

# MC1b – Mécanique en référentiel galiléen (2)

## Thème : Mouvements et interactions

### 0 - Lien avec le programme de PCSI

Au second semestre, le thème « **Mouvements et interactions** » est structuré en trois parties : moment cinétique, mouvements dans un champ de force centrale conservatif et mouvement d'un solide. L'accent est porté sur les lois de conservation du moment cinétique, de l'énergie mécanique et de la quantité de mouvement comme outils d'étude des mouvements.

La partie **2.5. « Moment cinétique »** est l'occasion d'introduire les notions de moment cinétique et de moment d'une force. L'un des objectifs visés est que les étudiants disposent de représentations concrètes qui permettent de donner du sens aux grandeurs vectorielles et scalaires utilisées ; c'est notamment pour cela que le bras de levier est introduit. Comme souligné précédemment, l'accent est mis sur l'identification des situations où le moment cinétique est conservé.

Notions et contenus	Capacités exigibles	Remarques
<b>2.5. Moment cinétique</b>		
Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.	Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.	
Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.	Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.	
Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.	Exprimer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.	
Théorème du moment cinétique en un point fixe. Identifier les cas de conservation du moment dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.	

La partie **2.6. « Mouvements dans un champ de force centrale conservatif »** est notamment motivée par ses nombreuses applications possibles. On discute la nature de la trajectoire sur un graphe donnant l'énergie potentielle effective et, dans le cas d'un champ newtonien (lois de Kepler), on ne poursuit l'étude que dans le cas d'une trajectoire circulaire. Le caractère elliptique des trajectoires associées à un état lié est affirmé sans qu'aucune étude géométrique des ellipses ne soit prévue ; on utilise dans ce cas les constantes du mouvement (moment cinétique et énergie mécanique) pour exprimer l'énergie de la trajectoire elliptique en fonction du demi-grand axe.

<b>2.6. Mouvements dans un champ de force centrale conservatif</b>		
Point matériel soumis à un champ de force centrale.	Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique. Établir les conséquences de la conservation du moment cinétique : mouvement plan, loi des aires.	A savoir refaire très rapidement.
<b>Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif</b> Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.	Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement. Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective. Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective. Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.  <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.	La partie sur les forces centrales est une GRANDE source de sujets à l'écrit comme à l'oral.

<b>Cas particulier du champ newtonien</b> Lois de Kepler.	Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.	À connaître.
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.	Important à savoir refaire au cas où on oublie l'expression de la constante. $\frac{a^3}{T^2} = cste$
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire et dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire. Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.	À retenir car simplifie grandement les exos : $E_m = -\frac{ k }{2a}$
<b>Satellites terrestres</b> Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.	Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions. Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.	
Vitesses cosmiques : vitesse en orbite basse et vitesse de libération.	Exprimer ces vitesses et citer leur ordre de grandeur en dynamique terrestre.	À ne pas confondre !

Concernant le solide en rotation autour d'un axe fixe dans la partie 2.7. « Mouvement d'un solide », il s'agit de définir le mouvement en remarquant que tout point du solide décrit un cercle autour de l'axe avec une même vitesse angulaire et de déterminer la vitesse de chaque point en fonction de celle-ci et de la distance à l'axe de rotation.

Des exemples de dynamique du solide sont introduits (translation et rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen), avec toutefois des limitations strictes : l'étude générale d'un mouvement composé d'une translation dans un référentiel galiléen et d'une rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel barycentrique ne figure pas au programme. L'étude du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe gardant une direction fixe dans un référentiel galiléen mais pour lequel l'axe de rotation est en mouvement est exclue. Cette partie se termine par l'étude d'un système déformable pour souligner le rôle des forces intérieures dans le bilan énergétique d'un système.

