

# MC3 – Dynamique dans un référentiel non galiléen

Dans la partie « **Dynamique dans un référentiel non galiléen** », l'étude du champ de pesanteur est conduite en supposant le référentiel géocentrique galiléen. De nombreuses applications permettent d'illustrer cette partie : le pendule de Foucault, la déviation vers l'est, les vents géostrophiques, les courants marins ; l'étude statique des marées constitue également une ouverture pertinente.

4.2. Dynamique dans un référentiel non galiléen		
Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement.	Déterminer la force d'inertie d'entraînement. Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.	Partie liée à la translation de MC2.
Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen : force d'inertie d'entraînement, force d'inertie de Coriolis.	Exprimer la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis. Associer la force d'inertie d'entraînement axifuge à l'expression familière « force centrifuge ». Appliquer la deuxième loi de Newton, le théorème du moment cinétique et le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel non galiléen.	Partie liée à la rotation uniforme autour d'un axe fixe de MC2. Ne pas se tromper de signe dans les différentes expressions.
Champ de pesanteur terrestre : définition, évolution qualitative avec la latitude, ordres de grandeur.	Distinguer le champ de pesanteur et le champ gravitationnel.  <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, illustrer un effet lié au caractère non galiléen du référentiel terrestre	Partie intéressante qui peut déborder sur des sujets sur les marées ou autres.
Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen en translation ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.	<b>On pensera à relire son cours de statique des fluides au passage !!</b>

## I – Référentiels galiléens et référentiels non galiléens

### I-1) Référentiels galiléens

Le principe d'inertie (ou première loi de Newton) vue en première année formule l'existence de référentiels particuliers, les référentiels galiléens, dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

On peut obtenir aisément une infinité de tels référentiels à partir du moment où on en connaît un. En effet, soient  $R$  un référentiel galiléen et  $R'$  un référentiel en translation uniforme à la vitesse  $\vec{V}$  constante par rapport à  $R$ .

Un point matériel  $M$  isolé est animé, du fait du principe d'inertie, d'un mouvement rectiligne uniforme avec la vitesse constante notée  $\vec{v}_0$  par rapport au référentiel galiléen  $R$ .

D'où :

$$\begin{aligned}\vec{v}(M)|_R &= \vec{v}(M)|_{R'} + \vec{v}_e \\ \Leftrightarrow \vec{v}_0 &= \vec{v}(M)|_{R'} + \vec{V} \\ \Leftrightarrow \vec{v}(M)|_{R'} &= \vec{v}_0 - \vec{V} = \overline{cste}\end{aligned}$$

Le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne uniforme dans le référentiel  $R'$  donc ce référentiel est galiléen.

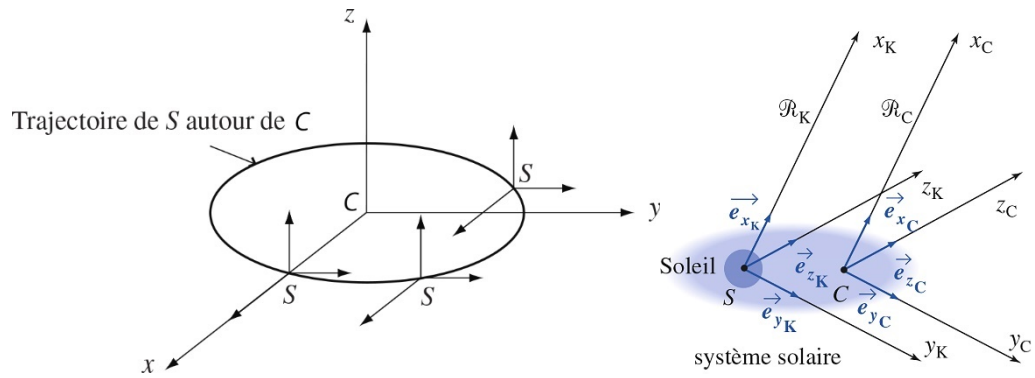
Tout référentiel en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

## I-2) Exemples de référentiel

### a) Le référentiel de Copernic et le référentiel de Kepler

Le référentiel de Copernic a pour origine le centre de masse du système solaire et ses axes pointent vers trois étoiles fixes. Nous postulons qu'il est galiléen.

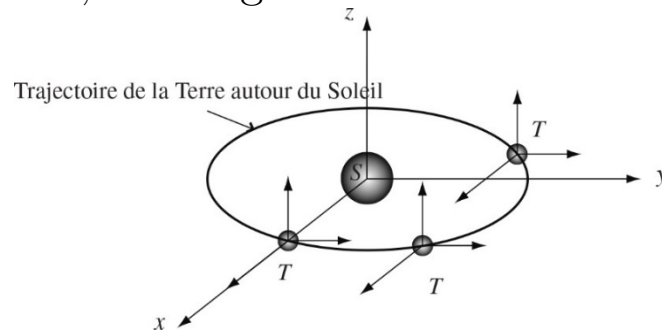
Le référentiel de Kepler, ou référentiel héliocentrique est en translation par rapport à celui de Copernic mais son origine se situe au centre de masse du Soleil. (Le centre de masse  $C$  du système solaire est situé à environ  $7.10^8$  m du centre  $S$  du Soleil, soit à peine plus qu'un rayon solaire).



