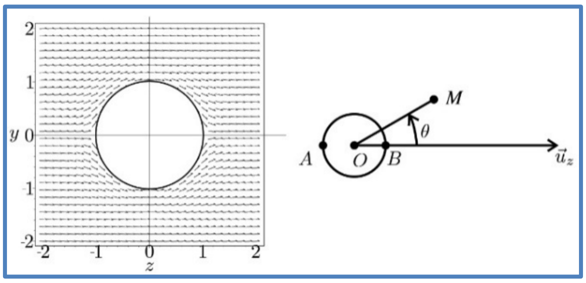
MF1 – Description d'un fluide en mouvement

A – Travaux dirigés

MF11 – Ecoulement perturbé par une sphère

On considère un écoulement permanent uniforme : $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_z}$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel. Le champ des vitesses ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.



1. Montrer que le potentiel des vitesses vérifie $\Delta\phi = 0$.
2. On cherche le potentiel des vitesses sous la forme : $\phi = Ar\cos(\theta) + \frac{B}{r^2}\cos(\theta) + C$. Déterminer A et B. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de $v_0, r, R\ et\ \theta$.
3. Dessiner l'allure des lignes équipotentielles.

Rép : 1. Ecoulement incompressible et irrotationnel… 2. $\vec{v} = v_0\cos(\theta)\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)\overrightarrow{u_r} - v_0 sin(\theta)\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right)\overrightarrow{u_\theta}$ 3. Orthogonales aux LDC

MF12 - Atmosphère en équilibre

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical. Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e, sa pression P, sa température T et sa masse volumique μ. On désigne par $P_o, T_o\ et\ \mu_o$ les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où z = 0).

I) Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme To. On prendra $T_0 = 288\,K$.

1. Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P, R, $T_0\ et\ M_e$.
2. Ecrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression P(z) en fonction de P_0, de la hauteur barométrique $H = \frac{RT_0}{M_e g}$ et de l'altitude z.
3. En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en O_2 et de 80% en N_2, calculer la valeur numérique de H. A quelle altitude z_{50}^{iso} la pression est elle égale à $\frac{P_o}{2}$?

II) Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type :

$$T = T_0\,(1 - \alpha z)\ \text{où}\ \alpha = \frac{1}{z_0} > 0$$

La valeur expérimentale $z_0 \approx 33\,km$ justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

4. Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_0\,(1-\alpha z)^\beta\ et\ \mu(z) = \mu_0\,(1-\alpha z)^{\beta-1}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H et de z_0.
5. À quelle altitude z_{50}^{iso} la pression est-elle égale à $\frac{p_0}{2}$? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible ?

Rép : 1. $\mu = \frac{PM_e}{RT_0}$ 2. $p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$ 3. $z_{50}^{iso} = 5{,}9km$ 4. $Ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0}\ln(1-\alpha z)$ et $= \mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}$ 5. $z_{50}^{poly} = 5{,}4km$

B – Exercices supplémentaires

MF13 – Ecoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons $R_1 \; et \; R_2$, tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires $\Omega_1 \; et \; \Omega_2$ peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

1. Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres en $R_1 \; et \; R_2$.
2. Commenter le cas $\Omega_1 = \Omega_2$
3. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

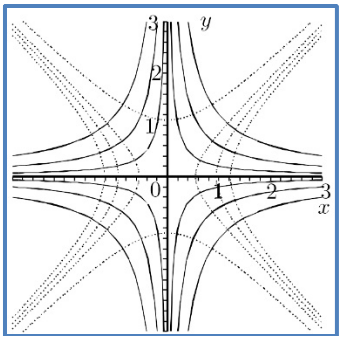
Rép : 1. $A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\, R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ 2. Mouvement de rotation en bloc du fluide 3. $\vec{a} = -\frac{\left(Ar + \frac{B}{r}\right)^2}{r}\overrightarrow{u_r}$

