MF1 – Description d'un fluide en mouvement

A – Travaux dirigés

MF11 – Ecoulement perturbé par une sphère

1. L'écoulement est incompressible, donc $\overrightarrow{div} \ \overrightarrow{v} = 0$. L'écoulement est irrotationnel, donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\Phi$.

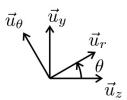
On en déduit div $(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \Phi) = 0$, soit :

$$\Delta \Phi = 0$$

2. Le vecteur vitesse s'en déduit à partir du potentiel des vitesses :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi = A \cos \theta \vec{u}_r - A \sin \theta \vec{u}_\theta - \frac{2B}{r^3} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{B \sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta$$

• Première condition aux limites : Si $r \to \infty$, alors $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$. Il reste à projeter \vec{u}_z dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.



D'après le schéma, on a : $\vec{u}_z = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$. D'où $v_0\vec{u}_z = v_0\cos\theta\vec{u}_r - v_0\sin\theta\vec{u}_\theta = A\cos\theta\vec{u}_r - A\sin\theta\vec{u}_\theta$. Cette relation doit être réalisée quel que soit θ , en particulier pour $\theta=0$. On a donc :

$$A = v_0$$

• **Deuxième condition aux limites :** Pour r=R, le point M se situe sur la sphère. On doit avoir $v_r=0$, soit $A\cos\theta-\frac{2B\cos\theta}{R^3}=0$. Comme $A=v_0$, on en déduit que :

$$B = \frac{v_0 R^3}{2}$$

Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \vec{u}_\theta - \frac{v_0 R^3}{r^3} \cos \theta \vec{u}_r - \frac{v_0 R^3 \sin \theta}{2r^3} \vec{u}_\theta$$

En simplifiant, on obtient finalement:

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \vec{u}_r - v_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \vec{u}_\theta$$

Interprétation physique :

L'écoulement est bien symétrique par rapport à Oz. Si on remplace θ par $-\theta$, on obtient le même champ de vitesses.

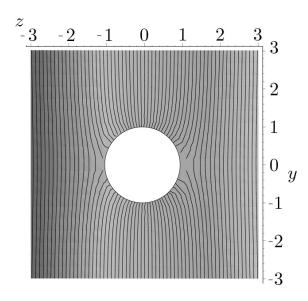
Le plan z = 0 est un plan d'antisymétrie des vitesses.

Au point $A(r=R,\theta=\pi)$, le vecteur vitesse est nul. C'est bien un point d'arrêt.

De même, le point $B(r = R, \theta = 0)$ est un point d'arrêt.

3. On en déduit directement l'allure des lignes équipotentielles. Les surfaces équipotentielles s'obtiennent par rotation d'angle ϕ autour l'axe Oz des lignes équipotentielles.

Si $r \to \infty$, le ligne équipotentielle tend vers une droite perpendiculaire à l'axe Oz puisque le vecteur vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_z$. Le vecteur vitesse en un point éloigné de le sphère est bien orthogonal à la ligne équipotentielle passant par M.



MF12 – Atmosphère en équilibre

1.a) D'après l'équation des gaz parfaits,

$$PV = nRT_0$$
.

On en déduit la masse volumique :

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{n M_e}{V} = \frac{P M_e}{R T_0}$$

b) La relation de statique des fluides s'écrit pour u_z orienté vers le haut :

$$P'(z) = -\mu g = -\frac{PM_e}{RT_0}.$$

On résout l'équation différentielle :

$$P(z) = A \exp\left(-\frac{M_e g z}{R T_0}\right)$$

où A est une constante. Sachant que $P(0) = P_0$, on conclut :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right).$$

c) $M_e = 0.20 \cdot 32 + 0.8 \cdot 28 = 28.8 \text{ g.mol}^{-1}$. Ainsi, H = 8.5 km.

On obtient $P(z) = P_0 / 2$ si:

$$P_0 \exp\left(-\frac{z_{50\%}^{\text{iso}}}{H}\right) = \frac{P_0}{2}$$

soit:

$$z_{50\%}^{\rm iso} = H \ln 2 = 5.9 \text{ km}$$

Malgré la simplicité du modèle (température uniforme), les ordres de grandeur sont corrects.

