MF1 – Description d'un fluide en mouvement

La partie mécanique des fluides du programme de deuxième année est un prolongement, bien complété, de la partie statique des fluides de première année.

0 – Lien avec le programme de PCSI

Cette partie, intitulée **3.6. « Statique des fluides dans un référentiel galiléen »,** est conçue pour introduire sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et de la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage.

Un des objectifs est de montrer dans cette partie l'intérêt d'un formalisme spécifique – utilisation de l'opérateur gradient – pour passer à une formulation universelle d'une loi de la physique.
La statique des fluides permet également d'introduire le facteur de Boltzmann dont on affirme la généralité.

3.6. Statique des fluides dans un référentiel galiléen		
Forces surfaciques, forces volumiques.	Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.	
Résultante de forces de pression.	Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.	Il est très important de savoir écrire les surfaces élémentaires dans les différents types de coordonnées sans oublier les éléments intégrants de ces surfaces.
Équivalent volumique des forces de pression.	Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.	
Équation locale de la statique des fluides.	Établir l'équation locale de la statique des fluides.	
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.	Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.	Formule à retenir avec le gradient : $\overrightarrow{grad}\, p = -\rho\vec{g}$
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Exploiter la loi d'Archimède.	À revoir dans son cours de « Sup ».
Facteur de Boltzmann.	S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de	À revoir dans son cours de « Sup ».

	l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser $k_B T$ comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.	

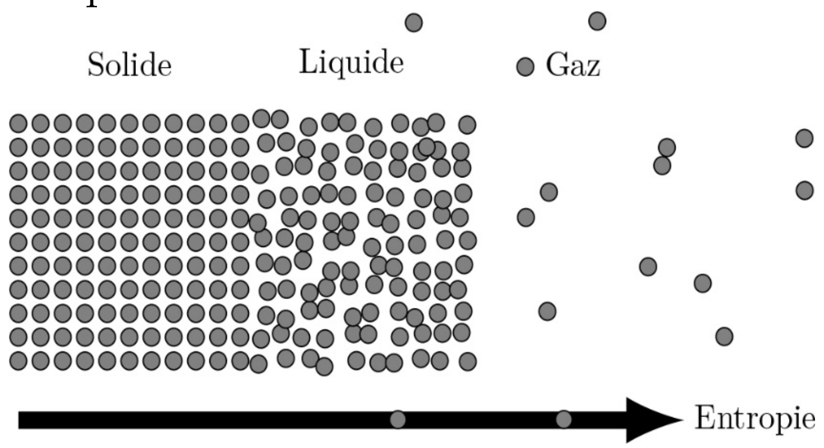
La partie intitulée « **Mécanique des fluides** » est conçue comme une initiation de telle sorte que de nombreux concepts sont introduits de manière élémentaire. Toute extension du programme vers les cours spécialisés doit être évitée : par exemple l'approche lagrangienne, la fonction de courant, le potentiel complexe, l'étude locale du champ des vitesses, la relation de Bernoulli pour des écoulements compressibles ou instationnaires, le théorème de Reynolds et le théorème d'Euler sont hors programme.
L'apprentissage de la mécanique des fluides contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en électromagnétisme. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous- jacent. En outre, la recherche de lignes de courants est traitée exclusivement à l'aide d'outils numériques.

4.3.1. Description d'un fluide en mouvement		
Champ eulérien des vitesses. Lignes de champ. Tubes de champ.	Définir et utiliser l'approche eulérienne.	On ne confondra pas l'approche eulérienne de l'approche classique lagrangienne.
Écoulement stationnaire.	Discuter du caractère stationnaire d'un écoulement en fonction du référentiel d'étude.	Très important dans certains exercices comme les ressauts hydrauliques…
Dérivée particulaire de la masse volumique. Écoulement incompressible.	Établir l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique. Utiliser l'expression de la dérivée particulaire de la masse volumique pour caractériser un écoulement incompressible.	
Débit massique. Débit volumique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur densité de courant de masse à travers une surface orientée. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux du champ de vitesse à travers une surface orientée.	On ne se limitera pas à utiliser les produits vitesse fois surface mais à bien définir les débits comme des flux.
Équation locale de conservation de la masse.	Établir l'équation locale de conservation de la masse dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.	
Caractérisation d'un écoulement incompressible par la divergence du champ des vitesses.	Traduire localement, en fonction du champ de vitesses, le caractère incompressible d'un écoulement.	
Dérivée particulaire du champ de vitesse : terme local ; terme convectif.	Associer la dérivée particulaire de la vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point. Utiliser l'expression de l'accélération, le terme convectif étant écrit sous la forme $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\,\vec{v}$. Utiliser l'expression fournie de l'accélération convective en fonction de $\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ $et\ \overrightarrow{rot}\,\vec{v}\wedge\vec{v}$.	

I – Le modèle continu

I-1) L'état fluide

Le terme fluide désigne un comportement qui s'oppose au comportement élastique ou plastique associé aux solides. Par définition, on dit que la matière est fluide lorsqu'elle se déforme aussi longtemps que lui sont appliquées des contraintes tangentielles. En termes simples on peut dire qu'un fluide coule quand un solide se déforme. Fondamentalement, le comportement fluide est lié, au niveau moléculaire, à l'absence d'ordre à longue portée (contrairement aux cristaux) et à l'existence d'un chaos moléculaire (contrairement aux solides). Ces propriétés se retrouvent notamment chez les gaz et les liquides.