Ces deux référentiels sont adaptés à l'étude du mouvement des planètes par exemple.

### b) Le référentiel géocentrique

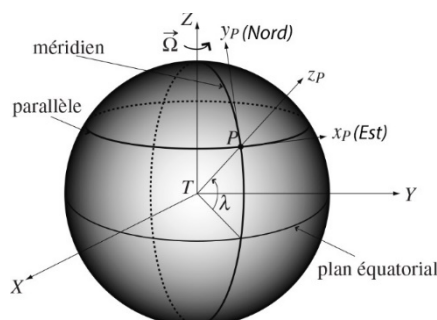
Le référentiel géocentrique est en translation par rapport au référentiel de Copernic, son origine se trouvant au centre de la Terre.



Ce référentiel est adapté à l'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre, ou à l'étude du mouvement des satellites.

### c) Le référentiel terrestre local

Le référentiel géocentrique ne tient pas compte de la rotation de la Terre sur elle-même mais uniquement de son mouvement autour du Soleil. Pour étudier le mouvement d'un objet au voisinage de la surface de la Terre, on utilise le référentiel terrestre local :



L'axe TZ est choisi parallèle à l'axe de rotation de la Terre, dont le vecteur rotation est  $\vec{\Omega}$ . On choisit :

- L'axe  $Pz_P$  selon la verticale locale au point  $P$
- L'axe  $Px_P$  le long du parallèle passant par  $P$ , dirigé vers l'Est.
- L'axe  $Py_P$  le long du méridien passant par  $P$ , dirigé vers le Nord.

d) Caractère galiléen des référentiels

On considérera un référentiel comme galiléen tant qu'on pourra appliquer les lois de Newton et en particulier le principe fondamental de la dynamique sans que les observations expérimentales n'infirment la théorie.

On postule que le référentiel de Copernic est galiléen, ainsi dans ce référentiel le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m \vec{a}(M)|_{R_c} = \vec{F}_{gravitation} + \vec{F}_{autres}$$

Le référentiel de Kepler effectuant une translation quasi-circulaire de 12 ans par rapport au référentiel de Copernic, on supposera sur une courte durée qu'il effectue une translation rectiligne uniforme par rapport à  $R_c$ . Il sera donc également dans une bonne approximation galiléenne.

De même, si on étudie des mouvements sur une durée très inférieure à une année, le référentiel géocentrique pourra être considéré comme en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Il sera donc également dans une bonne approximation galiléenne.

Enfin, si les mouvements étudiés le sont sur des durées bien inférieures à une journée, le référentiel terrestre local sera lui aussi considéré comme galiléen.

Finalement, le caractère galiléen ou non d'un référentiel dépendra de la durée d'étude comparée à la durée caractéristique de son mouvement par rapport à un référentiel galiléen.

Si les mouvements étudiés le sont sur une durée bien inférieures à une journée, le référentiel terrestre local pourra être considéré galiléen.

## II - Loi de la quantité de mouvement en RNG

II-1) Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

a) Enoncé du PFD

Dans ce cas on pose :

$$\begin{cases} \vec{v}_{R'/R} = \vec{v}_e = \vec{v}(O')|_R \\ \vec{a}_{R'/R} = \vec{a}_e = \vec{a}(O')|_R \end{cases}$$

On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m, soumis à un ensemble de forces  $\vec{f}_k$  tel que :

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k$$

On écrit le principe fondamental de la dynamique dans R le référentiel galiléen.

$$m \vec{a}(M)|_R = \vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k$$

Or :

$$\vec{a}(M)|_R = \vec{a}(M)|_{R'} + \vec{a}_e$$

Donc :

$$m(\vec{a}(M)|_{R'} + \vec{a}_e) = \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m \vec{a}(M)|_{R'} = \vec{F} - m\vec{a}_e$$

Le terme  $-m\vec{a}_e$  est homogène à une force, on l'appelle force d'inertie d'entraînement.

On écrira donc la loi de la quantité de mouvement dans un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen de la façon suivante :

$$m \underbrace{\vec{a}(M)|_{R'}}_{\vec{a}_r} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} \text{ où } \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$$

### b) Exemple

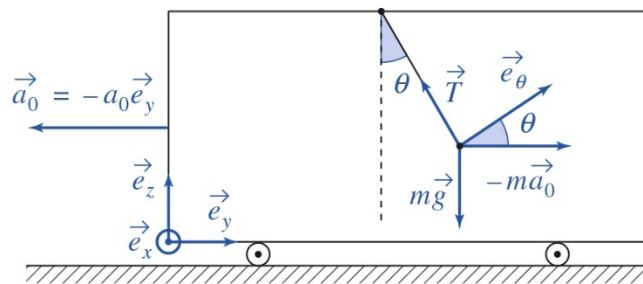
Le passager d'un véhicule en translation horizontale d'accélération constante  $\vec{a}_0 = -a_0 \vec{e}_y$ , étudie les petites oscillations planes du pendule simple formé par une masse  $m$  et un fil de longueur  $l$  accroché au plafond du véhicule.