2.a) On utilise à nouveau la loi de statique des fluides, mais en incluant la variation de température, ce qui donne :

$$\begin{split} P'(z) = - \, \mu g = - \, \frac{P M_e g}{R T} = - \frac{P M_e g}{R T_0 \left(1 - \alpha z \right)} \\ \frac{P'(z)}{P(z)} = - \frac{M_e g}{R T_0} \, \frac{1}{1 - \alpha z}. \end{split}$$

soit:

On intègre cette équation différentielle :

$$\ln P(z) = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln (1 - \alpha z) + \text{cte.}$$

Sachant que $P(0) = P_0$, on déduit :

$$\ln \frac{P(z)}{P_0} = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} \ln (1 - \alpha z)$$

d'où:

$$P(z) = P_0 (1 - \alpha z)^{\beta} \text{ avec } \beta = \frac{M_e g}{\alpha R T_0} = \frac{1}{H \alpha} = \frac{z_0}{H}.$$

On revient à l'expression de la masse volumique :

$$\mu(z) = \frac{P(z)M_e}{RT(z)} = \frac{P_0M_e}{RT_0}(1-\alpha z)^{\beta-1} = \boxed{\mu_0(1-\alpha z)^{\beta-1}}.$$

b) Il faut résoudre :

$$\left(1 - \alpha z_{50\%}^{\text{pol}}\right)^{\beta} = \frac{1}{2}$$

d'où:

$$\beta \ln \left(1 - \alpha z_{50\%}^{\text{pol}}\right) = -\ln 2$$

et:

$$1 - \alpha z_{50\%}^{pol} = 2^{-1/\beta}$$
.

Au final,

$$z_{50\%}^{\text{pol}} = z_0 (1 - 2^{-1/\beta}) = 5.4 \text{ km}$$

Cette valeur est très proche de celle obtenue par le modèle isotherme mais un peu inférieure. En effet, la température diminue lorsque l'altitude augmente, donc l'agitation thermique est de plus en plus faible. Le modèle isotherme surévalue l'agitation thermique et donc la pression à haute altitude.

B – Exercices supplémentaires

MF13 – Ecoulement entre deux cylindres

1) En écrivant $AR_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1$ et $AR_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2$, on obtient :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

- 2) Si $\Omega_1 = \Omega_2$, $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$, on a un mouvement de rotation « en bloc » du fluide qui s'apparente à celui d'un solide.
- 3) En adoptant la formule $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{\text{grad}}) \overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v}$ il vient :

$$\frac{\mathbf{D} \vec{v}}{\mathbf{D} t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\left(Ar + \frac{B}{r} \right)^2 \right) \vec{e}_r + 2A \vec{e}_z \wedge \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \vec{e}_\theta$$

$$= \left(A^2 r - \frac{B^2}{r^3} \right) \vec{e}_r - 2A \left(Ar + \frac{B}{r} \right) \vec{e}_r = -\left(A^2 r + \frac{B^2}{r^3} + \frac{2AB}{r} \right) \vec{e}_r$$

$$= -\frac{\left(Ar + \frac{B}{r} \right)^2}{r} \vec{e}_r.$$

On retrouve l'accélération d'un mouvement circulaire uniforme : en effet, les lignes de courants, donc les trajectoires, sont des cercles de rayon r. En conception lagrangienne, R(t) = r =cte et la vitesse lagrangienne apparaît comme étant de la forme $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{v} = v(r) \overrightarrow{e}_{\theta}$, c'est-à-dire indépendante du temps.

Laurent Pietri $\sim 4 \sim$ Lycée Joffre - Montpellier

MF14 – Ecoulement perturbé par une sphère

1. On calcule la divergence et le rotationnel du vecteur vitesse :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -k + k = 0$$

L'écoulement est donc incompressible.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -kx \\ ky \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Comme on travaille avec les coordonnées cartésiennes, on peut utiliser l'opérateur nabla pour calculer la divergence et le rotationnel. Attention, on ne peut pas l'utiliser avec les coordonnées cylindriques et sphériques.

L'écoulement est donc irrotationnel. On peut définir un potentiel des vitesses $\Phi(M,t)$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$. On a donc

$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} -kx \\ ky \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}\Phi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{d}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}z = -kx\mathrm{d}x + ky\mathrm{d}y.$ Il reste à intégrer :

$$\Phi = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + C1$$

D'après l'énoncé, $\Phi=0$ au point O. La constante d'intégration C1 est donc nulle.

2. En tout point d'une ligne équipotentielle, on a :

$$\Phi = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 = C2$$
 avec $C2$ une constante, soit :

$$-x^2 + y^2 = C3$$

C'est l'équation d'une hyperbole.

Pour calculer l'équation d'une ligne de courant, on écrit que \overrightarrow{v} et \overrightarrow{dl} sont colinéaires, c'est à dire $\overrightarrow{v}=\alpha \overrightarrow{dl}$ avec $\alpha=cte$.