MF14 – Champ de vitesse bidimensionnel

On considère un écoulement stationnaire dont le champ de vitesses est de la forme :

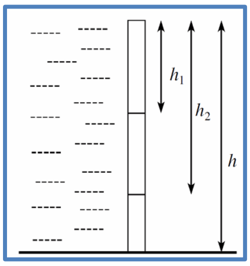
$$\vec{v} = -kx\,\overrightarrow{u_x} + ky\,\overrightarrow{u_y}$$

1. Déterminer la nature de l'écoulement et le potentiel des vitesses ϕ. On prendra $\phi(x = 0, y = 0) = 0$.
2. Calculer l'équation des lignes équipotentielles et des lignes de courant. Interpréter la figure suivante représentant les lignes équipotentielles et les lignes de courant.



Rép : 1. $\phi = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2$ 2. $y = \frac{cste}{x}$

MF15 - Poussée et centre de poussée sur un mur de barrage



1. Calculer les longueurs $h_1 \; et \; h_2$ en fonction de h, assurant l'égalité des forces horizontales de poussée sur les trois éléments du mur de barrage ci-contre. (L'axe Oz est vertical descendant et l'origine est pris en haut)
2. On se propose de calculer la position des centres de poussée pour chaque portion de paroi.
   a) Calculer directement le moment de la force par :

$$\overrightarrow{M_{0,k}} = \overrightarrow{OC_k} \wedge \overrightarrow{F_k} \text{ où } k = \{1,2,3\}$$

Où C_k est le centre de poussée.

   b) Calculer le moment de la force de chaque paroi en sommant les moments élémentaires.

$$\overrightarrow{M_{0,k}} = \int_{h_k}^{h_{k+1}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} \text{ où } k = \{1,2,3\}$$

   c) En déduire le centre de poussée z_{c1} de la paroi 1.

Rép : 1. $\Delta F_{px} = \frac{\rho g(H_b^2 - H_a^2)L}{2}$ et $H_1 = \frac{H}{\sqrt{3}} \; et \; H_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}H$ 2. a) $M_{ok} = Z_{ck}\frac{\rho g(H_b^2 - H_a^2)L}{2}$ b) $M_{ok} = \rho g L\frac{H_b^3 - H_b^2}{3}$ 2c) Donc pour la paroi 1 : $z_{c1} = \frac{2}{3}H_1$

MF16 - Océan en équilibre isotherme

Considérons un océan en équilibre isotherme. La masse volumique de l'eau varie avec la pression selon la loi :

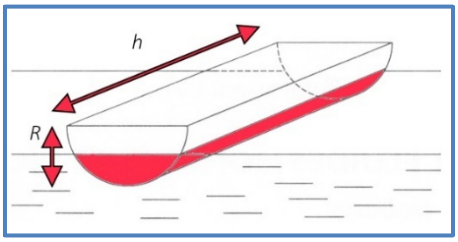
$$\rho = \rho_0\big(1 + a(p - p_0)\big) \text{ où } a = 1{,}0\ 10^{-10} Pa^{-1}.$$

La profondeur est notée z. Pour $z = 0, p = p_0 = 1bar,\ \&\ \rho = \rho_0 = 10^3\ kg \cdot m^{-3}$.

1. Donnez la loi p(z) dans l'océan dans ce modèle.
2. Que devient cette loi pour de faibles profondeurs.
3. Quelle est l'erreur relative pour z=1000m entre les deux expressions de p(z) obtenues précédemment. Conclure.

Rép : 1. $p = p_0 + \frac{e^{-a\rho_0 gz} - 1}{a}$ 2. A l'aide d'un DL à l'ordre 1 on retrouve : $p = p_0 - \rho_0 gz$ 3. $\frac{\Delta p}{p} = 0{,}0004$

MF17 - Oscillations d'un demi-cylindre flottant



Un demi-cylindre de rayon R, et de longueur h, flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ.

