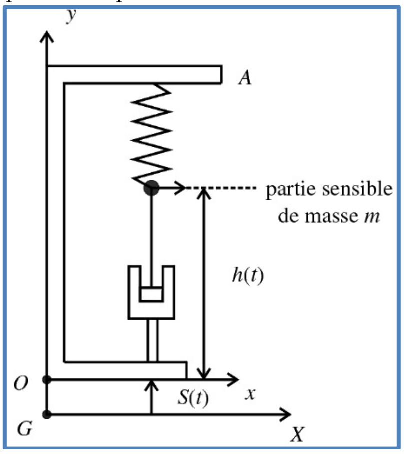
MC3 – Dynamique en référentiel non galiléen

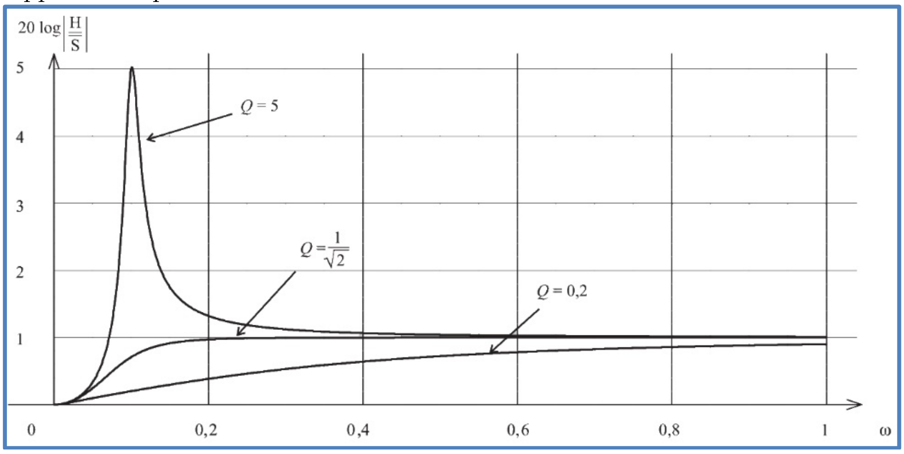
A – Travaux dirigés

MC31 – Sismographe

La partie sensible du sismographe pendulaire est une masse munie d'un index et d'une tige. Cet ensemble de masse m assujetti à se déplacer verticalement, est suspendu à un ressort. Le ressort est fixé en A sur un bâti. La partie sensible (masse + index + tige) est par ailleurs reliée à un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $-\lambda\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la masse dans le référentiel lié au bâti. Le référentiel terrestre d'origine G est galiléen.

Un tremblement de terre est modélisé par une vibration verticale harmonique de translation : $S(t) = S_0\cos(\omega t)$ où $S(t)$ repère le déplacement vertical du sol par rapport au référentiel galiléen du lieu. On définit $H(t)$ la grandeur qui repère le déplacement de la masse m par rapport au repos dans le référentiel lié au bâti.





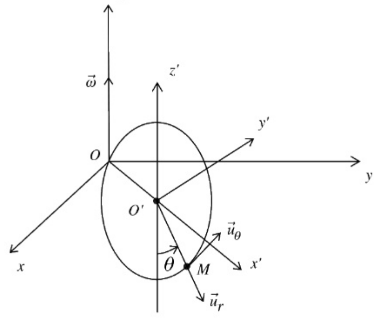
1. Établir l'équation différentielle en H(t) du mouvement de la masse. Quel est le sens physique de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q ?
2. On représente graphiquement $20\,log\left|\frac{H}{S}\right|$ en fonction ω.

L'étude du spectre de Fourier des vibrations sismiques montre que leurs périodes se répartissent sur une gamme qui va de 0,1 s à 100 s. En fait, l'essentiel de l'énergie transportée par des ondes longitudinales, assez loin de l'épicentre, est dans le domaine de période allant de 1 s à 10 s. On souhaite une réponse uniforme de l'appareil dans la gamme de fréquence correspondante. Quel régime de fonctionnement doit-on choisir ? Quel est l'inconvénient majeur ? Comment doit-on choisir la masse ?