On a :
$$\overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} -kx \\ ky \end{vmatrix}$$
 et $\overrightarrow{dl} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

Les deux vecteurs sont colinéaires donc : $\frac{\mathrm{d}x}{-kx} = \frac{\mathrm{d}y}{ky} = \frac{1}{\alpha}$.

Il suffit d'intégrer : $-\ln x = \ln y + C4$. On a donc :

$$y = \frac{C5}{x}$$

Sur la figure de l'énoncé sont représentées en traits pleins les lignes de courant et en traits pointillés les lignes équipotentielles.

D'après les propriétés du gradient, le vecteur vitesse en un point Mest orthogonal à la surface équipotentielle passant M.

MF15 - Poussée et centre de poussée sur un mur de barrage

1. On a:

$$\Delta F_{px} = \int_{z=h_k}^{z=h_{k+1}} \Delta p \, dS \Rightarrow F_{px} = \int_{z=h_k}^{z=h_{k+1}} \rho g(z) L dz \Leftrightarrow F_{px} = \frac{\rho g(h_{k+1}^2 - h_k^2) L}{2}$$
$$\Leftrightarrow \Delta F_{px} = \frac{\rho g(h_{k+1}^2 - h_k^2) L}{2}$$

Donc:

$$\frac{\rho g(h_1^2)L}{2} = \frac{\rho g(h_2^2 - h_1^2)L}{2} = \frac{\rho g(h^2 - h_2^2)L}{2}$$

$$\Leftrightarrow h_2 = 2\sqrt{h_1} \text{ et } h^2 = h_1^2 + h_2^2 \Leftrightarrow h_1^2 = \frac{h^2}{3} \text{ et } h_2^2 = \frac{2}{3}h^2 \Rightarrow h_1 = \frac{h}{\sqrt{3}} \text{ et } h_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}h$$

2.

a. Soit :
$$M_{0k} = Z_{ck} \frac{\rho g(h_{k+1}^2 - h_k^2)L}{2}$$

b. $\overrightarrow{M_{0,k}} = \int_{h_k}^{h_{k+1}} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} = \int_{h_k}^{h_{k+1}} z \times \rho gz \, Ldz = \rho gL \frac{H_{k+1}^3 - H_k^3}{3}$

c. Donc pour la paroi 1 :

$$z_{c1} \frac{\rho g(h_1^2 - 0)L}{2} = \rho gL \frac{h_1^3 - 0}{3} \Rightarrow z_{c1} = \frac{2}{3}h_1$$

MF16 - Océan en équilibre isotherme

1. Soit:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 \left(1 + a(p - p_0) \right) g \Leftrightarrow \frac{dp}{1 + a(p - p_0)} = -\rho_0 g dz$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} Ln[1 + a(p - p_0)] = -\rho_0 gz + C$$

Or:
$$p = p_0$$
 en $z = 0 \Rightarrow Ln[1 + a(p - p_0)] = -a\rho_0 gz$

$$\Leftrightarrow a(p - p_0) = e^{-a\rho_0 gz} - 1 \Leftrightarrow p(z) = p_0 + \frac{e^{-a\rho_0 gz} - 1}{a}$$

2. Pour de faibles profondeurs à l'aide d'un DL à l'ordre 1 on retrouve :

$$p(z) = p_0 - \rho_0 gz$$

3.

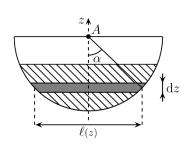
$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{e^{-a\rho_0 gz} - 1}{\rho_0 gz} + \rho_0 gz = \frac{e^{-a\rho_0 gz} - 1}{a\rho_0 gz} + 1 = 0,0004$$

D'un point de vue de la pression on peut considérer que ρ est constant car l'écart obtenue est très faible entre les deux modèles.

MF17 - Oscillations d'un demi-cylindre flottant

1. Soit:

$$\begin{split} V_{immerg\acute{e}} &= \int_{z(R)}^{z\left(\frac{R}{2}\right)} h * 2Rsin\alpha \, dz \\ or \, z &= -Rcos\alpha \Rightarrow dz = +sin\alpha \cdot Rd\alpha \\ \Rightarrow V_{immerg\acute{e}} &= 2R^2 h \int_0^{\alpha_0} sin^2\alpha \, d\alpha = 2R^2 h \int_0^{\alpha_0} \frac{1 - cos2\alpha}{2} \, d\alpha \\ \Rightarrow V_{immerg\acute{e}} &= R^2 h \left(\alpha_0 - \frac{\sin(2\alpha_0)}{2}\right) \end{split}$$



Or:
$$R\cos\alpha_0 = \frac{R}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{3}$$

Donc:
$$V_{immerg\acute{e}} = R^2 h \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

De plus :
$$\rho R^2 h \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) g = \frac{\mu g \pi R^2}{2} h \Leftrightarrow \mu = \rho \frac{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\pi}{2}} = a \rho \text{ où } a = 0.39$$

2.