1. A l'équilibre le cylindre est enfoncé de $\frac{R}{2}$ dans le liquide. Démontrer alors que sa masse volumique μ peut s'écrire $\mu = a\rho$ où a est une constante.
2. Démontrer que la période des petites oscillations verticales de l'objet peut s'écrire $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}\ et\ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R\gamma}}$ où γ est une constante.

Rép : 1. $V_{immergé} = R^2 h\left(\alpha - \frac{sin2\alpha}{2}\right) \Rightarrow \mu = \rho\frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{2}} = a\rho$ où $a = 0{,}39$ 2. Soit : $M\ddot{z} = -Mg + \rho V_{imm} g \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{2\sqrt{3}g}{a\pi R}\varepsilon = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{R\gamma}}$ où $\gamma = \frac{a\pi}{2\sqrt{3}}$

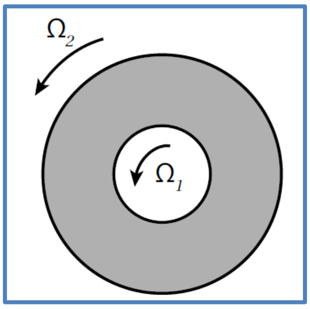
MF18 – Expansion d'un fluide

On considère un fluide occupant une sphère de rayon r_0 de manière homogène, pour $t < 0$. À l'instant $t = 0$, on communique aux particules de fluide une vitesse initiale radiale v_{ini} proportionnelle à la distance initiale r_{ini} entre l'origine O et la particule de fluide : $v_{ini} = \frac{r_{ini}}{\tau}$, où τ est une constante. On suppose que pour t > 0 les particules conservent leur vitesse initiale.

1. Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(r,t)$ selon le point de vue d'Euler.
2. Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}(r,t)$.
3. On suppose la répartition de masse homogène. Déterminer μ(t) en fonction de μ(0) de deux manières différentes.

Rép : 1. $\vec{v}(r,t) = \frac{r}{t+\tau}\overrightarrow{u_r}$ 2. $\vec{a} = \vec{0}$ 3. $\mu = \frac{\mu_0}{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^3}$

MF19 – Ecoulement de Couette cylindrique



Deux cylindres d'axe (Oz), de rayons $R_1\ et\ R_2 > R_1$, sont mis en rotation a vitesses angulaires respectives $\Omega_1\ et\ \Omega_2$. On souhaite étudier l'écoulement stationnaire du fluide pris entre les deux cylindres.

Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v_r(r)\overrightarrow{u_r} + v_\theta(r)\overrightarrow{u_\theta}$. On fournit la divergence en coordonnées cylindriques : $div\ \vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

1. Pourquoi peut-on supposer le champ des vitesses indépendant de θ ?
2. On suppose désormais l'écoulement incompressible. Préciser dans quelles conditions expérimentales concrètes cette approximation est validée.
3. Montrer que $v_r = 0$.
4. On cherche la composante orthoradiale $v_\theta(r)$ sous la forme $v_\theta(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}$, avec $\alpha\ et\ \beta$ constantes. Déterminer $\alpha\ et\ \beta$ en supposant que le fluide « accroche » aux cylindres à leur contact en $r = R_1\ et\ r = R_2$.
5. Décrire l'écoulement si les deux cylindres tournent avec la même vitesse angulaire $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$.
6. Décrire l'écoulement si le cylindre extérieur ne tourne pas $(\Omega_2 = 0)$ et que son rayon R_2 tend vers l'infini, ce qui revient à ne conserver que le cylindre intérieur.

Rép : 1. Principe de Curie 2. $v \ll c$ 3. $div\ \vec{v} = 0$ 4. $\alpha = \frac{R_2^2\Omega_2 - R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2}\ et\ \beta = \frac{R_2^2 R_1^2(\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}$ 5. $\alpha = \Omega\ et\ \beta = 0$ 6. $\vec{v} = \frac{R_1^2}{r}\Omega_1\overrightarrow{u_\theta}$