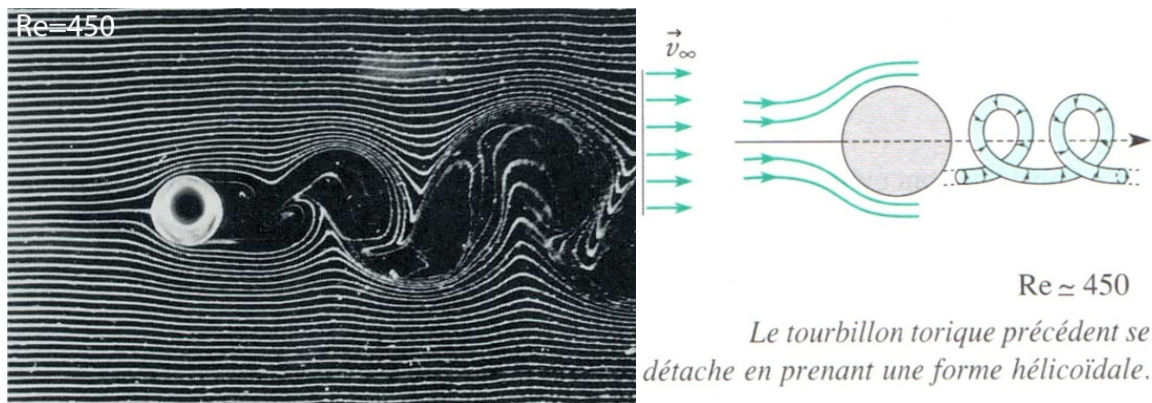


Écoulement autour d'une sphère, $Re \simeq 20$.

Il y a apparition d'un sillage constitué de zones de recirculation stationnaires en aval de la sphère. Ces tourbillons sont générés dans la couche limite. On remarque que la vitesse peut varier fortement et s'inverser de sens. La couche limite se décolle de la surface et devient turbulente. Le point de décollement se déplace vers l'amont lorsque Re augmente. On zoome sur la zone du décollement de la couche limite. En dehors de la couche limite, l'écoulement reste laminaire.

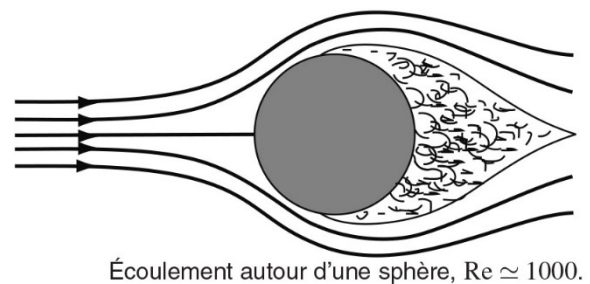
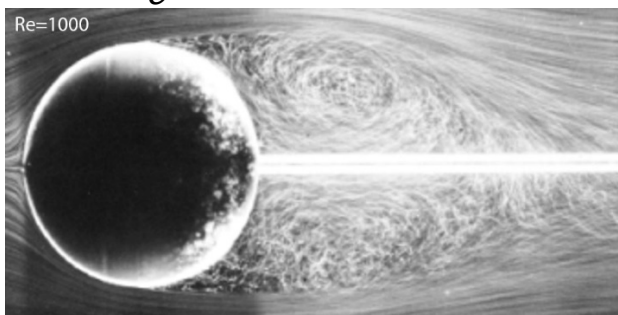


c) Si $100 < Re < 1000$:



Pour des nombres de Reynolds supérieurs des tourbillons se détachent de la sphère, formant ce que l'on appelle des allées de Bénard-Von Karman.

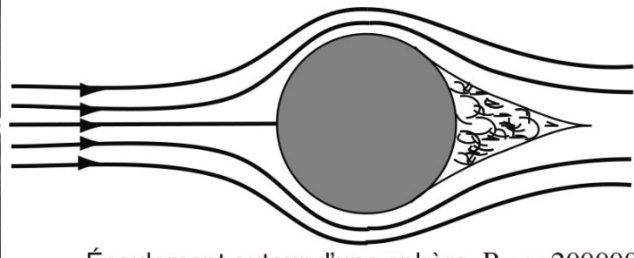
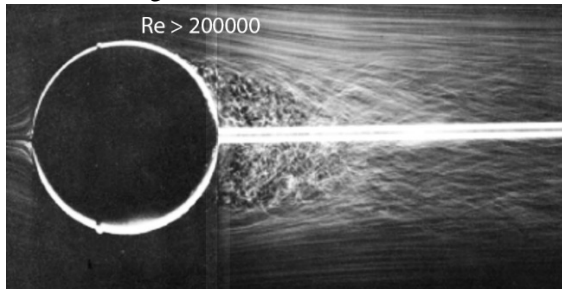
d) Si $Re > 1000$:



Écoulement autour d'une sphère, $Re \approx 1000$.