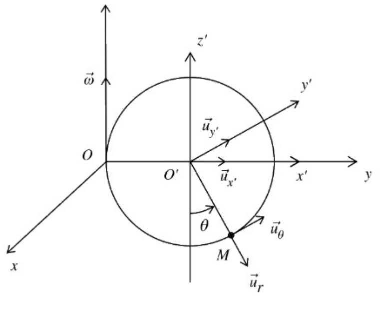
Rép : 1. $\ddot{H} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{H} + \omega_0^2 H = \omega^2 S_0\cos(\omega t)$ 2. On peut choisir $\omega \gg \omega_0\ et\ Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$…masse élevée.

MC32 – Circonférence en rotation

Une circonférence (C) de centre O' et de rayon a, située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz, d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$. Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait $\overrightarrow{O'M}$ avec la verticale descendante passant par O'. θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.



Position quelconque de la circonférence



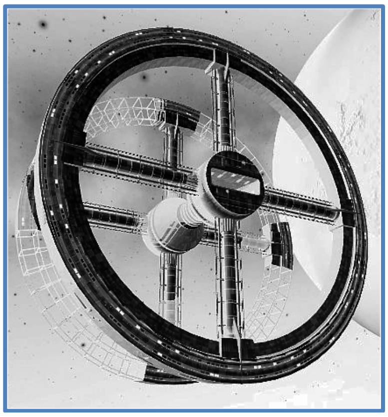
Cas où le plan de la circonférence est confondu avec le plan (yOz)

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le référentiel $R' = \{O', \overrightarrow{u_{x'}}, \overrightarrow{u_{y'}}, \overrightarrow{u_{z'}}, t\}$ lié au cercle et en rotation dans le référentiel galiléen $R = \{O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}, t\}$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ.
2. Retrouver l'équation différentielle par une méthode énergétique.
3. Montrer que les positions d'équilibre dans R' vérifient : $a\omega^2(1 + sin\theta) = g\ tan\theta$. On désire que l'équilibre stable corresponde à $\theta = \theta_0 = 30°$. Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que $a = 0{,}2\ m\ et\ g = 9{,}8\ ms^{-2}$?

Rép : 1°) $a\ddot{\theta} = -gsin\theta + \omega^2 a(1 + sin\theta)cos\theta$ 2°) $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2(-2sin\theta - \sin^2\theta) + mga(1 - cos\theta) \ldots$ 3°) $\omega = 4{,}35\ rad\ s^{-1}$

MC33 – Pesanteur artificielle

Dans le film 2001, l'odyssée de l'espace de Stanley Kubrick, un vaisseau spatial constitué d'un tore tourne à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen. Alors qu'ils sont loin de la terre, les astronautes vivent dans le tore avec une gravité artificielle identique à celle sur terre. On voit même dans le film, un des astronautes effectué un jogging dans ce tore.



1. Proposer un rayon de vaisseau et une vitesse angulaire de rotation afin que les astronautes soient soumis à une pesanteur identique à celle existant sur terre. Pour des raisons physiologiques on veiller à ce que l'écart de gravité entre la tête et les pieds n'excèdent pas 10%.
2. Expliquer pourquoi il peut être très fatigant de courir dans le vaisseau.
3. Le sens de rotation du footing est-il important ?

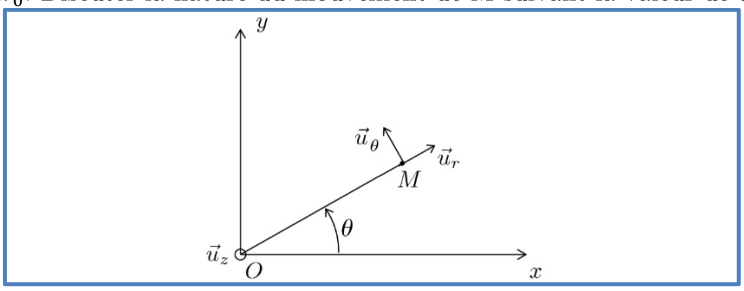
Rép : 1. R=18m et $\omega = 0{,}738\ rad/s$ 2. Force de Coriolis… 3. Oui, il vaut mieux si on veut être un champion…