On va prendre comme repère le point A dont la côté par apport à la surface de l'eau est notée z(t). La côte de la surface de l'eau nous sert d'origine d'où :

$$M\ddot{z} = -Mg + \rho V_{imm}g \text{ or } z = +R\cos\alpha \Rightarrow \ddot{z} = -R\ddot{\alpha}\sin\alpha - R\dot{\alpha}^2\cos\alpha$$

Posons:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} + \varepsilon \Rightarrow \ddot{z} = -R\ddot{\varepsilon}\sin\left(\varepsilon + \frac{\pi}{3}\right) + o(\varepsilon)$$
$$= -R\ddot{\varepsilon}\left(\sin\varepsilon \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\varepsilon \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \sim -R\ddot{\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Donc:

$$-MR\ddot{\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -Mg + \rho V_{imm}\left(\varepsilon + \frac{\pi}{3}\right)g$$

$$\rho g V_{imm}\left(\frac{\pi}{3}\right) = Mg$$

$$Or: \begin{cases} \rho g V_{imm}\left(\varepsilon + \frac{\pi}{3}\right) = \rho g V_{imm}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \rho g \varepsilon \frac{\partial V_{imm}}{\partial \alpha}\Big|_{\frac{\pi}{3}} + o(\varepsilon) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -MR\ddot{\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \rho g \varepsilon \times R^2 h \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}R^2 h \varepsilon \rho g$$

$$\Leftrightarrow M\ddot{\varepsilon} = \sqrt{3}Rh\varepsilon \rho g \Leftrightarrow \frac{\mu \pi R^2}{2}h \ddot{\varepsilon} + \sqrt{3}Rh\varepsilon \rho g = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu \pi R}{2} \ddot{\varepsilon} + \sqrt{3}\varepsilon \rho g$$

$$= 0 \Leftrightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{2\sqrt{3}\rho g}{\mu \pi R} \varepsilon = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{2\sqrt{3}g}{a\pi R} \varepsilon = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \sqrt{\frac{g}{R\gamma}} o \grave{u} \gamma = \frac{a\pi}{2\sqrt{3}}$$

MF18 – Expansion d'un fluide

On note \vec{v}_{ini} la vitesse initiale de la particule qui se trouvait en r_{ini} à l'instant initial.

- 1. D'après les hypothèses de l'énoncé, $\vec{v}(r,t) = \vec{v}_{\text{ini}}(r_{\text{ini}}) = \frac{r_{\text{ini}}}{\tau} \vec{u}_r$ avec $r = r_{\text{ini}} + v_{\text{ini}}t$, d'où $v(r,t) = \frac{r}{t+\tau}$.
- 2. L'accélération d'une particule de fluide est :

$$\vec{d} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} v^2 + (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \wedge \vec{v} = -\frac{r}{(t+\tau)^2} \vec{u}_r + \frac{1}{2} \frac{2r}{(t+\tau)^2} \vec{u}_r + \vec{0} = \vec{0}.$$

3. Si on suppose la répartition de masse homogène, alors $\mu(r,t) = \mu(t)$. La conservation de la masse de fluide s'écrit : $\frac{4}{3}\pi r_0^3\mu_0 = \frac{4}{3}\pi R(t)^3\mu(t)$ où R(t) est le rayon de la sphère à l'instant t, c'est-à-dire $R(t) = r_0\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$.

L'équation locale de conservation de la masse se simplifie en : $\frac{d\mu}{dt} + \mu(t) \operatorname{div} \vec{v} = 0$, soit $\frac{d\mu}{dt} + \frac{3}{t+\tau}\mu(t) = 0$. Cette équation s'intègre en $\mu(t) = \frac{\mu_0}{\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)^3}$, qui est bien équivalente

à: $\mu(t) = \mu_0 \frac{r_0^3}{R(t)^3}$.