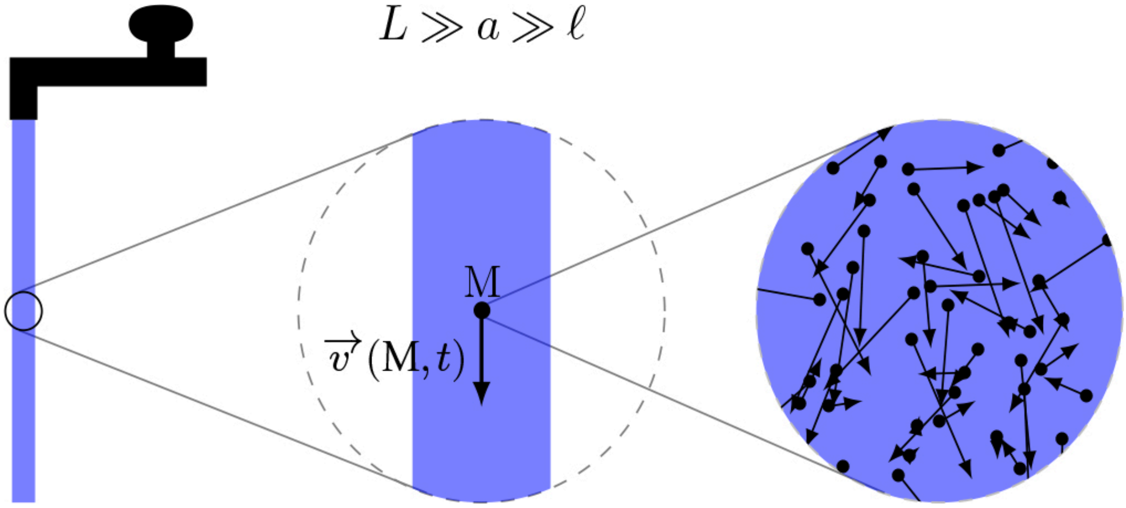
I-2) Approximation des milieux continus

a) Echelles d'études

L'approche « milieu continu » : Lorsque le libre parcours moyen, est très petit devant l'échelle macroscopique, on choisit de décrire le fluide à une échelle intermédiaire entre l'échelle atomique et macroscopique : l'échelle mésoscopique. La mécanique des fluides repose sur cette approche. En effet, dans les situations courantes on peut, en général, distinguer trois échelles :

- L'échelle macroscopique L. Par exemple L est le diamètre du tuyau quand on étudie l'écoulement dans un tuyau.

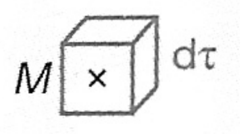
- L'échelle des collisions $l \ll L$, l est le libre parcours moyen, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une molécule entre deux collisions successives. À cette échelle, les grandeurs varient de façon discontinue et imprévisible.
- L'échelle mésoscopique a telle que $l \ll a \ll L$. À cette échelle, les fluctuations sont lissées de sorte que l'on peut définir des grandeurs locales continues.



b) Particule de fluide

On choisit alors comme échelle d'observation, l'échelle mésoscopique. On considère, autour d'un point M, un volume mésoscopique. Typiquement un volume de $1 \mu m^3$ convient. Ce volume contient un grand nombre de particules ce qui permet de définir des grandeurs moyennes locales qui, elles, vont évoluer de façon continue : la masse volumique locale $\mu(M,t)$, la vitesse locale $\vec{v}(M,t)$.

On donne à ce volume mésoscopique le nom de particule de fluide.



On définit ainsi la masse volumique et la vitesse mésoscopique :

$$\begin{cases} \mu(M,t) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{d\tau} = \dfrac{dm}{d\tau} \\ \vec{v}(M,t) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{v_i} \end{cases}$$

c) Approximation des milieux continus

L'approximation des milieux continus correspond à la possibilité de définir une échelle mésoscopique, intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique. C'est à l'échelle mésoscopique que sont définies, les grandeurs physiques qui varient continûment à l'échelle macroscopique. Le milieu est alors qualifié de milieu continu.

Un milieu peut être considéré continu si le libre parcours moyen l, des molécules est petit devant la taille caractéristique L du système étudié. On définit le nombre de Knudsen :

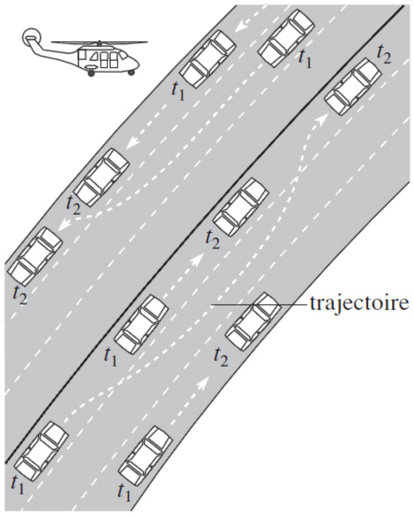
$$K_n = \frac{l}{L} \ll 1$$

Lorsque K_n n'est pas petit devant 1, le modèle continu n'est plus adapté.

II – Champ des vitesses

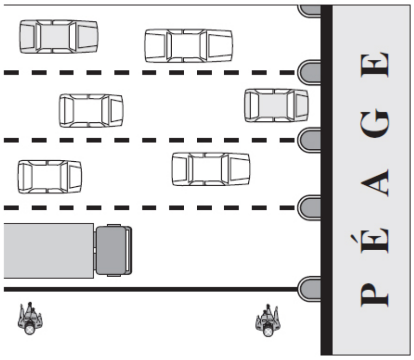
II-1) Description Eulérienne/Lagrangienne

Description Lagrangienne



Lorsque nous observons les trajectoires des divers véhicules (entre $t = t_1$ et $t = t_2$), nous nous plaçons en formalisme lagrangien.

