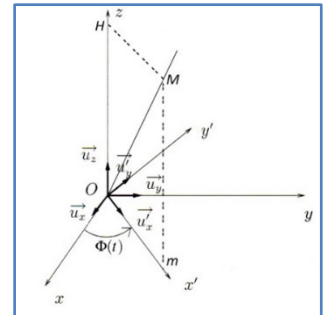


MC2 et MC3 – Synthèse

• *Lois de composition des vitesses et accélérations*

Composition				
$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$		$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$		
	Translation	Rotation uniforme	Rotation (Hors-Programme)	Cas général (Hors-Programme)
\vec{v}_e	$\left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right _R$	$\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$	$\vec{\Omega} \wedge \vec{O}'\vec{M}$	$\left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right _R + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}'\vec{M}$
\vec{a}_e	$\left. \frac{d^2\vec{OO}'}{dt^2} \right _R$	$-\Omega^2 \vec{HM}$	$\left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right _R \wedge \vec{O}'\vec{M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}'\vec{M})$	$\left. \frac{d^2\vec{OO}'}{dt^2} \right _R + \left. \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right _R \wedge \vec{O}'\vec{M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O}'\vec{M})$
\vec{a}_c	$\vec{0}$	$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M) _{R'}$	$2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M) _{R'}$	$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M) _{R'}$

- Dans les deux cas, la vitesse d'entraînement est la vitesse absolue du point coïncident, point lié à R qui coïncide avec M à l'instant t. De même, l'accélération d'entraînement est l'accélération absolue du point coïncident.
- H est le projeté de M sur l'axe de rotation. On note souvent $r = \|\vec{HM}\|$.



• *Forces d'inertie*

	Translation quelconque	Rotation uniforme autour d'un axe fixe
$\vec{\Omega}_{R'/R}$	$\vec{0}$	$\vec{\Omega} \vec{u}_z$
\vec{f}_{ie}	$-m\vec{a}(O')$	$m\Omega^2 \vec{HM}$
\vec{f}_{ic}	$\vec{0}$	$-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$

• *Lois de la dynamique en RNG*

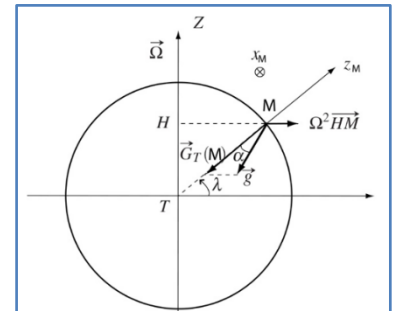
PFD	$m \frac{d\vec{a}(M) _{R'}}{dt} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$
TMC	$\frac{d\vec{L}_A(M) _{R'}}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{ic})$
TEC	$\frac{dE_c}{dt} \Big _{R'} = P(\vec{f}) \Big _{R'} + P(\vec{f}_{ie}) \Big _{R'}$
Energie potentielle d'entraînement	Translation où $\vec{a}_e = \vec{cste}$: $E_{pe} = m\vec{a}_e \cdot \vec{O}'\vec{M} + cste$ Rotation uniforme : $E_{pe} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2 + cste$
TEM	$E_m = E_c + E_p + E_{pe} = cste$

• *Caractère galiléen approché des référentiels courants*

Le référentiel géocentrique R_g est en translation elliptique par rapport au référentiel de Copernic R_C . Le référentiel terrestre R_T est en rotation uniforme à vitesse angulaire Ω autour d'un axe fixe par rapport à R_g . Le référentiel terrestre étant non galiléen le PFD s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{R_T} = m\vec{g} + \vec{f} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \text{ où } \vec{g} = \vec{G}_T(M) + \Omega^2 \vec{HM}$$

Le référentiel terrestre peut toutefois être considéré comme galiléen pour l'étude des phénomènes se produisant au voisinage de la surface terrestre, et courts devant la journée.