B – Exercices supplémentaires

MC34 – Bille dans un tube

On considère une bille M de masse m susceptible de se déplacer sans frottement à l'intérieur d'un tube cylindrique. Les grandeurs $r_0\ et\ v_0$ caractérisent la position et la vitesse de M à l'instant initial t=0 dans le repère lié au tube. Le tube de longueur 2l est dans le plan horizontal et tourne autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω constante.

1. Déterminer l'équation différentielle en r du mouvement de M.
2. Calculer le temps τ que mettra M pour sortir du tube avec $l = 0{,}1\ m\ ; r_0 = 0{,}01\ m\ ;\ v_0 = 0 m.s^{-1}\ et\ \omega = 2\ rad.s^{-1}$.
3. Un ressort enfilé dans le tube est fixé à son extrémité en O et à son autre extrémité à la bille M. La longueur à vide du ressort est $2r_0$. Discuter la nature du mouvement de M suivant la valeur de ω.



Rép : 1. $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$ 2. Par résolution numériques : $\tau = 1{,}5s$ 3. $Si\ \omega \geq \sqrt{\frac{k}{m}}$, le système diverge sinon on retrouve un oscillateur harmonique.

MC35 – Equilibre d'un fluide dans un RNG

Un cylindre de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h. L'eau est en équilibre avec la pression atmosphère à la pression p_0. On met en rotation le cylindre autour de son axe jusqu'à ce qu'il atteigne la vitesse angulaire ω. On constate que l'eau se met à tourner et finit par être en équilibre par rapport au cylindre. On rappelle le gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

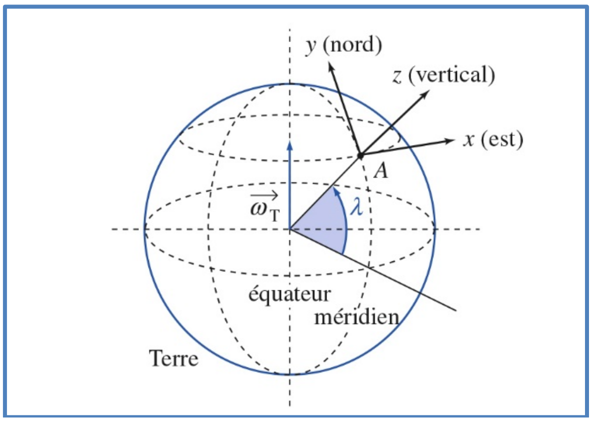
1. Déterminer la pression en tout point de l'eau.
2. Montrer que l'équation de la surface libre est une parabole du type :
$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + B$$
3. Calculer la constante B.

Rép : 1. $p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + A$ 2. $p_{surface} = p_0$ … 3. Conservation du volume : $B = h - \frac{\omega^2}{g}\frac{R^2}{4}$

MC36 – Déviation vers l'est

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude h dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude λ à la surface de la Terre.

1. En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement, établir les expressions de x(t), y(t) et z(t) ainsi que le temps de chute. Faire l'application numérique pour h=150m et $g = 9{,}81\ ms^{-2}$.
2. Vérifier le caractère correctif du terme de Coriolis. Exprimer de façon générale la force de Coriolis, et identifier le terme correctif principal donné par cette force.
3. Écrire, au premier ordre de correction, les équations du mouvement avec la force de Coriolis. Vérifier la « déviation vers l'Est » annoncée, et faire l'application numérique à la latitude de 50°.



Rép : 1. $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}53s$ 2. $\overrightarrow{F_{ic}} = -2m\,\omega_T cos\lambda \dot{z}\,\overrightarrow{u_x}$ 3. x=2,6cm vers l'est.