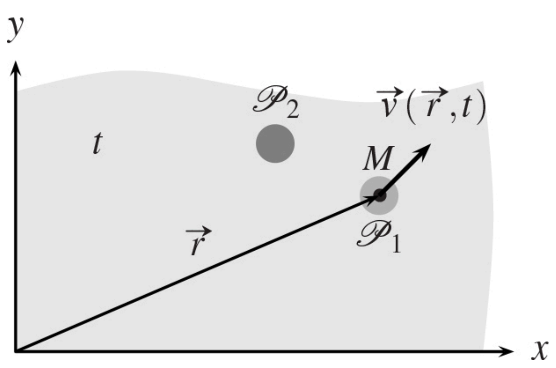
Description Eulérienne

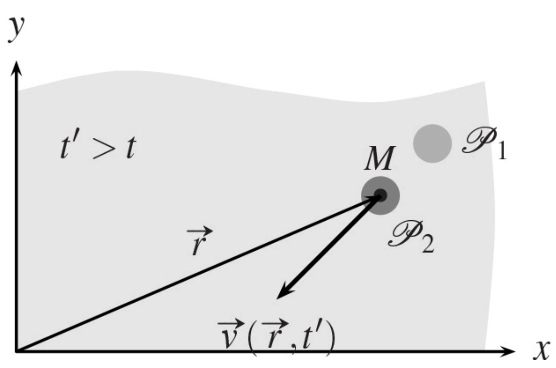


Les deux gendarmes observant les vitesses des véhicules se sont placés en formalisme eulérien pour décrire l'écoulement du trafic. À la même date t, ils n'observent pas les mêmes véhicules. Les deux gendarmes n'observent pas nécessairement la même vitesse.

Deux approches différentes existent. Le point de vue de Lagrange consiste à s'intéresser à la trajectoire des particules de fluide. Celle d'Euler se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points M et au cours du temps.

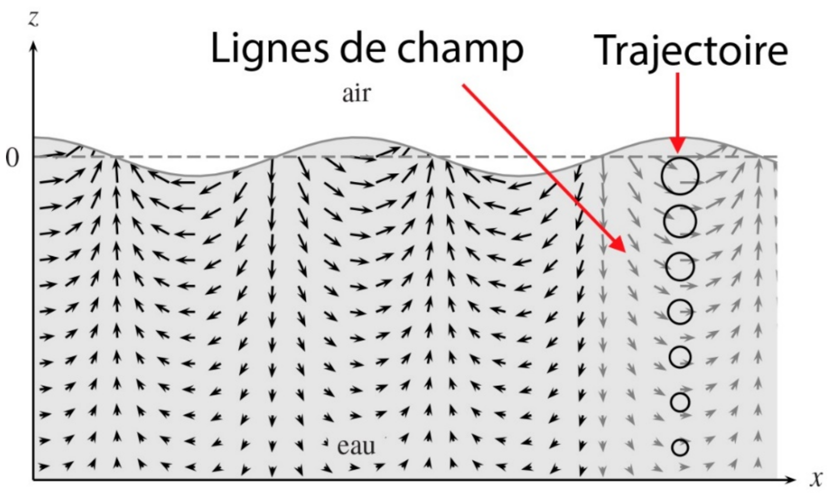
Dans l'approche d'Euler, on définit à chaque instant t le vecteur vitesse d'une particule de fluide située en M. Le vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ ou $\vec{v}(\vec{r},t)$ désigne alors un champ vectoriel.





II-2) Lignes de courant

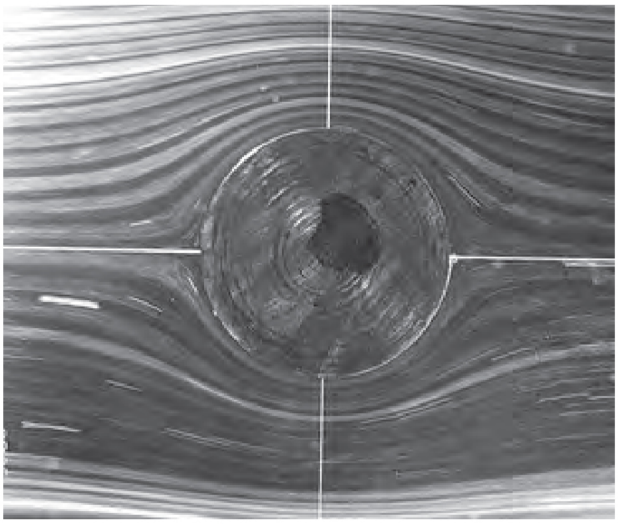
On appelle ligne de courant une ligne qui, en chacun de ses points, est tangente à la vitesse de l'écoulement.



On peut obtenir l'équation d'une ligne de courant en écrivant :

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{dOM} = \vec{0}$$

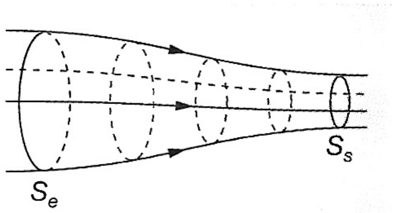
Du point de vue expérimental, on visualise les lignes de courant en photographiant pendant un temps de pause très court un ensemble de particules réfléchissantes (traceurs) réparties dans tout l'écoulement.



Écoulement autour d'un cylindre de faible épaisseur et à faible vitesse. Visualisation à l'aide de filets d'huile de lin dans de l'huile de vaseline.