- i) Quelle est la position d'équilibre du système ?
- ii) Quelle période mesure-t-il ?

Données :

- $2a_0 = g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$
- $l = 1\text{m}$

i)



Dans R référentiel, lié au véhicule on a :

$$m \vec{a}_r = \vec{F} + \vec{f}_{ie}$$

$$m \vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a}_0$$

En projetant sur l'axe orthoradial afin d'éliminer T nous obtenons :

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin\theta + ma_0 \cos\theta$$

La position d'équilibre correspond donc à :

$$g \sin \theta_e = a_0 \cos \theta_e$$

$$\Leftrightarrow \tan \theta_e = \frac{a_0}{g} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_e = 26^\circ$$

- ii) Pour des petits mouvements au voisinage de cette position d'équilibre, on pose :

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \text{ où } \varepsilon \ll 1$$

D'où le PFD devient :

$$ml(\ddot{\theta}_e + \ddot{\varepsilon}) = -mg \sin(\theta_e + \varepsilon) + ma_0 \cos(\theta_e + \varepsilon)$$

Or :

$$\begin{cases} \sin(\theta_e + \varepsilon) \underset{DL}{\sim} \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e \\ \cos(\theta_e + \varepsilon) \underset{DL}{\sim} \cos \theta_e - \varepsilon \sin \theta_e \end{cases}$$

D'où :

$$l \ddot{\varepsilon} = -g(\sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e) + a_0(\cos \theta_e - \varepsilon \sin \theta_e)$$

$$\Leftrightarrow l \ddot{\varepsilon} = \varepsilon(-g \cos \theta_e - a_0 \sin \theta_e) + \underbrace{(-g \sin \theta_e + a_0 \cos \theta_e)}_0$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \cos \theta_e = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \\ \sin \theta_e = \frac{a_0}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow l \ddot{\varepsilon} = -\varepsilon \frac{g^2 + a_0^2}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a_0^2}}{l}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \left( \frac{l^2}{g^2 + a_0^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 1,9s$$

II-2) Cas d'un référentiel en rotation uniforme par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen

a) Enoncé du PFD

Le référentiel  $R'$  est en rotation autour de l'axe fixe  $Oz$  du référentiel galiléen  $R$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Le vecteur rotation sera noté :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \Omega \vec{u}_z$$

Cette fois-ci :

$$\vec{a}(M)|_R = \vec{a}(M)|_{R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Donc :

$$m \vec{a}(M)|_{R'} = m \vec{a}(M)|_R - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

On remarque l'apparition d'un terme supplémentaire appelée force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c$$

Conclusion :

Pour un référentiel en rotation par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen :

$$m \underbrace{\vec{a}(M)|_{R'}}_{\vec{a}_r} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} \text{ où } \begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = +m \Omega^2 \overline{HM} \\ \vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \end{cases}$$

Pour un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen :

$$m \underbrace{\vec{a}(M)|_{R'}}_{\vec{a}_r} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} \text{ où } \vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e$$

b) Force centrifuge

Comme dans le cas d'un référentiel en translation, on voit apparaître dans un référentiel en rotation des forces d'inertie, qui, sans être dues à des interactions, ont un effet sur le mouvement des



objets.

- La force d'inertie de Coriolis est de la forme :

$$\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

- La force d'inertie d'entraînement est de la forme :

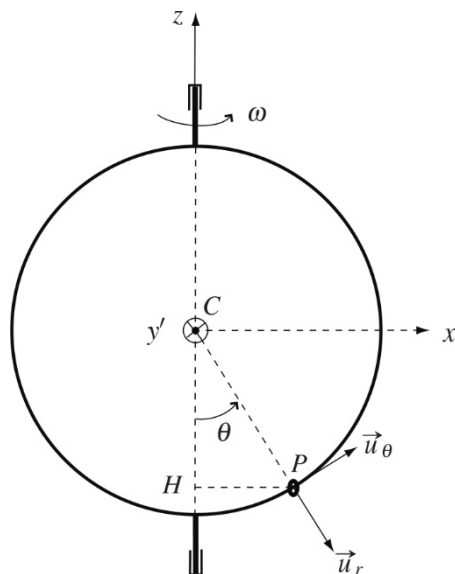
$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = +m\Omega^2 \overline{HM} = +m\Omega^2 r \vec{u}_r$$

Cette force « fuit » l'axe, c'est la force centrifuge telle qu'on la nomme dans la vie courante.

Dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme par rapport à un référentiel galiléen la force d'inertie d'entraînement est représentée par la force centrifuge :

$$\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overline{HM} = m\Omega^2 r \vec{u}_r$$

### c) Exemple



Une perle  $P$ , assimilée à un point matériel de masse  $m$ , est enfilée sur un cerceau de centre  $C$  et de rayon  $a$ . La perle se déplace sans frottement sur le cerceau. Le cerceau, situé dans un plan vertical, est entraîné par un moteur qui le fait tourner à vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un diamètre vertical.

- Déterminer l'équation du mouvement sous la forme :

$$\ddot{\theta} = f(\theta)$$

b) Calculer la force exercée par le cerceau sur la perle.

a) On applique le PFD dans le référentiel  $R'$  lié au cerceau d'où :

$$m \underbrace{\vec{a}(M)|_{R'}}_{\vec{a}_r} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

o Calcul de  $\vec{f}_{ie}$

o Méthode 1 :

A l'aide de la formule :  $\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HP} = m\omega^2 a \sin \theta \overrightarrow{u_{x'}}$

o Méthode 2 :

En remarquant que le mouvement du point coïncidant du point  $P$  est un mouvement circulaire de centre  $H$ , de rayon  $r = a \sin \theta$  et de vitesse angulaire constante  $\omega$ .

Or en coordonnées cylindriques :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \overrightarrow{u_{x'}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_{y'}} + \ddot{z} \overrightarrow{u_{z'}}$$

D'où dans notre cas :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= -r\dot{\theta}^2 \overrightarrow{u_{x'}} = a \sin \theta \omega^2 \overrightarrow{u_{x'}} \\ \Rightarrow \vec{f}_{ie} &= -m\vec{a}(P) = m\omega^2 a \sin \theta \overrightarrow{u_{x'}} \end{aligned}$$

Même si la méthode 2 est plus longue à mettre en place sur cet exercice, celle-ci est plus générale.

o Calcul de  $\vec{f}_{ic}$

$$\text{Soit : } \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_{ic} = 2m\omega (-\overrightarrow{u_z}) \wedge a\dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Leftrightarrow \vec{f}_{ic} = 2m\omega \left| \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right| a\dot{\theta} (-\overrightarrow{u_{y'}})$$

Pour la direction la règle des « trois doigts » donne  $-\overrightarrow{u_{y'}}$

$$d'où \vec{f}_{ic} = -2m\omega \cos(\theta) a\dot{\theta} \overrightarrow{u_{y'}}$$

○ Appliquons le PFD dans  $R'$  :

$$m\vec{a}_r = \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

Projetons sur l'axe  $\vec{u}_\theta$  pour éliminer  $\vec{R}$  :

$$m\vec{a}_r = \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$$

$$\Leftrightarrow ma\ddot{\theta} = -mg \sin\theta + m\omega^2 a \sin\theta \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{a} \sin\theta + \omega^2 \sin\theta \cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin\theta \left( -\frac{g}{a} + \omega^2 \cos\theta \right)$$

b) Pour calculer  $\vec{R}$  on projette sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_{y'}$  :

○ Sur  $\vec{u}_r$  :  $-ma\dot{\theta}^2 = R_r + m\omega^2 a \sin^2\theta + mg \cos\theta$

○ Sur  $\vec{u}_{y'}$  :  $0 = R_{y'} - 2m\omega \cos(\theta) a\dot{\theta}$

D'où :

$$\vec{R} = -m \left( \omega^2 a \sin^2\theta + g \cos\theta + a\dot{\theta}^2 \right) \vec{u}_r + 2m\omega \cos(\theta) a\dot{\theta} \vec{u}_{y'}$$

## III - Loi du moment cinétique dans un référentiel non galiléen

III-1) Cas d'un référentiel en translation par rapport à un référentiel galiléen

Soit A un point fixe de  $R'$ . Le moment cinétique de M en A dans  $R'$  est :

$$\vec{L}_A(M)|_{R'} = \vec{AM} \wedge m \vec{v}(M)|_{R'}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \Big|_{R'} \wedge m \vec{v}(M)|_{R'} + \vec{AM} \wedge m \vec{a}(M)|_{R'}$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{AM}}{dt} \Big|_{R'}}_{\vec{v}(M)|_{R'}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} = \left( \underbrace{\frac{d\vec{AO}'}{dt} \Big|_{R'}}_{\vec{0}} + \underbrace{\frac{d\vec{O}'M}{dt} \Big|_{R'}}_{\vec{v}(M)|_{R'}} \right) \wedge m \vec{v}(M)|_{R'} + \vec{AM} \wedge m \vec{a}(M)|_{R'}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} &= \vec{AM} \wedge m \vec{a}(M)|_{R'} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} &= \vec{AM} \wedge \left( \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \underbrace{\vec{f}_{ic}}_{\vec{0}} \right) \end{aligned}$$

Dans le référentiel non galiléen  $R'$  en translation par rapport à  $R$ , le théorème du moment cinétique s'écrit, pour un point  $A$  fixe dans  $R'$  :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{ie})$$

III-2) Cas d'un référentiel en rotation par rapport à un axe fixe d'un référentiel galiléen