<b>2.7. Mouvement d'un solide</b>		
<b>Description du mouvement d'un solide dans deux cas particuliers</b> Définition d'un solide.	Différencier un solide d'un système déformable.	
Translation.	Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.	
Rotation autour d'un axe fixe.	Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.	Ne pas confondre translation circulaire et rotation.
<b>Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe</b> Moment cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe : moment d'inertie.	Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni. Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.	À ne pas oublier car c'est souvent le seul théorème à appliquer dans cette situation.
Couple.	Définir un couple.	
Liaison pivot.	Définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.	
Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Exploiter le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	
Pendule de torsion.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement.	Question de cours classique à l'oral.
Pendule pesant.	Établir l'équation du mouvement. Établir une intégrale première du mouvement. <b>Réaliser l'étude énergétique d'un pendule pesant et mettre en évidence une diminution de l'énergie mécanique.</b> <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, mettre en évidence le non isochronisme des oscillations.	Question de cours classique à l'oral.

<p><b>Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen</b></p> <p>Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.</p> <p>Théorème de l'énergie cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.</p>	<p>Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.</p> <p>Établir, dans ce cas, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.</p>	
<p><b>Système déformable</b></p> <p>Théorème de l'énergie cinétique pour un système déformable.</p>	<p>Prendre en compte le travail des forces intérieures. Utiliser sa nullité dans le cas d'un solide.</p> <p><b>Conduire le bilan énergétique du tabouret d'inertie.</b></p>	<p>Nouveauté du programme.</p>

# I – Théorème du moment cinétique

## I-1) Moment cinétique

### a) Par rapport à un point O

Le moment cinétique de M par rapport à un point O est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\underbrace{\vec{L}_O}_{\text{kgm}^2\text{s}^{-1}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

### b) Moment cinétique par rapport à un axe orienté $\Delta$

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est la projection orthogonale de  $\vec{L}_O$  sur l'axe  $\Delta$  :

$$L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

## I-2) Moment d'inertie

Lorsque l'axe  $\Delta$  est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et repérer M à l'aide de ses coordonnées cylindriques. On peut alors calculer  $L_z$  qui correspond à la composante selon  $\vec{u}_z$  du moment cinétique de M par rapport à O :

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge m(r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z + m(r\dot{z} - z\dot{r})\vec{u}_\theta - m z r \dot{\theta} \vec{u}_r \end{aligned}$$

D'où :

$$L_z = mr^2\dot{\theta}$$

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz), on définit le moment d'inertie d'un point M de coordonnées (r,θ,z) par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_z = mr^2 \Rightarrow L_z = J_z \dot{\theta} = J_z \omega$$

I-3) Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

a) Moment cinétique par rapport à Δ

On considère un système constitué de plusieurs points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté Δ :  $L_{\Delta i}$ . Le moment cinétique du système de points est :

$$L_{\Delta} = \sum_i L_{\Delta i}$$

D'où en coordonnées cylindriques en confondant Δ avec (Oz) :

$$L_{zi} = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = J_{zi} \dot{\theta}_i$$

où  $J_{zi} = m_i r_i^2$  est le moment d'inertie du point  $M_i$  par rapport à Oz et  $\dot{\theta}_i$  sa vitesse angulaire.

Donc :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \sum_i J_{zi} \dot{\theta}_i$$

b) Moment d'inertie d'un solide

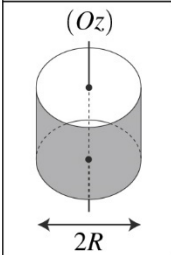
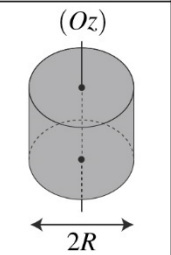
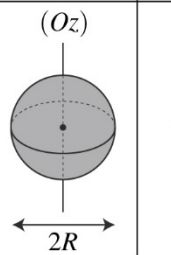
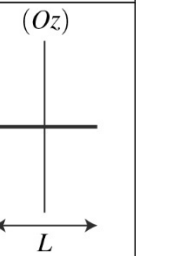
Chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe possède la même vitesse angulaire. Le mouvement du solide est alors un cas particulier du mouvement d'un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. D'où :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i J_{zi} \dot{\theta} = J_z \dot{\theta}$$