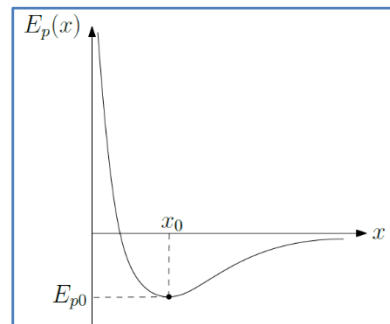


• *Statique des fluides en RNG*

En RNG, la relation fondamentale de statique des fluides s'écrit : $\vec{grad} p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_e)$

SVF : MC1 - Mécanique du point

- Établir les expressions des énergies potentielles élastique, gravitationnelle et coulombienne.
- Soit un point M matériel de masse m se déplaçant sur la droite (Ox) et soumis à l'énergie potentielle $E_p(x)$. Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.
- Dans le cas d'un mouvement à force centrales, montrer que le mouvement est plan et établir l'expression de la constante des aires.
- Retrouvez les expressions de la première vitesse cosmique, puis de la seconde vitesse cosmique.
- Démontrer la troisième loi de Képler en considérant un mouvement circulaire.
- Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique ($E_m = -\frac{1}{2a}$).
- Discuter des trajectoires possibles grâce à l'énergie potentielle effective
- Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ électrostatique uniforme est parabolique.
- Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ magnétostatique uniforme est un cercle si \vec{v}_0 est dans un plan orthogonal à \vec{B} . Une droite si \vec{v}_0 colinéaire à \vec{B} , une hélice dans un cas plus général.
- Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule simple.
- Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule de torsion.
- Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant.

Exercices classiques à connaître :

- MC14 : Voyage interplanétaire de la terre à mars (trajectoire d'Hohman)
- MC122 : Déflexion électrique
- MC123 : Mouvement de gouttelettes chargées
- MC130 : Diffusion de Rutherford (plus difficile)

- Établir les expressions des énergies potentielles de pesanteur, élastique, gravitationnelle et coulombienne.

- Énergie potentielle de pesanteur
- Soit : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ (axe Oz ascendant) d'où :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot d\vec{OM} = mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ &\Leftrightarrow dE_p = mgdz \\ &\Rightarrow E_p = mgz + C \end{aligned}$$

Remarque : Si l'axe Oz est descendant on aura : $E_p = -mgz + C$

- Un ressort de raideur k ayant subi un allongement $\Delta x = x - x_0$ exerce une force de rappel élastique dans la direction de l'allongement :

$$\vec{f} = -k(x - x_0)\vec{u}_x$$

Donc :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot d\vec{OM} = k(x - x_0)\vec{u}_x \cdot (dx\vec{u}_x + \dots) \\ &\Leftrightarrow dE_p = k(x - x_0)dx \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + C \end{aligned}$$

où C est une constante. On prend généralement comme référence des énergies potentielles $E_p=0$ lorsque le ressort est à sa longueur à vide $\Rightarrow x - x_0 = 0$.

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

- Énergie potentielle gravitationnelle et coulombienne :

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{k}{r^2}\vec{u}_r \text{ où } k = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} = -Gmm_p \\ \Rightarrow dE_p &= -\vec{f} \cdot d\vec{OM} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + \dots) \Leftrightarrow dE_p = -\frac{k}{r^2}dr \Rightarrow E_p = \frac{k}{r} + C \end{aligned}$$

Or: $E_p = 0$ lorsque $r \rightarrow \infty \Rightarrow E_p = \frac{k}{r}$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{Gmm_p}{r} \text{ ou } E_p = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Soit un point M matériel de masse m se déplaçant sur la droite (Ox) et soumis à l'énergie potentielle $E_p(x)$. Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par x.