Quand le nombre de Reynolds atteint une valeur de l'ordre de 1000, on constate l'apparition derrière la sphère d'un large sillage turbulent où la dissipation d'énergie est importante. La couche limite est laminaire, mais la dissipation visqueuse est essentiellement localisée dans le sillage turbulent et augmente d'autant plus que le sillage est important.

e) Si $Re = 2.10^5$

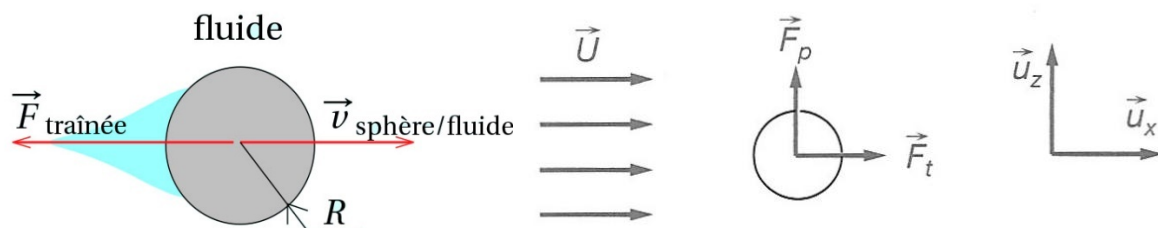


Écoulement autour d'une sphère, $Re \simeq 200000$.

Enfin, il existe une valeur particulière du nombre de Reynolds, proche de 200000, pour laquelle on observe une diminution importante de la taille du sillage turbulent. Cela se traduit par une diminution importante de l'énergie dissipée dans le sillage, et une diminution de la traînée. On appelle ce phénomène crise de traînée. On peut forcer son apparition pour des nombres de Reynolds plus faibles en plaçant des aspérités à la surface de la sphère. C'est le cas, par exemple, des balles de golf dont les aspérités permettent de réduire la force de traînée : moins freinée, la balle va plus loin. La couche limite devient turbulente.

III-2) Force de traînée

a) Définition



Considérons un objet qui se déplace dans un fluide à la vitesse $\vec{v}$. Loin de l'objet, le fluide est supposé au repos. Par un changement de référentiel, on peut se ramener à la situation d'un objet immobile placé dans un écoulement, dont la vitesse à l'infini est : $\vec{U} = -\vec{v}$

La force qu'exerce le fluide sur l'obstacle possède deux composantes :

- L'une, la traînée $\vec{F}_t$, est orientée dans le sens opposé à la vitesse de déplacement de l'objet.
- L'autre, la portance $\vec{F}_p$, est orientée dans la direction orthogonale à la vitesse $\vec{U}$ de l'objet.

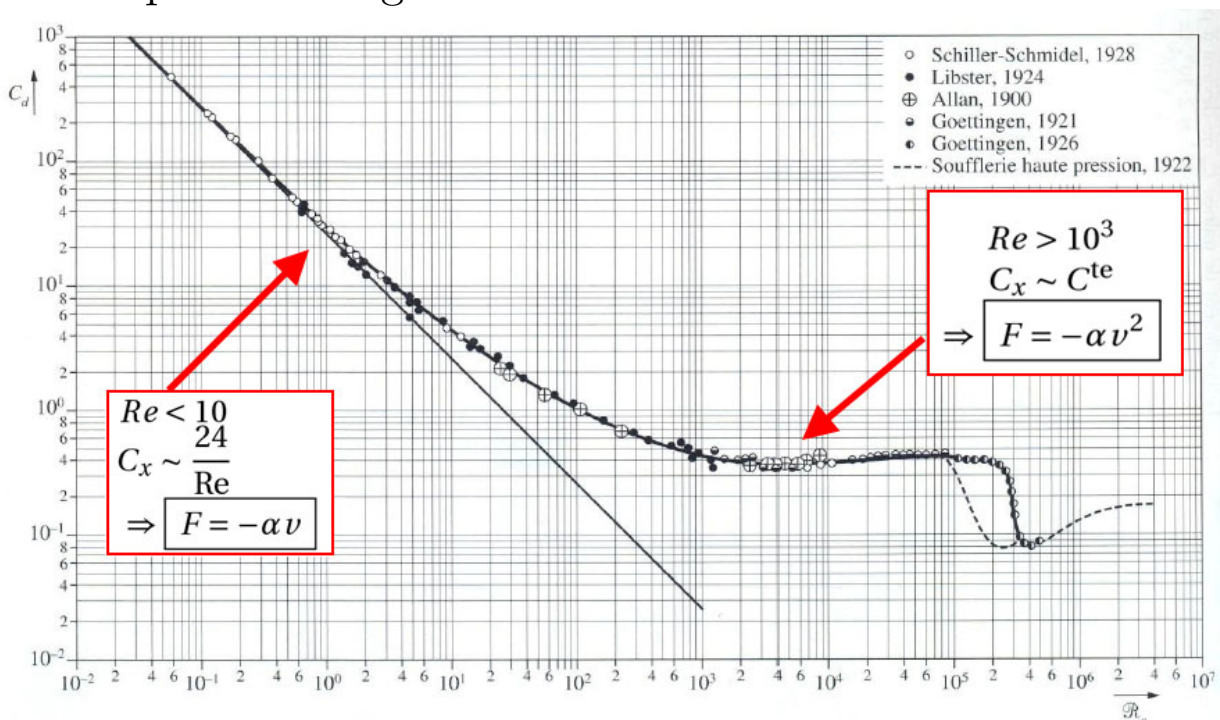
b) Coefficient de traînée

On effectue un raisonnement dimensionnel. On a déjà expliqué qu'une pression est homogène à $\frac{1}{2}\mu U^2$. Une force est homogène au produit d'une pression par une surface. La surface considérée ici est la section droite $S = \pi R^2$ de la sphère de rayon R. Ainsi, le rapport de la force de traînée F_t par $\frac{1}{2}\mu U^2 S$ est appelée coefficient C_x :