Le moment d'inertie  $J_z$  du solide par rapport à l'axe  $(Oz)$  est défini par la somme des moments d'inertie par rapport à  $(Oz)$  de chacun des points le constituant :

$$J_z = \sum_i J_{zi}$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l'on peut mesurer. Pour information, on donne les moments d'inertie par rapport à l'axe  $(Oz)$  dessiné sur les figures suivantes pour des solides homogènes de masse  $m$  :

cylindre vide de rayon $R$	cylindre plein de rayon $R$	boule de rayon $R$	barre de longueur $L$
$mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

Plus une masse  $m$  est éloignée de l'axe de rotation  $(Oz)$ , plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à  $(Oz)$  est importante.

#### I-4) Moment d'une force

##### a) Définitions

- Moment d'une force par rapport à un point  $O$

$$\overline{M}_O(\vec{F}) = \overline{M}_O = \overline{OM} \wedge \vec{F}$$

Sa norme se mesure en  $N.m$  qui est l'équivalent du joule.

- Moment d'une force par rapport à un axe orienté  $\Delta$

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est la projection orthogonale de  $\overline{M}_O$  sur  $\Delta$  :

$$M_\Delta = M_\Delta(\vec{F}) = \overline{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overline{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

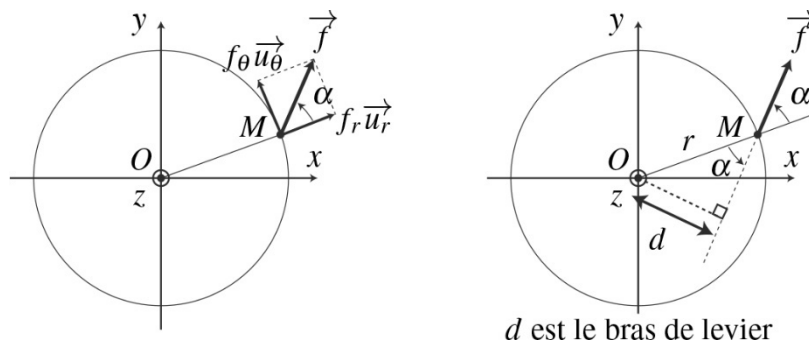
- Calcul en coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe  $\Delta$  est fixe, on peut faire coïncider l'axe  $(Oz)$  avec  $\Delta$  et repérer  $M$  par ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -zF_\theta \\ zF_r - rF_z \\ rF_\theta \end{vmatrix}$$

Donc :  $M_z = rF_\theta$

Étant donné que ni la composante selon  $\vec{u}_z$  du vecteur position ni celle de la force n'interviennent, on représente cette situation sur la figure en se restreignant au plan  $(Oyx)$ , perpendiculaire à  $(Oz)$ .



b) Bras de levier

On peut réécrire cette relation :

$$M_z = rF_\theta = rF \sin \alpha$$

On se reporte alors à la partie droite pour observer que :

$$r \sin \alpha = d$$

$d$  est la distance séparant la droite d'action de la force  $\vec{F}$  de l'axe  $(Oz)$ . La distance  $d$  est appelée le bras de levier de la force  $\vec{F}$  et on a dans le cas général

$$|M_z| = fd$$

Le signe de  $M_z$  est :

- Positif lorsque  $\alpha \in ]0, \pi[$ . C'est le cas lorsque  $\vec{F}$  tend à faire bouger  $M$  vers les  $\theta$  croissants ;
- Négatif lorsque  $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$  C'est le cas lorsque  $\vec{F}$  tend à faire bouger  $M$  vers les  $\theta$  décroissants.

## I-5) - Loi du moment cinétique pour un point matériel

## a) Par rapport à un point fixe

Le point M est soumis à un ensemble de forces  $\vec{F}$ . On note O un point fixe et  $\Delta$  une droite orientée fixe contenant O. On choisit l'axe (Oz) de telle sorte que  $\Delta = (Oz)$ .