On développe l'énergie potentielle à l'ordre 2 autour de la position d'équilibre x_0 :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0} + o(x - x_0)$$

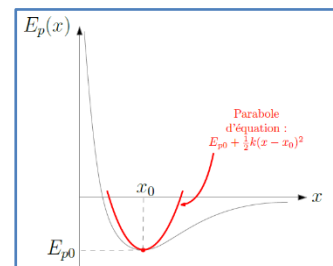
Par définition de la position d'équilibre : $\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$, on pose $k = \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x=x_0}$

$$\Rightarrow E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

Ainsi on approxime autour de la position d'équilibre la courbe par un puits parabolique, qui correspond à celui d'un oscillateur harmonique de position d'équilibre x_0 . Il est donc normal de retrouver l'équation différentielle d'un OH.

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u}_x = -k(x - x_0)\vec{u}_x \Rightarrow m\ddot{x} = -k(x - x_0)$$

On pose $X = x - x_0$ et on obtient : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



c) Dans le cas d'un mouvement à force centrales, montrer que le mouvement est plan et établir l'expression de la constante des aires.

- Mouvement plan :

Un point matériel soumis à une force centrale possède forcément un moment cinétique constant. En effet :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge f\vec{u}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \text{cste} \vec{e}$$

L'axe \vec{u}_z , est pris selon la direction fixe \vec{L}_0 . D'après les propriétés du produit vectoriel,

$$\vec{OM} \cdot \vec{L}_0 = \vec{OM} \cdot (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{OM} \cdot \vec{u}_z = \vec{0}$$

Ainsi, le vecteur position reste toujours orthogonal à \vec{u}_z : la trajectoire est plane, contenue dans le plan $z = 0$.

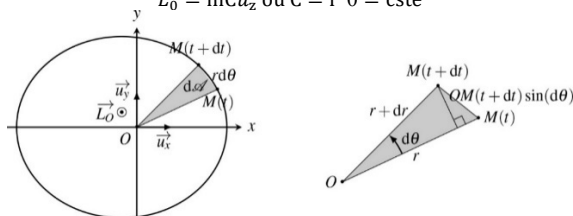
- Loi des aires

Calculons \vec{L}_0 :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On introduit la constante des aires qu'on note C tel que :

$$\vec{L}_0 = mC\vec{u}_z \text{ où } C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$$



Cette constante peut s'interpréter en termes de vitesse aréolaire. On appelle vitesse aréolaire V la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire dA définie par la trajectoire dans le plan du mouvement.

Or :

$$dA = \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Donc :

$$V = \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

La loi des aires représente la deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur repérant le mobile balaie pendant des durées égales des aires égales.

d) Retrouvez les expressions de la première vitesse cosmique, puis de la seconde vitesse cosmique.

- Première vitesse cosmique :

Le cas le plus simple de trajectoire liée est la trajectoire circulaire. Son rayon est noté r . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -\frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}_r \\ \Rightarrow m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \\ \Rightarrow m(-r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r^3}} \end{aligned}$$

Au final, la vitesse sur l'orbite circulaire de rayon r s'écrit :

$$v_1 = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r}} = 7,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ dans le cas de la terre}$$

où m' est la masse du centre attracteur.

C'est ce que l'on nomme la première vitesse cosmique. C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet pour le satelliser.

- Deuxième vitesse cosmique

Il est intéressant de connaître la vitesse limite, pour laquelle l'objet partira au loin sans revenir, c'est ce que l'on nomme la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique. C'est la limite entre les trajectoires fermées et ouvertes c'est-à-dire la trajectoire parabolique dont l'énergie mécanique est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm'}{r} = 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm'}{r}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \text{ dans le cas de la terre}$$

e) Démontrer la troisième loi de Kepler en considérant un mouvement circulaire.

La période du mouvement d'une masse m autour d'un astre immobile de masse m' est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{Gm'}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler : pour des astres orbitant autour d'un corps donné, le rapport du carré de la période sur le cube du rayon de la trajectoire a toujours la même valeur, liée à la masse du corps attracteur. Il est à noter que la troisième loi de Kepler reste valide pour les trajectoires elliptiques, à condition de remplacer le rayon par le demi-grand axe a de l'ellipse.

f) Dans le cas d'un mouvement à forces centrales, démontrez l'expression de l'énergie mécanique sur une orbite circulaire, puis elliptique ($E_m = -\frac{|k|}{2a}$).