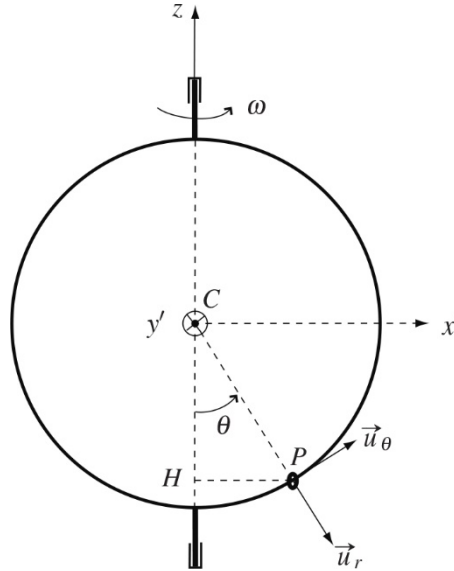
En procédant exactement de la même manière qu'au paragraphe précédent, on montre le résultat suivant :

Dans le référentiel non galiléen  $R'$  en rotation par rapport à un axe fixe de  $R$  galiléen, le théorème du moment cinétique s'écrit, pour un point  $A$  fixe dans  $R'$  :

$$\frac{d\vec{L}_A(M)|_{R'}}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_A(\vec{f}_{ic})$$

### III-3) Perle sur un cerceau en rotation

On reprend l'exemple de la perle sur le cerceau en rotation mais on établit l'équation du mouvement en appliquant la loi du moment cinétique en C, point fixe de  $R_C$ , plutôt que celle de la quantité de mouvement.



Soit :

$$\frac{d\vec{L}_C(M)|_{R'}}{dt} = \vec{M}_C(\vec{P}) + \vec{M}_C(\vec{R}) + \vec{M}_C(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_C(\vec{f}_{ic})$$

$$-ma^2\ddot{\theta}\vec{u}_{y'} = \vec{M}_C(\vec{P}) + \vec{M}_C(\vec{R}) + \vec{M}_C(\vec{f}_{ie}) + \vec{M}_C(\vec{f}_{ic})$$

Calculons les différents moments, et surtout leur composante sur  $\vec{u}_{y'}$  :

- $\vec{M}_C(\vec{P}) = +mga \sin(\theta)$
- $\vec{M}_C(\vec{R}) = 0 \vec{u}_{y'} + aR_{y'}\vec{u}_\theta$
- $\vec{M}_C(\vec{f}_{ie}) = \vec{CP} \wedge m\omega^2 a \sin \theta \vec{u}_{x'} = -m\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta \vec{u}_{y'}$
- $\vec{M}_C(\vec{f}_{ic}) = \vec{CP} \wedge (-2m\Omega \cos(\theta) a \dot{\theta}) \vec{u}_{y'} = -2m\Omega \cos(\theta) a^2 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$

D'où :

$$-ma^2\ddot{\theta} = +mga \sin(\theta) - m\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{a} \sin(\theta) + \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin \theta \left( -\frac{g}{a} + \omega^2 \cos \theta \right)$$

## IV – Etude énergétique dans un référentiel non galiléen

### IV-1) Théorème de l'énergie cinétique en RNG

Le principe fondamental de la dynamique dans  $R'$  s'écrit :

$$m\vec{a}(M)|_{R'} = \vec{f} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c \text{ où } \vec{f} = \sum_{k=1}^N \vec{f}_k$$

Multiplions-le par  $\vec{v}(M)|_{R'} dt$ . Il vient :

$$\begin{aligned} & m\vec{a}(M)|_{R'} \cdot \vec{v}(M)|_{R'} dt \\ &= \vec{f} \cdot \vec{v}(M)|_{R'} dt - m\vec{a}_e \cdot \vec{v}(M)|_{R'} dt - m\vec{a}_c \cdot \vec{v}(M)|_{R'} dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$$dE_c|_{R'} = \delta W(\vec{f})|_{R'} + \delta W(\vec{f}_{ie})|_{R'} + \delta W(\vec{f}_{ic})|_{R'}$$

Mais la force d'inertie de Coriolis étant orthogonale au vecteur-vitesse du point M dans le référentiel  $R'$ , son travail est nul. D'où :

$$dE_c|_{R'} = \delta W(\vec{f})|_{R'} + \delta W(\vec{f}_{ie})|_{R'}$$

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés, y compris la force d'inertie d'entraînement (la force de Coriolis ne travaille pas)

$$\begin{cases} dE_c|_{R'} = \delta W(\vec{f})|_{R'} + \delta W(\vec{f}_{ie})|_{R'} \\ E_c(B)|_{R'} - E_c(A)|_{R'} = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})|_{R'} + W_{A \rightarrow B}(\vec{f}_{ie})|_{R'} \end{cases}$$

En termes de puissance cinétique :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{R'} = P(\vec{f})|_{R'} + P(\vec{f}_{ie})|_{R'}$$