II-3) Tube de courant

On définit une surface d'entrée S_e et on considère les lignes de courant passant par le contour de S_e. L'ensemble de ces lignes constitue le contour latéral du tube de courant. Ensuite, on coupe le tube par une surface de sortie S_s. L'ensemble des surfaces d'entrée, de sortie et les portions de lignes de courant intermédiaires constituent une surface fermée : c'est un tube de courant.



II-4) Ecoulement stationnaire

Un écoulement est stationnaire si tous les champs eulériens sont indépendants du temps. $(\vec{v}, \mu, T\ et\ p)$

Dans un écoulement stationnaire, toutes les particules de fluide qui passent successivement en un point M fixe de l'écoulement ont la même vitesse, quel que soit l'instant considéré.

En régime permanent, trajectoire et ligne de courant sont confondues.

II-5) Dérivée particulaire

Considérons une grandeur physique locale $G(M,t)$ attachée à une particule de fluide située en M à l'instant t. On peut penser à la température, la pression, la densité etc. Cherchons à calculer le taux de variation de cette grandeur **lorsque l'on suit la particule**. On appelle cette grandeur la dérivée particulaire et on la note : $\frac{DG}{Dt}$

$$\frac{DG}{Dt} = \lim_{\delta t \to \infty} \frac{G(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, t+\delta t) - G(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to \infty} \frac{G(x,y,z,t) + \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial x} dy + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t - G(x,y,z,t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to \infty} \frac{\frac{\partial G}{\partial x} v_x \delta t + \frac{\partial G}{\partial y} v_y \delta t + \frac{\partial G}{\partial z} v_z \delta t + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t}{\delta t}$$

Or : $v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = \left| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \right. . \left| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{matrix} \right. = \vec{v}.\overrightarrow{grad}$

Donc :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})G$$

$$\text{où} \begin{cases} \frac{DG}{Dt} : \textit{Dérivée Lagrangienne ou particulaire} \\ \frac{\partial G}{\partial t} : \textit{Dérivéé Eulérienne ou locale} \\ (\vec{v}.\overrightarrow{grad})G : \textit{Terme convectif} \end{cases}$$

Ce résultat est applicable à la masse volumique et à chaque composante de la vitesse eulérienne d'où :

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})v_i \text{ où } i = \{x, y, z\}$$

En description eulérienne, la dérivée particulaire s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})\mu \\ \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{grad})v_i \text{ où } i = \{x, y, z\} \end{cases}$$

II-6) Accélération particulaire

A l'aide de la dérivée particulaire sur les composantes de la vitesse on obtient l'accélération d'une particule de fluide. Celle-ci se décompose en deux termes :

Accélération particulaire :

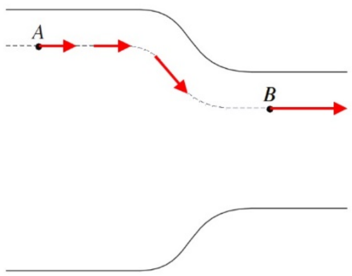
$$\underbrace{\vec{a}(M,t)}_{\text{Accélération particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{Accélération Locale}} + \underbrace{(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}}_{\text{Accélération Convective}}$$

- L'accélération locale $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ indique un caractère non permanent de cette vitesse.
- L'accélération convective $(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v}$ de la vitesse indique un caractère non uniforme de la vitesse.
- L'accélération convective peut aussi s'écrire :

$$(\vec{v}.\overrightarrow{grad})\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + (\overrightarrow{rot}\,\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

⇒ *Cf Annexe 2 : Définition du rotationnel*

Illustrons le terme convectif par l'exemple d'un rapide de rivière. Plaçons-nous en régime stationnaire : la vitesse du fluide en chaque point de la rivière garde une valeur constante au cours du temps : $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r})$. **La vitesse ne dépend pas explicitement du temps** donc le terme d'accélération (locale) en est nul.



La conduite subit un rétrécissement : le fluide en régime permanent est accéléré.

Les lignes de courants s'identifient alors aux trajectoires des particules.

Le lit de la rivière ayant une section plus faible au niveau du point B, nous savons « intuitivement » que la vitesse en B est supérieure à la vitesse en A. Une particule de fluide, suivie de A en B, voit sa vitesse augmenter : elle a nécessairement accéléré, alors que le champ des vitesses du fluide ne dépend pas explicitement du temps. En régime stationnaire, l'accélération est purement convective, c'est-à-dire liée au mouvement ou convection du fluide.

II-7) Ecoulement incompressible

Un écoulement est qualifié d'incompressible si toute particule fluide garde un volume invariable au cours de son mouvement.

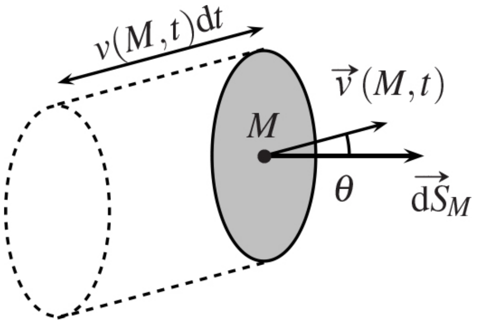
Comme la particule de fluide a une masse constante, si son volume ne varie pas, alors sa masse volumique reste constante au cours de son mouvement. On peut donc traduire la condition d'incompressibilité de l'écoulement par la relation :

$$\frac{D\mu}{Dt} = 0$$

La condition d'incompressibilité traduit la conservation du volume d'une particule de fluide lors de son déplacement. Cette propriété est indépendante du référentiel choisi. Le caractère incompressible d'un écoulement ne dépend pas du référentiel.