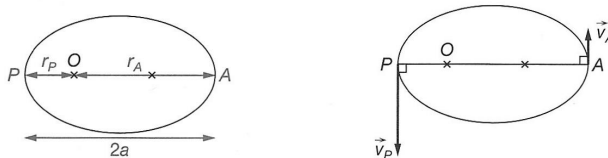
- Mouvement circulaire

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2}m \frac{Gm'}{r} - \frac{|k|}{r} = \frac{1}{2} \frac{|k|}{r} - \frac{|k|}{r} = -\frac{|k|}{2r}$

- Mouvement elliptique

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse m' immobile en O, l'énergie mécanique Em, est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$



En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit en ces points :

$$v = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \text{ aux points A et P (vitesse orthoradiale)}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \text{ aux points A et P} \Rightarrow r^2 - \frac{1}{2} \frac{mC^2}{E_m} + \frac{Gmm'}{E_m} r = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives, r_A et r_p tel que:

$$r = -\frac{1}{2} \frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \Rightarrow r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

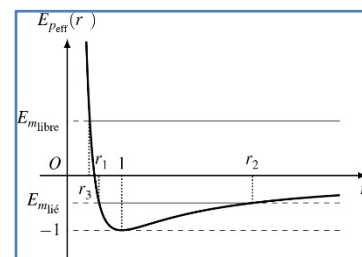
D'où : $E_m = -\frac{|k|}{2a}$

Pour une orbite parabolique $E_m = 0$ et pour une orbite hyperbolique : $E_m = +\frac{|k|}{2a}$

g) Discuter des trajectoires possibles grâce à l'énergie potentielle effective

Voici le tracé de l'énergie potentielle effective ainsi on retrouve :

- Un état de diffusion si $E_m > 0$ (mouvement hyperbolique)
- Un état lié si $E_m < 0$ (mouvement elliptique) et circulaire si E_m correspond au minimum de $E_{p,eff}$
- Un état de diffusion si $E_m = 0$ (mouvement parabolique)



h) Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ électrostatique uniforme est parabolique.

Soit une particule de masse m et de charge q se déplaçant dans une région où existe un champ $\vec{E} = E\vec{u}_z$ et dont la vitesse initiale vaut $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ et la position initiale se situe en $O(0,0,0)$.

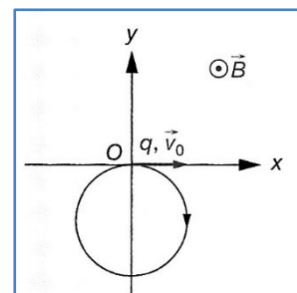
On applique le PFD à m dans un référentiel supposé galiléen :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \text{ équation d'une parabole } z = ax^2$$

i) Montrez que la trajectoire d'une charge q dans un champ magnétostatique uniforme est un cercle si \vec{v}_0 est dans un plan orthogonal à \vec{B} . Une droite si \vec{v}_0 colinéaire à \vec{B} , une hélice dans un cas plus général.

- Mouvement circulaire

Une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ est perpendiculaire au champ magnétique.



Le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$ montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient : $m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} B_0\dot{y} \\ -B_0\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$

Or $\ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0 \Rightarrow$ la trajectoire est plane si $v_{0z} = 0$

L'intégration des projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y donne : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$ (1)

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$ donnent : $\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$

Donc (1) peut s'écrire : $\begin{cases} \dot{x} = \frac{qB_0}{m} y - \frac{q^2 B_0^2}{m^2} x \\ \dot{y} = -\frac{qB_0}{m} x - \frac{q^2 B_0^2}{m^2} y - \frac{qB_0}{m} v_0 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases}$ où $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ pulsation cyclotron si on suppose $q > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases} \text{ avec comme conditions initiales } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on a : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y+R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y+R)^2 = R^2$, on retrouve bien l'équation d'un cercle de centre $(0, -R)$ et de rayon R si $q > 0$.