## IV-2) Expression de l'énergie potentielle d'entraînement

## a) Force conservative ?

A priori, la force d'inertie d'entraînement n'est pas conservative, cependant la force d'inertie d'entraînement est conservative dans les deux cas suivants :

- Translation rectiligne uniformément accélérée
- Rotation uniforme

b) Cas d'un référentiel en translation tel que  $\vec{a}_e = \overrightarrow{cste}$ 

Dans le cas d'un référentiel est translation, si l'accélération est constante, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{f}_{ie}) &= -m\vec{a}_e \cdot \vec{v}(M)|_{R'} dt = -m\vec{a}_e \cdot d\vec{O'M} = -d(m\vec{a}_e \cdot \vec{O'M}) \\ &\Rightarrow E_{pe} = m\vec{a}_e \cdot \vec{O'M} + cste \end{aligned}$$

Dans d'un référentiel est translation avec une accélération constante  $\vec{a}_e$  par rapport à un référentiel galiléen R, la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{pe} = m\vec{a}_e \cdot \vec{O'M} + cste$$

## c) Cas d'un référentiel en rotation uniforme

Le travail élémentaire de la force d'inertie d'entraînement s'écrit

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{f}_{ie}) &= \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{O'M} = m\Omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) \\ &\Rightarrow \delta W(\vec{f}_{ie}) = m\Omega^2 r dr \\ &\Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 r^2 + cste \end{aligned}$$

Dans d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen R, à la vitesse angulaire  $\Omega$ , la force d'inertie d'entraînement dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{pe} = -\frac{1}{2} m\Omega^2 r^2 + cste = -\frac{1}{2} m\Omega^2 HM^2 + cste$$

## IV-3) Système conservatif

Dans d'un système conservatif on retrouve la conservation de de l'énergie mécanique :

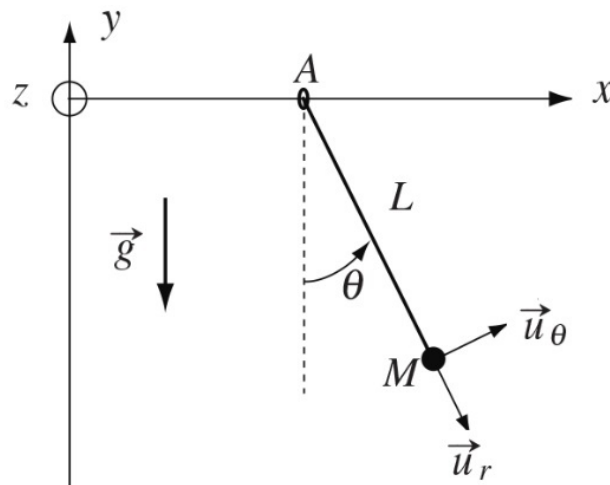
$$E_m = E_c + E_{p,f} + E_{pe} = cste$$

## IV-4) Pendule oscillant

On étudie un pendule simple constitué d'une bille de masse  $m$ , assimilée à point matériel  $M$ , attachée à une barre  $AM$  de masse négligeable.

L'extrémité  $A$  de la barre est animée d'un mouvement de translation selon l'axe  $(Ox)$  :

$$x_A = x_0 \sin(\omega t)$$



Retrouvons l'équation différentielle du mouvement dans le cas de petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{x_0}{L} \omega^2 \sin(\omega t)$$

Appliquons le théorème de la puissance cinétique :

$$\left. \frac{dE_c}{dt} \right|_{R'} = P(\vec{f})|_{R'} + P(\vec{f}_{ie})|_{R'}$$



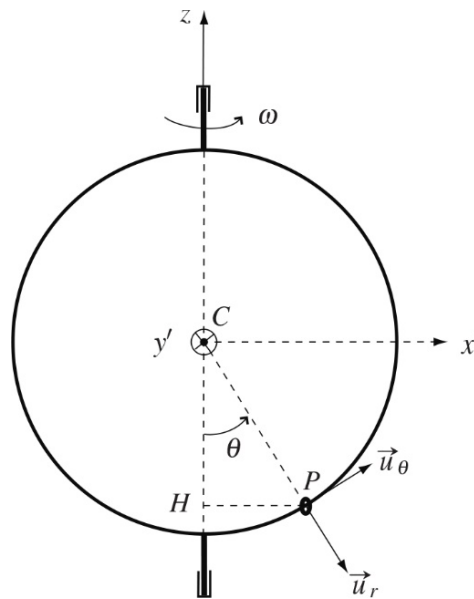
Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_c}{dt} \Big|_{R'} = \frac{d\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2\right)}{dt} \Big|_{R'} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \\ P(\vec{f}) \Big|_{R'} = -mg\vec{u}_y \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -mgL\dot{\theta}\sin\theta \\ P(\vec{f}_{ie}) \Big|_{R'} = -m\ddot{x}_A\vec{u}_x \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta = -m\ddot{x}_AL\dot{\theta}\cos\theta \\ \Rightarrow L\ddot{\theta} = -g\sin\theta - \ddot{x}_A\cos\theta \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = x_0\omega^2\sin(\omega t)\cos\theta \end{array} \right.$$