III – Equation de conservation de la masse

III-1) Débit massique



Cherchons à exprimer la masse qui traverse une section (S) lors d'un écoulement. Considérons une section infinitésimale $\overrightarrow{dS_M}$ autour d'un point M et calculons la masse d^2m de fluide traversant dS pendant dt. Cette masse se trouve dans le prisme de base dS et de génératrice $\vec{v}dt$. On a donc :

$$d^2m = \mu\, d^2V = \mu v dt\, dS_M \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow d^2m = \mu\, \vec{v}.\overrightarrow{dS_M}\, dt$$

En sommant toutes les contributions on obtient :

$$dm = \iint_S \mu\, \vec{v}.\overrightarrow{dS_M}\, dt$$

D'où le débit massique :

$$D_m = \frac{dm}{dt} = \iint_S \mu\, \vec{v}.\overrightarrow{dS_M}$$

Le débit massique à travers la surface S est le flux du vecteur densité de courant de masse tel que :

$$\underbrace{D_m}_{kg\,s^{-1}} = \iint_S \overrightarrow{J_m}.\overrightarrow{dS_M} \text{ où } \underbrace{\overrightarrow{J_m}}_{kg m^{-2} s^{-1}} = \mu(M,t)\,\vec{v}(M,t)$$

III-2) Débit volumique

Le débit volumique D_v mesure le volume de fluide qui traverse la surface (S) par unité de temps :

$$D_v = \frac{dV}{dt} = \iint_S \frac{d^2V}{dt} = \iint_S \frac{1}{\mu}\frac{d^2m}{dt} = \iint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS_M}$$

Le débit volumique à travers la surface S est le flux du vecteur vitesse :

$$\underbrace{D_v}_{m^3s^{-1}} = \iint_S \vec{v}.\overrightarrow{dS_M}$$

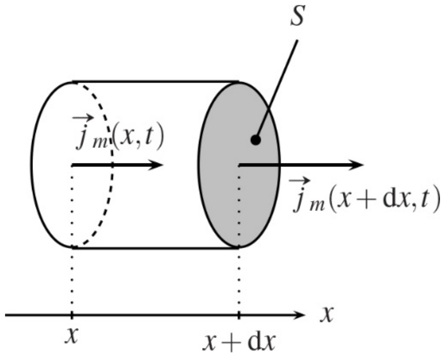
Si $\mu(M \in S, t) = cste, alors\ D_m = \mu D_v$

On peut introduire la vitesse débitante telle que : $D_v = \overline{v}\,S$

Remarque :

- Pour un écoulement incompressible : $D_m = \mu D_v$

III-3) Equation de conservation de la masse



On écrit un bilan de matière, pendant une durée dt, en considérant le volume cylindrique, de section S, et limité par les abscisses x et x+dx. On note Σ ce système.

La masse contenue dans Σ est :

$$\begin{cases} m_\Sigma(t) = \mu(x,t)d\tau \\ m_\Sigma(t+dt) = \mu(x,t+dt)d\tau \end{cases}$$

D'où la variation :

$$dm_\Sigma = \big(\mu(x,t+dt)-\mu(x,t)\big)d\tau$$

$$\Leftrightarrow dm_\Sigma \overset{D.L}{\cong} \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t}dtd\tau$$

La masse qui rentre dans le système pendant dt est :

$$dm_\Sigma = \delta m_x - \delta m_{x+dx}$$

$$\Leftrightarrow dm_\Sigma = \overrightarrow{j_m}(x,t).\overrightarrow{S_x}dt - \overrightarrow{j_m}(x+dx,t).\overrightarrow{S_{x+dx}}\,dt$$

$$\Leftrightarrow dm_\Sigma \overset{D.L}{\cong} -\frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x}.dtSdx$$

Par conséquent :

$$-\frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x}.dtSdx = \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t}dtd\tau$$

D'où l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_m(x,t)}{\partial x} = 0$$

À trois dimensions on pourra écrire :

$$\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + \frac{\partial j_{m,x}(M,t)}{\partial x} + \frac{\partial j_{m,y}(M,t)}{\partial y} + \frac{\partial j_{m,z}(M,t)}{\partial z} = 0$$

Où $\overrightarrow{j_m}(M,t) = j_{m,x}(M,t)\overrightarrow{u_x} + j_{m,y}(M,t)\overrightarrow{u_y} + j_{m,z}(M,t)\overrightarrow{u_z}$

Or cette grandeur qu'on introduit ici, apparaît souvent dans les calculs de physique ainsi on pose :

$$div\,\overrightarrow{j_m(M,t)} = \frac{\partial j_{m,x}(M,t)}{\partial x} + \frac{\partial j_{m,y}(M,t)}{\partial y} + \frac{\partial j_{m,z}(M,t)}{\partial z}$$

L'équation de conservation de la masse en trois dimensions s'écrit :

$$\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + div\,\overrightarrow{j_m(M,t)} = 0$$

⇒ *Cf Annexe 2 : Définition de la divergence*

III-4) Ecoulement stationnaire

Dans le cas d'un écoulement stationnaire on a :

$$\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow div\,\overrightarrow{j_m(M,t)} = 0$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire le vecteur densité de courant de masse est à flux conservatif :

$$\begin{cases} div\,\overrightarrow{j_m(M,t)} = 0 \overset{G.O}{\Leftrightarrow} \oiint_{M\in S} \overrightarrow{j_m(M,t)}\,.\,\overrightarrow{dS_M} = 0 \\ D_{me} = D_{ms}\ ou \displaystyle\sum_{entrant} D_{mi=} \sum_{sortant} D_{mj} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Cf Annexe 2 : Théorème de Green-Ostrogradsky.