- Mouvement rectiligne

Si \vec{v}_0 colinéaire à \vec{B} , il n'y a pas de force initiale et donc pas de modification de \vec{v}_0 ... donc le mouvement sera rectiligne

- Mouvement hélicoïdal

- o Si \vec{v}_0 est quelconque il va se rajouter une composante sur $z : z = v_{0z}t + z_0$ ainsi le mouvement en plus d'être circulaire va monter, ce qui va former une trajectoire hélicoïdale de pas $h = v_{0z}T = v_{0z} \cdot \frac{2\pi}{\omega_c}$
- o Les équations en $x(t)$ et $y(t)$ reste les mêmes à condition de remplacer v_0 par v_{0x} .

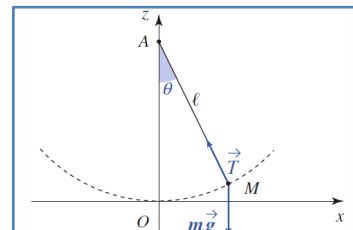
j) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule simple.

On projette le PFD sur l'axe orthoradial (afin de ne pas avoir \vec{T}) :

$$m(2l\dot{\theta} + l\ddot{\theta}) = -mg \sin\theta \text{ avec } l \text{ constant d'où :}$$

$$l\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Dans le cas de petits angles $\sin\theta \sim \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$



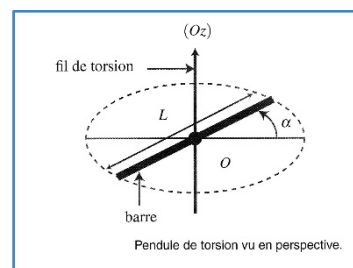
k) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule de torsion.

On considère une barre solide horizontale de masse m , de longueur L , suspendue en son milieu O à un fil de torsion vertical de constante de torsion C . On étudie des mouvements dans lesquels le fil reste vertical et la barre tourne autour du fil avec un mouvement oscillatoire, tout en restant dans un plan horizontal.

On applique à la barre la loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) fixe dans le référentiel R galiléen : $\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\alpha} = \Gamma = -C\alpha$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{C}{J_z}$$

Comme la loi de Hooke pour les ressorts, la loi de rappel est aussi un modèle pour les petits angles, c'est la raison pour laquelle on retrouve une nouvelle fois l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.



l) Retrouvez l'équation différentielle d'un pendule pesant.

Le solide est soumis à :

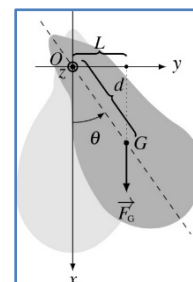
- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

$$M_z = -mgd \sin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\theta} = M_z = -mgd \sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd \sin\theta}{J_z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z}$$



SVF : MC2 et MC3 – Référentiels non galiléens

- a) Retrouver l'expression du poids apparent.
- b) Montrer que les mouvements horizontaux dans le référentiel terrestre sont déviés vers la droite dans l'hémisphère Nord.
- c) Déviation vers l'est.
- d) Étude statique des marées. Expliquer le phénomène des marées dans les hypothèses d'abstraction de rotation du soleil et en ne considérant que la lune.
- e) Expliquer la présence de marées de vives eaux (fortes) et de mortes eaux (faibles)
- f) Une perle P , assimilée à un point matériel de masse m , est enfilée sur un cerceau de centre C et de rayon a . La perle se déplace sans frottement sur le cerceau. Le cerceau, situé dans un plan vertical, est entraîné par un moteur qui le fait tourner à vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical. Par la méthode de votre choix, retrouvez l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin\theta \left(-\frac{g}{a} + \omega^2 \cos\theta \right)$$
- g) Déterminer l'équation de la surface $\mathbf{z}(\mathbf{r})$ pour un cylindre rempli d'un liquide en rotation.

Exercices classiques à connaître :

- MC31 : Sismographe
- MC34 : Bille dans un tube ou MC38 : Lanceur de ball-trap
- MC36 : Déviation vers l'est

a) Retrouver l'expression du poids apparent.