Laurent Pietri $\sim 8 \sim$ Lycée Joffre - Montpellier

Physique : PC

M19 – Ecoulement de Couette cylindrique

- 1. Le mouvement de rotation des cylindres est uniforme et donc invariant par rotation autour de l'axe (Oz). Il en est de même pour leur forme géométrique. Or en régime stationnaire, l'écoulement est entièrement imposé par les cylindres par le biais de la viscosité du fluide. En effet, la quantité de mouvement a eu le temps de diffuser dans tout le volume du fluide. Le principe de Curie (voir chapitre 12) permet alors d'affirmer que le champ des vitesses est indépendant de θ en régime stationnaire.
- 2. Le modèle de l'écoulement incompressible convient à l'écoulement des fluides peu compressibles que sont les liquides ainsi qu'à l'écoulement des fluides compressibles, à condition qu'ils soient de vitesses faibles devant la vitesse du son dans le fluide considéré.
- 3. > Traduisons le caractère incompressible de l'écoulement en utilisant le formulaire fourni :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{v} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial (v_z)}{\partial z}.$$

Avec $v_z = 0$ et v_θ ne dépendant que de r, la relation précédente se simplifie en :

$$0 = \frac{1}{r} \frac{d(r v_r)}{dr} \qquad \text{soit} \qquad r v_r = A \qquad \text{avec } A \text{ constante.}$$

 \triangleright Écrivons les conditions aux limites sur les cylindres : s'agissant de parois indéformables, le fluide ne pénètre pas au-delà de $r=R_2$ et ne rentre pas non plus en deçà de $r=R_1$. De façon équivalente, le débit volumique élémentaire à travers tout élément de surface s'appuyant sur l'un des cylindres est nul. Il en résulte que la composante normale du champ des vitesses s'y annule, soit :

$$v_r(R_1) = v_r(R_2) = 0.$$

- ▶ On en déduit que $A/R_1 = A/R_2 = 0$, soit A = 0. Ainsi, $v_r = 0$: le champ des vitesses est purement orthoradial.
- **4.** \triangleright Le cylindre i (i=1,2) étant en rotation à vitesse angulaire Ω_i , la vitesse d'un point quelconque du cylindre est $v_i=R_i\Omega_i$. Puisque le fluide « accroche » aux cylindres, la vitesse d'un élément du fluide au contact d'un point du cylindre coïncide avec celle de ce point, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{\theta}(R_1) = \alpha R_1 + \beta / R_1 = R_1 \Omega_1 \\ \nu_{\theta}(R_2) = \alpha R_2 + \beta / R_2 = R_2 \Omega_2 \end{array} \right. .$$

 \triangleright Les combinaisons linéaires $R_1(\mathbf{4.})-R_2(\mathbf{4.})$ et $R_2(\mathbf{4.})-R_1(\mathbf{4.})$ fournissent respectivement :

$$\alpha = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \qquad \text{ et } \qquad \beta = \frac{(R_1 R_2)^2 (\Omega_1 - \Omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

5. \triangleright Si les deux cylindres tournent à la même vitesse angulaire, les expressions de α et β se simplifient en :

$$\alpha = \Omega$$
 et $\beta = 0$.

Le champ des vitesses est donc :

$$\overrightarrow{v} = r\Omega \overrightarrow{u_{\theta}}$$
.

 \triangleright On reconnaît le champ des vitesses d'un solide en rotation à vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz): on parle de « rotation solide ».

Remarque

Remarquons que l'écoulement est alors tourbillonnaire, de vecteur-tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \Omega \overrightarrow{u_z}$, soit $\overrightarrow{rot} \overrightarrow{v} = 2 \overrightarrow{\Omega}$

6. \triangleright Dans le cas où $\Omega_2 = 0$, les expressions de α et β deviennent :

$$\alpha = \frac{-R_1^2\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{\Omega_1}{1 - (R_2/R_1)^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{(R_1R_2)^2\,\Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{R_2^2\,\Omega_1}{(R_2/R_1)^2 - 1}.$$

▶ En faisant enfin tendre mathématiquement R_2 vers l'infini, c'est-à-dire en considérant physiquement que $R_2/R_1 \gg 1$, il vient :

$$\alpha = 0$$
 et $\beta = R_1^2 \Omega_1$ d'où $\overrightarrow{v} = \frac{R_1}{r} R_1 \Omega_1 \overrightarrow{u_\theta}$.

 \triangleright On constate que le cylindre intérieur entraîne le fluide, de telle sorte que la vitesse du fluide coïncide avec celle du cylindre en $r=R_1$ (effet des conditions aux limites visqueuses étudiées au chapitre 10). Cependant, l'efficacité de cet effet d'entraînement décroît avec la distance à l'axe. En particulier, à l'infini, le fluide n'est pas affecté.