III-5) Ecoulement incompressible

On a vu :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + div\,\overrightarrow{j_m(M,t)} = 0 \\ \overrightarrow{j_m(M,t)} = \mu(M,t)\,\vec{v}(M,t) \\ div\,(\mu\,\vec{v}) = \mu\,div\,\vec{v} + (\vec{v}\,.\,\overrightarrow{grad})\mu \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{\partial \mu(M,t)}{\partial t} + \mu\,div\,\vec{v} + \left(\vec{v}\,.\,\overrightarrow{grad}\right)\mu = 0$$

Ce que l'on peut écrire :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu\,div\,\vec{v} = 0$$

L'équation de conservation de la masse en trois dimensions peut s'écrire :

$$\frac{D\mu(M,t)}{Dt} + \mu(M,t)\, div\, \overrightarrow{v(M,t)} = 0$$

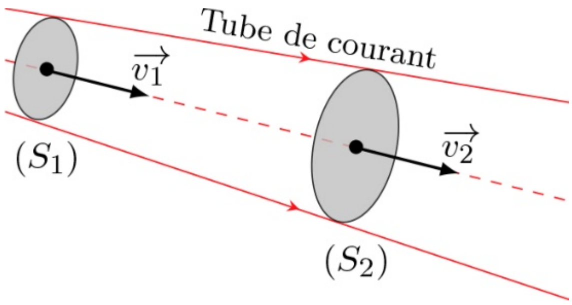
$\Rightarrow div\, \overrightarrow{v(M,t)} = 0$ pour un écoulement incompressible

Par conséquent à l'aide du théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_{M\in S} \overrightarrow{v(M,t)}.\overrightarrow{dS_M} = 0$$

$\Rightarrow$ La vitesse est à flux conservatif.

Imaginons un tube de courant :



Dans ce cas, la conservation du flux de vitesse s'exprime par

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{v(M_1,t)}.\overrightarrow{dS_{1,ext}} + \iint_{S_2} \overrightarrow{v(M_2,t)}.\overrightarrow{dS_{2,ext}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \iint_{S_1} \overrightarrow{v(M_1,t)}.\left(-\overrightarrow{dS_{2,ext}}\right) + \iint_{S_2} \overrightarrow{v(M_2,t)}.\overrightarrow{dS_{2,ext}} = 0$$

Pour un écoulement incompressible, le vecteur vitesse est à flux conservatif :

$$\begin{cases} div\, \overrightarrow{v(M,t)} = 0 \\ D_{ve} = D_{vs} \end{cases}$$

Autrement dit, dans un tube de courant, le resserrement des lignes de courant provoque une augmentation de la vitesse moyenne.

III-6) Signification « physique » de la divergence

On a donc :

$$div\,\vec{v} = -\frac{1}{\mu}\frac{D\mu}{Dt}$$

Or pour une particule de fluide :

$$\delta m = \mu\delta\tau = cste \Rightarrow Ln\mu + Ln\delta\tau = cste$$

On différentie d'où :

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{d(\delta\tau)}{\delta\tau} = 0$$

D'où :

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{\delta\tau}\frac{D(\delta\tau)}{Dt}$$

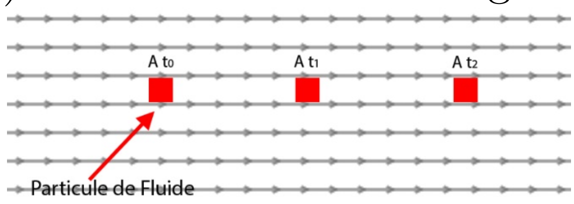
La divergence du champ de vitesse est égale au taux de variation du volume d'une particule de fluide.

- Exemples d'écoulement

- Considérons l'écoulement décrit par le champ de vitesse

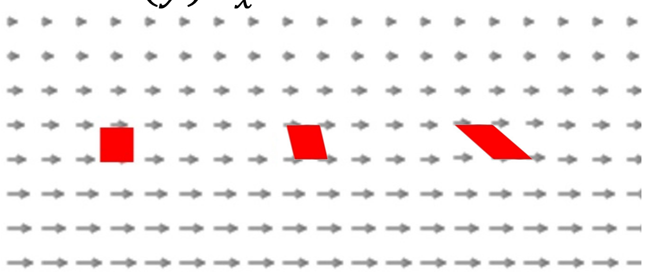
$$\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_x} \text{ où } v = cste \Rightarrow div\,\vec{v} = 0$$

Les lignes de courant sont des droites parallèles et l'écoulement est à divergence nulle. Les particules de fluides se déplacent sans se dilater (ni se déformer) comme le montre la figure suivante.



- Considérons un écoulement décrit par :

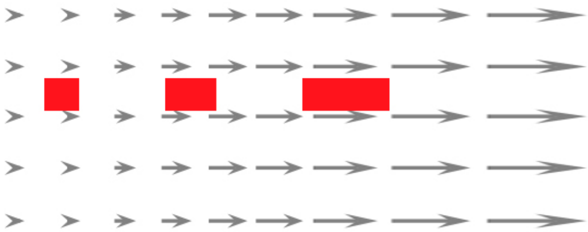
$$\vec{v} = v(y)\overrightarrow{u_x} \Rightarrow div\,\vec{v} = 0$$



La particule de fluide subit une torsion mais son volume reste identique ($div\,\vec{v} = 0$).