Le point M est soumis :

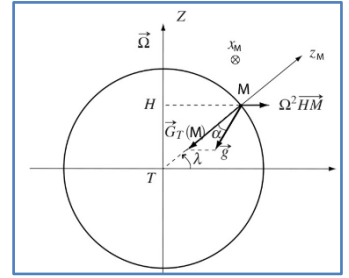
- A un certain nombre de forces associées à la situation étudiée : la tension d'un fil, la réaction d'un support, ...
- A la force d'attraction gravitationnelle de la Terre : $m\vec{G}_T(M)$
- A la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ où \vec{a}_e est l'accélération du point coïncidant dans le référentiel géocentrique
- A la force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$ en notant $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation de la Terre sur elle-même et \vec{v} la vitesse du point par rapport au référentiel terrestre.

Le poids apparent d'un corps, est défini comme :

$$\vec{P} = m(\vec{G}_T(M) - \vec{a}_e)$$

$$\Leftrightarrow \vec{P} = m(\vec{G}_T(M) + \Omega^2 \overline{HM})$$

Le terme axifuge est 300 fois plus petit à l'équateur que le terme gravitationnel.



b) Montrer que les mouvements horizontaux dans le référentiel terrestre sont déviés vers la droite dans l'hémisphère Nord.

Dans les mouvements horizontaux, seule la force de Coriolis peut être responsable d'une déviation.

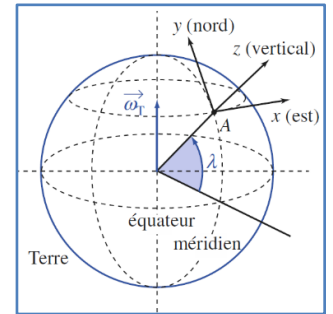
$$\vec{f}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \cos \lambda \dot{z} - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_c(\text{plan horizontal}) = 2m\Omega \begin{pmatrix} \dot{y} \sin \lambda \\ -\dot{x} \sin \lambda \\ \dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}$$

Si l'on suit un méridien dans l'hémisphère Nord, en se dirigeant vers le pôle Nord, on vérifie que $\vec{f}_c = 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda \vec{u}_x$ est une force dirigée vers la droite car $\dot{y} > 0$ et $\sin \lambda > 0$. (On peut aussi le vérifier avec la règle des trois doigts).

Si l'on suit un méridien dans l'hémisphère Sud, en se dirigeant vers le pôle Nord, on vérifie que $\vec{f}_c = 2m\Omega \dot{y} \sin \lambda \vec{u}_x$ est une force dirigée vers la gauche car $\dot{y} > 0$ et $\sin \lambda < 0$. On retrouvera de même pour les autres situations.

Si l'on suit un parallèle dans l'hémisphère Nord, en se dirigeant vers l'est, on vérifie : $f_{c,y} = -2m\Omega \dot{x} \sin \lambda$ et $f_{c,z} = +2m\Omega \dot{x} \cos \lambda$. Ainsi dans le plan horizontal $f_{c,y} = -2m\Omega \dot{x} \sin \lambda < 0$ est une force dirigée vers la droite...On retrouvera de même pour les autres situations.



c) Déviation vers l'est

Envisageons une chute libre dans le référentiel terrestre sans tenir compte de la perturbation liée à la force de Coriolis avec pour CI : $z(0) = h$ et $\dot{z}(0) = 0$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

On envisage maintenant la perturbation ainsi :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega \begin{pmatrix} \cos \lambda \dot{z} - \dot{y} \sin \lambda \\ \dot{x} \sin \lambda \\ -\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega(\cos \lambda \dot{z} - \dot{y} \sin \lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} = 2\Omega \dot{x} \cos \lambda - g \end{cases}$$

On applique la méthode des perturbations c'est-à-dire on injecte les solutions obtenues sans perturbation (dites à l'ordre zéro) pour calculer la force de Coriolis (à l'ordre 1) ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega \cos \lambda \times (-gt) \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 - g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}gt^3 \times \Omega \cos \lambda \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}gt^3 \Omega \cos \lambda \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + h \end{cases}$$

D'où :

$$x_f = \frac{1}{3}gt_f^3 \Omega \cos \lambda = \frac{1}{3}g\Omega \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} > 0$$

On obtient ainsi une déviation vers l'est.

