MC2 – Changement de référentiels en mécanique classique

A – Travaux dirigés

MC21 – Translation circulaire et rotation

1°) Translation circulaire

$\mathcal{R}_2$ est en translation par rapport $\mathcal{R}_1$. La vitesse et l'accélération d'entraînement ont donc la même valeur en tout point.
Soit P le point d'attache de la nacelle, situé dans le même plan vertical que O, origine de $\mathcal{R}_1$.
P est fixe dans $\mathcal{R}_2$; donc :

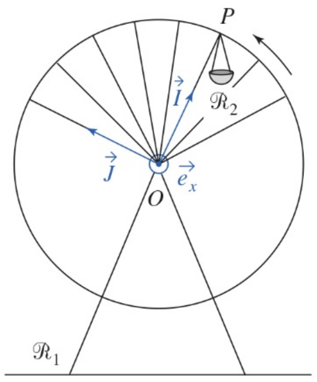
$$\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}_1} \quad \text{et} \quad \vec{a}_e = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Utilisons la base orthonormée $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{e}_x)$ définie par $\overrightarrow{OP} = R\vec{I}$.

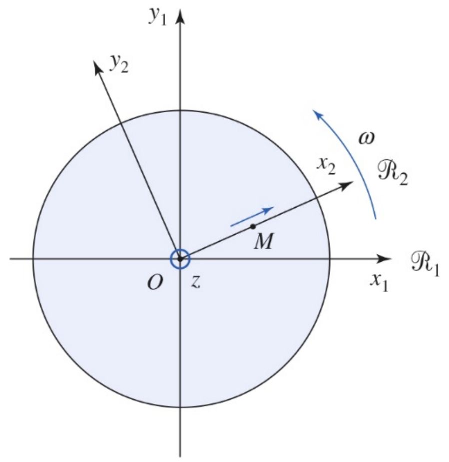
P est en mouvement circulaire uniforme par rapport à $\mathcal{R}_1$. D'où :

$$\vec{v}_e = \vec{v}(P)_{/\mathcal{R}_1} = \omega R \vec{J} \quad \text{et}$$

$$\vec{a}_e = \vec{a}(P)_{/\mathcal{R}_1} = -\omega^2 R\vec{I} = \omega^2\overrightarrow{OP}.$$



2°) Rotation



Le point coïncident de M décrit un cercle de rayon x_2 à la vitesse angulaire ω ; donc :

$$\vec{v}_e(M) = \omega x_2 \vec{e}_{y_2}$$

et : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1} = v\vec{e}_{x_2} + \omega x_2 \vec{e}_{y_2}$.

• *1re méthode : Calcul direct de $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$*

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_1}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_1} = v\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{x_2}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_1} + \dot{\omega} x_2 \vec{e}_{y_2} + \omega v \vec{e}_{y_2} + \omega x_2 \left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{y_2}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_1}.$$

Les dérivées des vecteurs unitaires sont connues, d'où :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = (\dot{\omega} x_2 + 2\omega v)\vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

• *2re méthode : Calcul de $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1}$ par composition des accélérations*

Dans $\mathcal{R}_1$, le mouvement du point coïncident est circulaire, d'où :

$$\vec{a}_e(M) = \dot{\omega} x_2 \vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

La vitesse de M dans $\mathcal{R}_2$ étant uniforme :

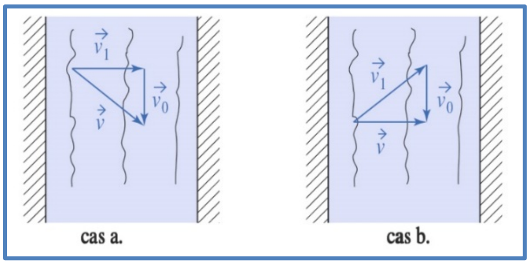
$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_2} = \vec{0}.$$

De plus : $\vec{a}_C = 2\omega\vec{e}_z \wedge v\vec{e}_{x_2} = 2\omega v\,\vec{e}_{y_2}$.

Finalement :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_1} = (\dot{\omega} x_2 + 2\omega v)\vec{e}_{y_2} - \omega^2 x_2 \vec{e}_{x_2}.$$

MC22 – Traversée d'une rivière



1. v_1 est la composante de $\vec{v}$ perpendiculaire aux berges

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{l}{v_1}$$

2. $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_0}$ tel que $v^2 = v_1^2 - v_0^2 \Rightarrow \tau_2 = \frac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}$

B – Exercices supplémentaires

MC23 – Traversée d'un tapis roulant

On note $\mathscr{R}$ le référentiel lié au sol et $\mathscr{R}_t$ celui lié au tapis. Le référentiel $\mathscr{R}_t$ est en translation par rapport à $\mathscr{R}$. La loi de composition des vitesses pour le joueur A donne :

$$\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = \vec{V}(A)_{/\mathscr{R}_t} + \vec{V}_e = \vec{V}(A)_{/\mathscr{R}_t} + \vec{V}_t\,.$$

1. La vitesse $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}}$ est : $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = V_t\,\vec{u}_x + V\,\vec{u}_y$, la position du jouer A est donc :

$$\overrightarrow{A_0A}(t) = V_t t\,\vec{u}_x + V t\,\vec{u}_y\,.$$

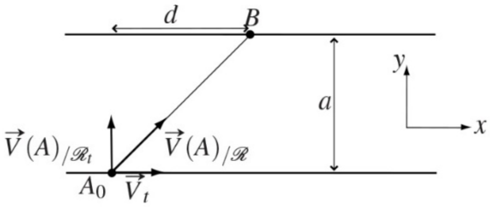


Figure 5.13

Quand la traversée est terminée, $a = Vt_1$ et $d = V_t t_1$ d'où : $d = a\dfrac{V_t}{V}$ et $t_1 = \dfrac{a}{V}$.