- Considérons un écoulement décrit par :

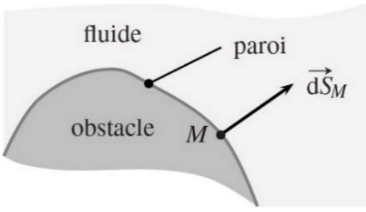
$$\vec{v} = v(x)\overrightarrow{u_x} \Rightarrow div\,\vec{v} \neq 0, si\ v(x)\ croît :\ div\,\vec{v} > 0$$



La particule de fluide subit un allongement, son volume augmente. ($div\,\vec{v} > 0$)

IV – Conditions aux limites

IV-1) Sur un obstacle



A travers la paroi le débit massique est nul d'où :

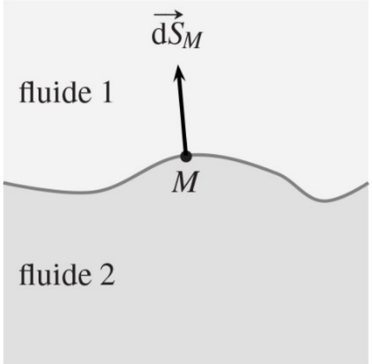
$$\overrightarrow{J_m}(M \in paroi, t).\overrightarrow{dS_M} = 0$$
$$\Rightarrow \vec{v}(M \in paroi, t).\overrightarrow{dS_M} = 0$$

La composante normale de la vitesse sur un obstacle (fixe) est nulle. Lorsque la paroi se déforme ou se déplace, on peut reproduire le même raisonnement que précédemment en se plaçant dans le référentiel lié à la paroi. On déduit la continuité des vitesses normales à la paroi.

En présence d'un obstacle il y a continuité de la composante normale de la vitesse :

$$\begin{cases} \vec{v}_{fluide}(M \in paroi, t).\vec{n} = \vec{v}_{paroi}(M \in paroi, t).\vec{n} \\ \vec{v}_{fluide}(M \in paroi, t).\vec{n} = 0\ si\ paroi\ fixe \end{cases}$$

IV-2) Deux fluides non miscibles



Le fait que les fluides soient non miscibles signifie qu'aucun fluide ne peut pénétrer dans l'autre : le débit volumique (et massique) de chacun des deux fluides à travers l'interface est donc nul. Pour les mêmes raisons que précédemment :

$$\vec{v}_{fluide1}(M \in interface, t).\vec{n} = \vec{v}_{fluide2}(M \in interface, t).\vec{n}$$

V – Ecoulement tourbillonnaire

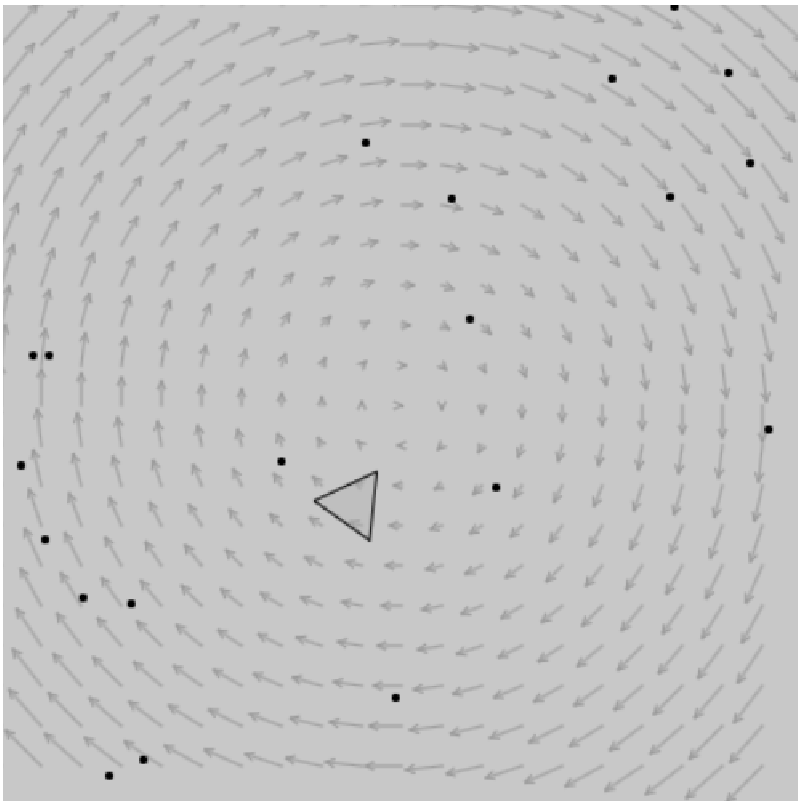
V-1) Interprétation physique du rotationnel

Commençons par étudier le champ des vitesses :

On étudie l'écoulement défini par le champ eulérien de vitesse : $\vec{v}(x,y,z,t) = -ky\,\overrightarrow{u_x} + kx\,\overrightarrow{u_y}$. C'est un écoulement tel que :

$$\begin{cases} div\,\vec{v} = \dfrac{\partial(-ky)}{\partial x} + \dfrac{\partial(kx)}{\partial y} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \left(\dfrac{\partial(kx)}{\partial x} - \dfrac{\partial(-ky)}{\partial y}\right)\overrightarrow{u_z} = 2k\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Plaçons une portion triangulaire en O. Quel est son mouvement. La figure suivante représente une carte de champ du champ de vitesse étudié.