On peut continuer le calcul en reprenant les résultats obtenus et en les réinjectant on obtient une force de Coriolis calculée à l'ordre 2 qui rajoute une force infime dirigée vers le sud.

d) Étude statique des marées. Expliquer le phénomène des marées dans les hypothèses d'abstraction de la rotation de la lune autour de la terre, en ne considérant que la lune (et que tous les mouvements se font dans le plan de l'écliptique).

Simplifions le problème en :

- Négligeant, la rotation de la lune autour de la terre, (c'est la terre qui tourne sur elle-même dont on tient compte)
- Négligeant, dans un premier temps, le terme de marée dû à la présence du Soleil.
- Supposant, la terre recouverte d'une unique masse d'eau appelée bourrelet océanique.

Nous appelons théorie statique des marées l'explication du phénomène des marées basée sur ces hypothèses simplificatrices.

Appliquons le PFD en M, par exemple dans le référentiel géocentrique supposé non galiléen (indice T pour terre, indice L pour lune)

$$m \vec{a}(M) = m\vec{G}_L(M) + m\vec{G}_T(M) + \frac{F_{autres}}{0} - m\vec{a}_e = m\vec{G}_L(M) + m\vec{G}_T(M) - m\vec{a}_e(O) \quad (\text{indice L pour lune})$$

La force de Coriolis est nulle car on a affaire à un mouvement de translation elliptique entre le référentiel géocentrique et de Copernic.

Déterminons l'accélération d'entraînement. Pour cela appliquons le PFD à la terre au point O dans le référentiel de Copernic :

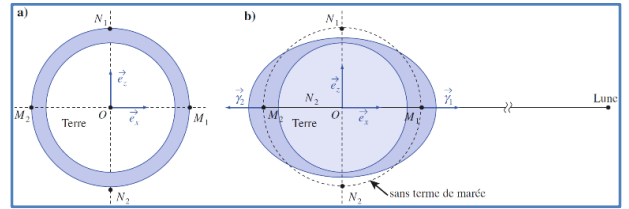
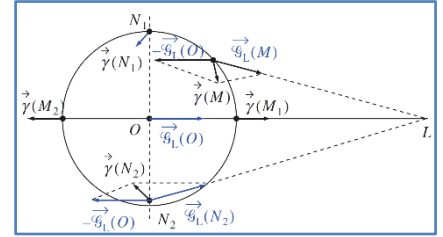
$$M_T \vec{a}(O) = M_T \vec{G}_L(O)$$

Donc :

$$m \vec{a}(M) = m \vec{G}_T(M) + m (\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O))$$

$$\Rightarrow m \vec{a}(M) = m \vec{G}_T(M) + m \vec{\gamma}(M) \text{ où } \vec{\gamma}(M) = (\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O))$$

Le terme $\vec{\gamma}(M) = (\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O))$ est appelé terme différentiel ou terme de marées. On l'a représenté en quatre points de l'équateur pour une échelle des distances non respectées. Ainsi ce terme va entraîner une dénivelation maximale de 0,6m par rapport à l'absence de marées. Les bourrelets océaniques admettent constamment l'axe (Oy) comme axe de révolution ; nous constatons ainsi que pour un point lié à la Terre il existera deux marées hautes par jour (marées hautes espacées de 12 heures, la hauteur des marées étant plus importante à l'équateur).