D'où pour de petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{x_0}{L}\omega^2\sin(\omega t) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{g}{L}$$

#### IV-5) Perle sur un cerceau en rotation



Retrouver l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin\theta \left( -\frac{g}{a} + \omega^2 \cos\theta \right)$$

Calculons les différentes énergies mises en jeu :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \\ E_{pp} = -mga\cos\theta + cste \\ E_{pe} = -\frac{1}{2}m\omega^2(a\sin\theta)^2 + cste \end{array} \right.$$

$$\text{Or : } \frac{dE_m}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow ma^2 \ddot{\theta} + mga \dot{\theta} \sin \theta - m\omega^2 \dot{\theta} a^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$ma^2 \ddot{\theta} = -mga \sin(\theta) + m\omega^2 a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{a} \sin(\theta) + \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = f(\theta) \text{ où } f(\theta) = \sin \theta \left( -\frac{g}{a} + \omega^2 \cos \theta \right)$$

## V – Champ de pesanteur

### V-1) Poids d'un corps

Dans cette partie, on étudie un solide de masse  $m$ , assimilé à un point matériel  $M$ , dans le référentiel terrestre local. On ne considère plus le référentiel terrestre local comme galiléen.

Le point  $M$  est soumis :

- A un certain nombre de forces associées à la situation étudiée : la tension d'un fil, la réaction d'un support,...
- A la force d'attraction gravitationnelle de la Terre :  $m\vec{G}_T(M)$
- A la force d'inertie d'entraînement :  $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$  où  $\vec{a}_e$  est l'accélération du point coïncidant dans le référentiel géocentrique
- A la force d'inertie de Coriolis :  $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$  en notant  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation de la Terre sur elle-même et  $\vec{v}$  la vitesse du point par rapport au référentiel terrestre.

Le poids d'un corps, est défini comme l'opposé de la force qui le maintient à l'équilibre c'est-à-dire la tension du fil. La loi de la quantité de mouvement appliquée au corps en équilibre dans le référentiel terrestre local s'écrit :

$$\vec{0} = \vec{T} - m\vec{a}_e + m\vec{G}_T(M) - m\vec{a}_c$$

Le corps étant à l'équilibre, la force d'inertie de Coriolis est nulle.

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \vec{T} - m\vec{a}_e + m\overline{G}_T(M) \\ \Leftrightarrow \vec{P} &= -\vec{T} = m(\overline{G}_T(M) - \vec{a}_e) \\ \Leftrightarrow \vec{P} &= m(\overline{G}_T(M) + \Omega^2\overline{HM})\end{aligned}$$

## V-2) Champ de pesanteur

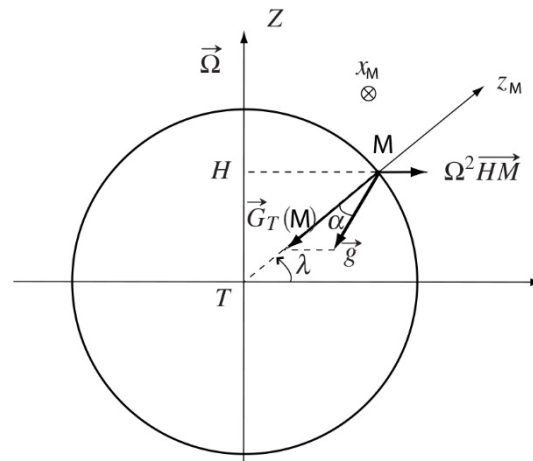
### a) Définition

On définit le champ de pesanteur par :

$$\vec{P} = m\vec{g}(M) = m(\overline{G}_T(M) + \Omega^2\overline{HM})$$

Le champ de pesanteur est la somme du champ de gravitation et d'un terme centrifuge, égal à l'opposé de l'accélération d'entraînement.

$$\vec{g}(M) = \overline{G}_T(M) + \Omega^2\overline{HM}$$



### b) Variation avec la latitude

Le terme axifuge dépend de la latitude, on peut l'écrire

$$G_{axifuge} = G_{axifuge,max} \cos \lambda$$

Ainsi il est maximal à l'équateur et nul aux pôles.