Lien pour l'animation : https://femto-physique.fr/mecanique_des_fluides/cinematique.php

L'exemple montre que l'écoulement est non divergent (pas de modification de volume de la particule de fluide) mais que les particules de fluide « tourbillonnent » autour d'un point central à même vitesse angulaire ainsi on pose le vecteur tourbillon (ou rotation) comme étant égal à :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$$

Le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ représente, à un instant donné, le vecteur rotation d'une particule de fluide par rapport au référentiel d'étude R.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \underbrace{\vec{\omega}}_{Vorticité} = 2\,\vec{\Omega}$$

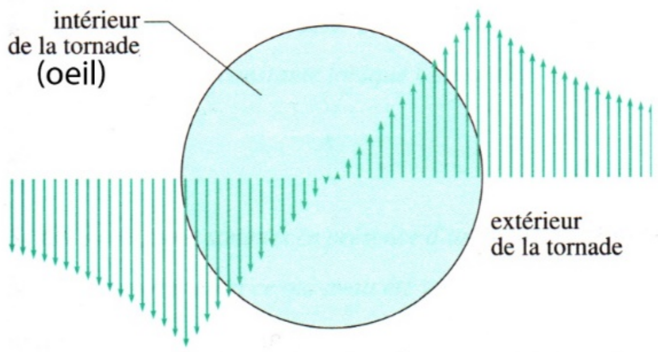
V-2) Tourbillon de Rankine

Une tornade est un phénomène météorologique défini comme « un coup de vent violent et tourbillonnant ». Un modèle simplifié de la tornade la présente comme un écoulement de fluide présentant une symétrie de révolution autour d'un axe $\overrightarrow{u_z}$.

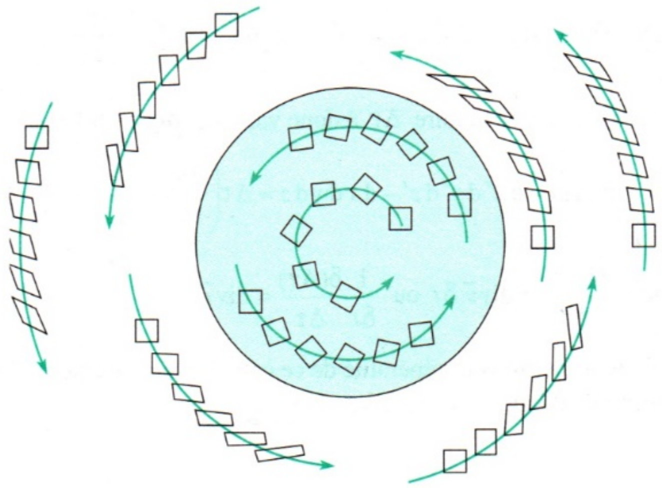
Le champ des vitesses associé est de la forme (en coordonnées cylindriques) :

$$\begin{cases} \vec{v}(r < a) = r\Omega\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{v}(r > a) = \dfrac{\Omega a^2}{r}\,\overrightarrow{u_\theta} \end{cases}$$

À l'intérieur d'un cylindre de rayon a, qui constitue « l'œil » de la tornade, la vitesse croît linéairement de 0 à sa valeur maximale puis décroît jusqu'à l'infini où le fluide est au repos. Notons la continuité de la vitesse en r = a.



Champ des vitesses d'un écoulement à l'intérieur et à l'extérieur d'une tornade.



Mise en évidence des transformations d'une cellule lors de cet écoulement.

Ce champ, partout de la forme $f(r)\overrightarrow{u_\theta}$ est à divergence nulle, donc l'écoulement est incompressible.

- Calculons $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}$ en tout point de la tornade, on a :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\,\vec{v}(r<a) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r^2\Omega)}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = 2\Omega\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{v}(r>a) = \frac{1}{r}\frac{\partial (a^2\Omega)}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = \vec{0} \end{cases}$$

Ce calcul montre l'existence d'un vecteur tourbillon uniforme à l'intérieur du cylindre de rayon a et nul à l'extérieur : l'écoulement est tourbillonnaire, mais le tourbillon est limité au cylindre de rayon a. On remarquera que dans l'œil, la particule de fluide n'est pas déformée, elle tourne autour du centre.

VI – Ecoulement irrotationnel

VI-1) Potentiel des vitesses

Un écoulement est qualifié d'irrotationnel si et seulement si, en tout point M de l'écoulement on a :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$$

Comme $\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ il existe une fonction scalaire $\phi(M, t)$, appelée potentiel des vitesses telle que :

$$\vec{v}(M,t) = \overrightarrow{grad}\ \underbrace{\phi(M,t)}_{m^2 s^{-1}}$$

Remarques :

- Le potentiel des vitesses est défini à une fonction du temps près.
- Le caractère irrotationnel d'un écoulement dépend du référentiel. Autrement dit, par un changement adéquat de référentiel, l'écoulement peut perdre son caractère irrotationnel.

VI-2) Circulation

Pour un écoulement irrotationnel vu que :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{0} \underbrace{\Rightarrow}_{Stokes} \oint_C \vec{v}.\overrightarrow{dl} = 0$$

Pour un écoulement irrotationnel, le champ des vitesses est à circulation conservative.

VI-3) Ecoulement irrotationnel et incompressible

Pour un écoulement irrotationnel et incompressible on a :

$$\Delta\Phi = 0 \; (Equation\ de\ Laplace)$$

La résolution de l'équation de Laplace, permet à l'aide de propriétés de symétrie, de conditions aux limites de retrouver l'expression du potentiel, puis du champ des vitesses.

⇒ Cf Annexe 2 sur le laplacien scalaire