Le coefficient de traînée est défini par :

$$F_t = \frac{1}{2} C_x \mu U^2 S \Leftrightarrow C_x = \frac{F_t}{\frac{1}{2} \mu U^2 S}$$

où C_x ne dépend que de Re . Une investigation expérimentale mène aux résultats présentés sur la figure en échelles logarithmiques. On en déduit plusieurs régimes :



- A faible nombre de Reynolds ($Re < 10$), la variation de $\log(C_x)$, avec le logarithme du nombre de Reynolds est affine. L'équation précise en est $\log C_x = 1,38 - \log Re$, soit :

$$C_x = \frac{24}{Re}$$

En termes de force, cette loi s'exprime comme :

$$\begin{cases} C_x = 24/Re \\ F_t = \frac{1}{2} C_x \mu U^2 S \Rightarrow \vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu \frac{24}{\frac{U\mu}{\eta}(2R)} U^2 \pi R^2 \vec{u}_x \\ Re = \frac{U\mu}{\eta}(2R) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{U}$$

Donc, si la sphère possède une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide au repos, alors elle subit la force :

$$\vec{F}_t = -6\pi\eta R \vec{v}$$

- Pour un nombre de Reynolds tel que $1000 < Re < 2 \cdot 10^5$, le coefficient C_x , conserve quasiment une valeur constante : $C_x = 0,4$ dans le cas d'une sphère. La force de traînée associée est :

$$\begin{cases} C_x = 0,4 \\ F_t = \frac{1}{2} C_x \mu U^2 S \Rightarrow \vec{F}_t = \frac{1}{2} \mu C_x U^2 S \vec{u}_x \end{cases}$$

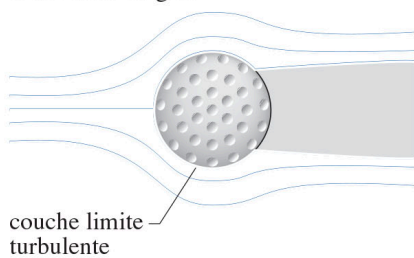
Donc, si la sphère possède une vitesse $\vec{v}$ dans un fluide au repos, alors elle subit la force :

$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} \mu C_x U^2 S \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

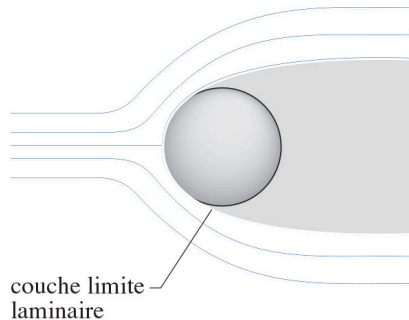
Elle est quadratique et ne dépend plus de la viscosité du fluide, mais de sa masse volumique μ .

- Enfin, au-delà de $Re > 2.10^5$, le coefficient C_x chute brutalement, c'est ce que l'on nomme la crise de traînée. L'écoulement devient turbulent dans la couche limite, et le décollement de la couche limite, déplacé dans la zone aval, réduit le sillage et donc la zone de faible pression. La force diminue donc, même si la couche limite turbulente exerce des contraintes visqueuses plus fortes qu'une couche limite laminaire. Il est à noter que les balles de golf comportent des alvéoles afin de provoquer cette crise de traînée. Les irrégularités à la surface favorisent l'apparition d'une couche limite turbulente et donc le retardement de son décollement. Des balles de golf lisses auraient une portée bien plus faible !

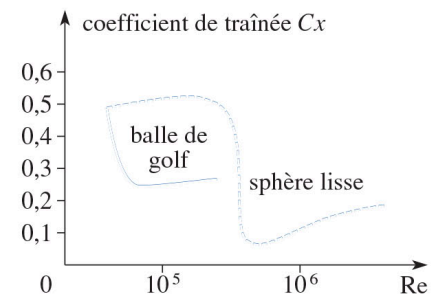
écoulement autour d'une balle de golf



Autour d'une balle de golf, il existe une couche limite turbulente.



Autour d'une balle lisse, il existe une couche limite laminaire.



Différence entre les coefficients de traînée $C_x(Re)$ d'une balle lisse et d'une balle de golf, lors d'un mouvement à nombre de Reynolds Re élevé.

Ainsi pour un mouvement d'une balle de golf à $100ms^{-1}$, on obtient : $Re = 10^5$. Le C_x est divisé par deux et la force de traînée d'autant.