De plus en France (Montpellier) :

$$G_{axifuge} = 0,034 \times \cos(43^\circ) = 0,018 \text{ ms}^{-2}$$

## c) Ordres de grandeur

Comparons les deux termes :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_T(M) = \frac{GM_T}{R_T^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{6 \cdot 10^{24}}{(6400 \cdot 10^3)^2} = 9,80 \text{ms}^{-2} \\ \Omega^2 HM = \Omega^2 R_T \cos(\lambda) \\ \Rightarrow G_{axifuge,max} = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \times 6400 \cdot 10^3 = 0,034 \text{ms}^{-2} \end{array} \right.$$

Donc :

$$\frac{G_{axifuge,max}}{G_T} = 0,3\%$$

## V-3) Conséquence en référentiel terrestre

Ainsi, si on considère le référentiel géocentrique galiléen, on pourra écrire le PFD dans le référentiel « non galiléen » terrestre sous la forme :

$$m\vec{a}(M)|_{R_T} = m \underbrace{\vec{g}(M)}_{\substack{\text{contient la} \\ \text{force} \\ \text{d'entraînement "terrestre"}}} + \vec{f} - m\vec{a}_c$$

## VI – Statique des fluides en RNG

## VI-1) Relation fondamentale de la statique des fluides

En première année, on a pu voir la relation fondamentale de statique des fluides sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu \vec{g} \text{ ou } \mu \vec{g} = \overrightarrow{f_{vol}}(\text{pesanteur})$$

Si on se retrouve en RNG alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \overrightarrow{f_v}(\vec{P}) + \overrightarrow{f_v}(\vec{f}_{ie}) + \overrightarrow{f_v}(\vec{f}_{ic})$$

Mais en statique des fluides le fluide est au repos d'où :  $\overrightarrow{f_v}(\vec{f}_{ic}) = \vec{0}$

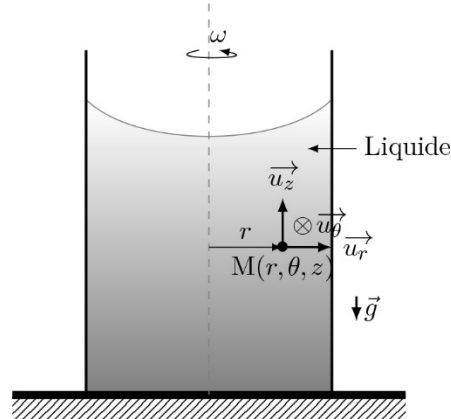
Ainsi :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_e)$$

En RNG, la relation fondamentale de statique des fluides s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_e)$$

VI-2) Exemple : cylindre en rotation



Un flacon cylindrique ouvert, contient un liquide de masse volumique  $\mu$ . On fait tourner le flacon autour de son axe à la vitesse angulaire  $\omega$ . Ce liquide n'est donc pas au repos dans le référentiel du laboratoire. Cependant, après un régime transitoire qui dépend de la viscosité du liquide, celui-ci tourne de façon solide à la même vitesse angulaire que le cylindre. Ainsi, dans le référentiel lié au cylindre, le liquide est au repos. On raisonnera donc dans ce référentiel tournant (noté  $R'$ ) munis d'un système de coordonnées cylindriques.

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} p &= \mu(\vec{g} - \vec{a}_e) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}} p &= \mu(\vec{g} + \omega^2 \overrightarrow{HM}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu\omega^2 r & (1) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g & (2) \end{cases} \\ (1) \Rightarrow p(r, z) &= \frac{1}{2} \mu\omega^2 r^2 + f(z) \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow p(r, z) = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - \mu g z + cste$$

La surface libre est isobare d'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - \mu g z &= cste \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1}{2g} \omega^2 r^2 + z_0 \end{aligned}$$

La surface libre adopte une forme parabolique d'axe de révolution (Oz).

Pour déterminer  $z_0$ , on utilise la conservation du volume en découpant le cylindre en couches cylindriques de largeur  $r$  et  $r + dr$ , ainsi : (H hauteur de l'eau au repos et R rayon du cylindre).

$$\begin{aligned} V = \pi R^2 H &= \int_0^R d\tau = \int_0^R z(r) \times 2\pi r dr \\ &= \int_0^R \left( \frac{1}{2g} \omega^2 r^2 + z_0 \right) \times 2\pi r dr \\ &= \int_0^R \left( \frac{\omega^2 r^3}{g} + 2rz_0 \right) \times \pi dr = \pi \left( \frac{\omega^2 R^4}{4g} + R^2 z_0 \right) \\ \Rightarrow \frac{\omega^2 R^2}{4g} + z_0 &= H \Rightarrow z_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \\ \Rightarrow z &= \frac{1}{2g} \omega^2 \left( r^2 - \frac{R^2}{2} \right) + H \end{aligned}$$

Des équipes de de l'Institut d'astrophysique de Paris, ont mis au point un télescope Nommé Large Zénith Telescope (LZT) dont le miroir primaire fait 6 mètres de diamètre. Contrairement aux télescopes conventionnels dont le miroir est fait de verre, le LZT a un miroir fait de liquide réfléchissant, du mercure plus précisément

qui adopte une surface parabolique puisque mis en rotation dans une cuve. Le miroir parabolique obtenu permet de faire l'image d'une étoile au foyer de la parabole avec précision.

La principale limitation du LZT, et des autres miroirs liquides, est qu'on ne peut le pointer ailleurs qu'au zénith, sinon le liquide s'échappe de la cuvette. Au-dessus du miroir, une étroite bande de ciel défile à la vitesse de la rotation terrestre. Un astre donné met Environ une minute à traverser le champ de vision du télescope.