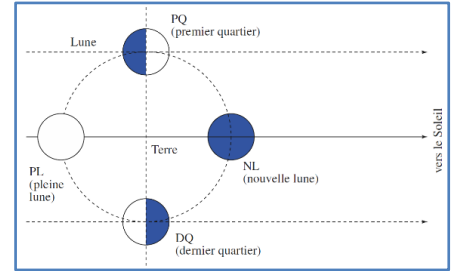


En fait, comme la Lune a un mouvement circulaire apparent autour de la Terre de durée de l'ordre de 29 jours, il y aura retard d'environ 50 min par jour des marées hautes en un lieu.

e) Expliquer la présence de marées de vives eaux (fortes) et de mortes eaux (faibles)

Si on tient maintenant compte, de la rotation de la lune autour de la terre et de la présence du soleil par moment les effets de marée de la lune et du soleil vont s'additionner c'est le cas :

- Aux positions NL et PL : on parle de marées de vives eaux.
- Á l'inverse en PQ et DQ, les termes de marées se retranchent (compensation du bourrelet en N_1N_2 et M_1M_2), les marées sont alors faibles, on parle de marées de mortes eaux.



f) Une perle P, assimilée à un point matériel de masse m, est enfilée sur un cerceau de centre C et de rayon a. La perle se déplace sans frottement sur le cerceau. Le cerceau, situé dans un plan vertical, est entraîné par un moteur qui le fait tourner à vitesse angulaire constante ω autour d'un diamètre vertical. Par la méthode de votre choix, retrouvez l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin \theta \left(-\frac{g}{a} + \omega^2 \cos \theta \right)$$

Dans une formulation de ce type, je trouve la méthode énergétique plus simple à mettre en place : Calculons les différentes énergies mises en jeu :

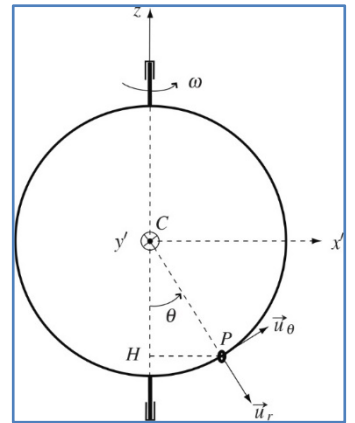
$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 \\ E_{pp} = -m g a \cos \theta + cste \\ E_{pe} = -\frac{1}{2} m \omega^2 H M^2 + cste = -\frac{1}{2} m \omega^2 (a \sin \theta)^2 + cste \end{cases}$$

$$\text{Or : } \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m a^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + m g a \dot{\theta} \sin \theta - m \omega^2 \dot{\theta} a^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow m a^2 \ddot{\theta} = -m g a \sin(\theta) + m \omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{a} \sin(\theta) + \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin \theta \left(-\frac{g}{a} + \omega^2 \cos \theta \right)$$



g) Déterminer l'équation de la surface z(r) pour un cylindre rempli d'un liquide en rotation.

On applique le PFD à une particule de fluide dans le RNG lié au cylindre d'où :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_g)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} p = \mu(\vec{g} + \omega^2 \overrightarrow{HM}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \omega^2 r & (1) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow p(r, z) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 + f(z)$$

$$(2) \Rightarrow p(r, z) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - \mu g z + cste$$

La surface libre est isobare d'où :

$$\frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - \mu g z = cste \Leftrightarrow z = \frac{1}{2g} \omega^2 r^2 + z_0$$

Pour déterminer z_0 , on utilise la conservation du volume en découpant le cylindre en couches cylindriques de largeur r et r + dr, ainsi : (H hauteur de l'eau au repos et R rayon du cylindre).

$$V = \pi R^2 H = \int_0^R d\tau = \int_0^R z(r) \times 2\pi r dr = \int_0^R \left(\frac{1}{2g} \omega^2 r^2 + z_0 \right) \times 2\pi r dr = \int_0^R \left(\frac{\omega^2 r^3}{g} + 2r z_0 \right) \times \pi dr = \pi \left(\frac{\omega^2 R^4}{4g} + R^2 z_0 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 R^2}{4g} + z_0 = H \Rightarrow z_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2g} \omega^2 \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + H$$