MC37 – Fusée de Tryphon

Dans l'album de Tintin « On a marché sur la Lune » l'accélération de la fusée maintient une pesanteur égale à la pesanteur terrestre d'après le Professeur Tournesol. On considère le référentiel géocentrique R_G galiléen. On rappelle la force d'attraction gravitationnelle exercée par un astre A de masse m_A sur un corps M de masse m : $\vec{A}_A(M) = -Gm_A m \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{AM^3}$.

1. Lors de la première phase du voyage, la fusée s'éloigne de la Terre. Quelle accélération $\overrightarrow{a_e}$ la fusée doit-elle avoir par rapport au référentiel R_G pour que les passagers ressentent la même pesanteur qu'à la surface de la Terre ? On note R_T le rayon de la Terre et l'on considère que l'attraction lunaire est négligeable.
2. Dans la deuxième phase du voyage, la fusée s'est retournée et n'est plus soumise qu'à l'attraction lunaire. Quelle doit-être la nouvelle accélération pour que les passagers aient l'impression d'être sur Terre ? On considérera que le référentiel lié à la Lune est aussi galiléen.

Rép : 1. $\vec{a} = GM_T\left(\frac{1}{R_T^2} - \frac{1}{(R_T+h)^2}\right)\overrightarrow{u_z}$ 2. $\vec{a} = G\left(\frac{M_T}{R_T^2} + \frac{M_L}{(R_T+h)^2}\right)\overrightarrow{u_z}$, h : altitude par rapport à la surface lunaire.

MC38 – Lanceur de ball-trap

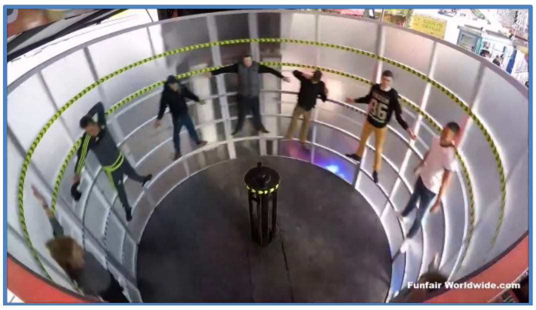
Au ball-trap, un galet P considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement le long d'un bras horizontal OA de longueur L. Celui-ci tourne à la vitesse angulaire ω constante, de 2 tours par seconde, autour de l'axe Oz vertical.

Initialement P est immobile par rapport au bras et $r_0 = OP_0 = L/4$.

1. À l'aide du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au bras, démontrer que l'équation différentielle peut se mettre sous la forme :
$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0$$
2. Déterminer l'instant où le pigeon d'argile quitte le bras.
3. Après avoir quitté le bras, quelle est la trajectoire de P si on néglige les frottements de l'air.

Rép : 1. PFD sur $\overrightarrow{u_r}$ 2. $t = 0{,}164s$ 3. $z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x-L}{v_0}\right)^2$

MC39 – Le manège « Rotor »



Dans le film de François Truffaut « Les 400 coups », le héros, Antoine Doinel, se rend à une fête foraine et pénètre dans un des manèges appelé « le rotor », constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe. Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation est suffisamment grande, le plancher est retiré et les passagers restent collés contre la paroi du cylindre.

1. Expliquer pourquoi les passagers restent collés contre la paroi. Quelle est la force qui les empêche de tomber ? Est-ce sans danger ? Que ressent Antoine Doinel quand il essaie de décoller un bras ou une jambe ?
2. On appelle μ le coefficient de frottement entre la paroi et les passagers : quand les passagers sont immobiles, déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre, en fonction du rayon du cylindre a, de g et de μ, à partir de laquelle on peut retirer le plancher.
3. Application numérique : a = 4,0 m, μ = 0,4. Calculer la vitesse minimale de rotation du cylindre en tours par minute.

Rép : 1. Composante tangentielle de la force de frottement 2. $\omega \geq \omega_c = \sqrt{\frac{g}{\mu a}}$ 3. $\omega_c = 24\ tours\ min^{-1}$