2. La vitesse $\vec{V}_{/\mathscr{R}}$ doit maintenant être perpendiculaire aux bords du tapis (figure 5.14).

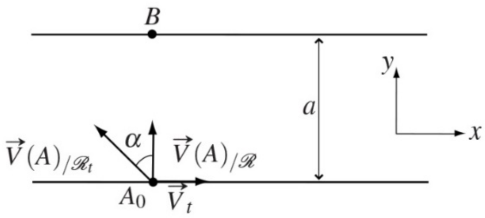


Figure 5.14

La vitesse de A par rapport au sol s'écrit maintenant : $\vec{V}(A)_{/\mathscr{R}} = (V_t - V\sin\alpha)\,\vec{u}_x + V\cos\alpha\,\vec{u}_y = V\cos\alpha\,\vec{u}_y$ d'où : $V_t = V\sin\alpha$ et $\overrightarrow{A_0A}(t) = V\cos\alpha\; t\,\vec{u}_y$.

Quand la traversée est terminée : $a = V\cos\alpha\; t_2$. Or $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{V^2}{V_t^2}}$, d'où

$t_2 = \dfrac{a}{\sqrt{V^2 - V_t^2}}$.

3. En reprenant la démarche de la question précédente, la vitesse $\vec{V}_{/\mathscr{R}}$ s'écrit :

$$\vec{V}_{/\mathscr{R}} = (V_t + V\cos\theta)\,\vec{u}_x + V\sin\theta\,\vec{u}_y$$

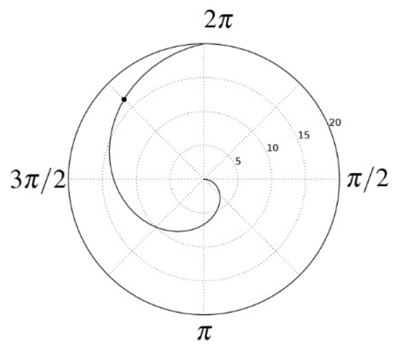
Le temps de traversée est $t_3 = a/V\sin\theta$, il est minimal pour $\theta = \pi/2$ ce qui revient au cas de la première question.

MC24 – Insecte sur l'aiguille des secondes

1. a. La distance r de l'insecte à l'origine croît linéairement avec le temps et doit être nulle à $t = 15$ s, d'où $r(t) = v(t-15)$. L'insecte parcourt 20 cm en 45 s, d'où $v = \dfrac{20}{45} = 0{,}44\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Finalement : $r(t) = 0{,}44\,(t-15)$ en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ avec t exprimé en s.
La vitesse angulaire est constante d'où $\theta = \alpha t + \beta$. Mais $\theta(15) = \pi/2$, et $\theta(60) = 2\pi$ donnent $\theta = \dfrac{\pi}{30}t$ en rad pour t exprimé en s.

b. La trajectoire est une spirale. Les coordonnées polaires de l'insecte sont :

t (s)	r (cm)	θ (rad)
15	0	$\pi/2$
30	6,7	π
45	13,3	$3\pi/2$
60	20	2π



On en déduit l'allure de la trajectoire représentée ci-contre.

c. D'après les formules en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = 0{,}44\,\vec{u}_r + 0{,}047\,(t-15)\,\vec{u}_\theta \quad \text{en } \mathrm{cm\cdot s^{-1}},$$

et

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta = -4{,}9.10^{-3}\,(t-15)\,\vec{u}_r + 9{,}3.10^{-2}\,\vec{u}_\theta \quad \text{en } \mathrm{cm\cdot s^{-2}}.$$

À $t = 52{,}5$ s on trouve $||\vec{v}|| = 1{,}8\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$ et $||\vec{a}|| = 0{,}21\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}}$.

2. Dans $\mathscr{R}_A$ l'insecte a un mouvement rectiligne uniforme le long de (Ox) :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}_A} = v\,\vec{u}_X \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathscr{R}_A} = \vec{0}.$$

Le point coïncident avec l'insecte à l'instant t a dans $\mathscr{R}$ un mouvement circulaire uniforme de rayon $r(t)$. Dès lors :

$$\vec{v_e}(M) = r(t)\dot{\theta}\,\vec{u}_Y \quad \text{et} \quad \vec{a_e}(M) = -\dot{\theta}^2 r(t)\,\vec{u}_X.$$

La loi de composition des vitesses donne alors :

$$\vec{v}_{\mathscr{R}} = \vec{v}_{\mathscr{R}_A} + \vec{v}_e = v\,\vec{u}_X + r(t)\dot{\theta}\,\vec{u}_Y = v\,\vec{u}_r + r(t)\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta.$$

On retrouve la même expression que dans la question précédente. De même la loi de composition des accélérations donne :

$$\vec{a}_{\mathscr{R}} = \vec{a}_{\mathscr{R}_A} + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{0} - \dot{\theta}^2 r(t)\,\vec{u}_X + 2\dot{\theta}\,\vec{u}_z \wedge v\,\vec{u}_X = -\dot{\theta}^2 r(t)\,\vec{u}_r + 2\dot{\theta} v\,\vec{u}_\theta.$$

Là aussi c'est la même expression. Il est remarquable que l'accélération dans $\mathscr{R}$ ne soit due qu'à l'accélération d'entraînement et à l'accélération de Coriolis.