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O_i}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\vec{a} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{OM} \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{M}_{O_i} = \vec{M}_O \end{aligned}$$

En effet, le point O étant fixe,  $\frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{v}$ .

## b) Par rapport à un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{z_i}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z)}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O)}{dt} \cdot \vec{u}_z = \sum_i \vec{M}_{O_i} \cdot \vec{u}_z = \sum_i M_{z_i}$$

En effet, l'axe (Oz) étant fixe, le vecteur  $\vec{u}_z$  est constant.

## II – Mouvement à forces centrales

### II-1) Forces centrales

#### a) Définition

Soit O un point fixe de l'espace. Un point matériel M est dit soumis à une force centrale conservative s'il subit une force du type :

$$\vec{f} = f(r)\vec{u}_r \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$

#### b) Conséquences

##### - Conservation du moment cinétique

Un point matériel soumis à une force centrale possède forcément un moment cinétique constant. En effet :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = r \vec{u}_r \wedge f \vec{u}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \text{cste}$$

##### - Mouvement plan

L'axe  $\vec{u}_z$ , est pris selon la direction fixe  $\vec{L}_0$ . D'après les propriétés du produit vectoriel,

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_z = 0$$

Ainsi, le vecteur position reste toujours orthogonal à  $\vec{u}_z$  : la trajectoire est plane, contenue dans le plan  $z = 0$ .

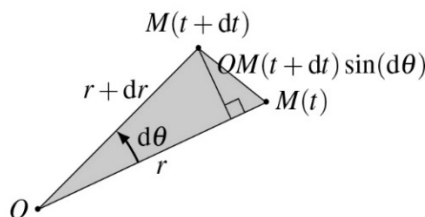
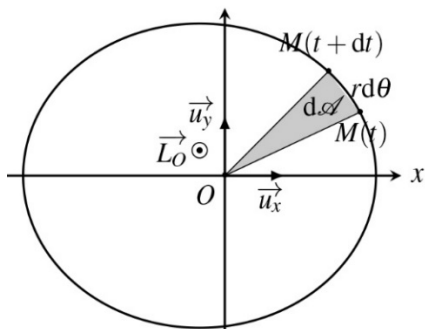
##### - Loi des aires

Calculons  $\vec{L}_0$  :

$$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On introduit la constante des aires qu'on note C tel que :

$$\vec{L}_0 = mC\vec{u}_z \text{ où } C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$$





Cette constante peut s'interpréter en termes de vitesse aréolaire. On appelle vitesse aréolaire  $V$  la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire  $dA$  définie par la trajectoire dans le plan du mouvement. Or :

$$dA = \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Donc :

$$V = \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

La loi des aires représente la deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur repérant le mobile balaie pendant des durées égales des aires égales.

La conservation du moment cinétique entraîne que :

- Le mouvement est plan
- La loi des aires :  $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{cste}$

### c) Énergie potentielle

Une telle force est forcément conservative. En effet, lorsque le point matériel se déplace de  $d\overrightarrow{OM}$  :

$$dE_p = f(r)\overrightarrow{u}_r \cdot (dr\overrightarrow{u}_r + r d\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -f(r)dr$$

$$\text{Donc : } E_p = - \int f(r)dr$$

## II-2) Energie potentielle effective

Dans un champ à force centrale conservative, l'énergie potentielle ne dépend que de la variable radiale.

Écrivons l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  d'un point matériel de masse  $m$  mobile dans le champ de force central ;  $E_m$  est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

$$\text{où : } E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Tout se passe alors comme si un point de masse  $m$  se déplaçait le long d'un axe fixe, de coordonnée correspondante  $r$ , dans une nouvelle énergie potentielle. Celle-ci est appelée énergie potentielle effective :  $E_{p,eff}(r)$ . Son énergie cinétique effective est alors naturellement :

$$E_{c,eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

Les zones accessibles au point matériel sont celles pour lesquelles  $E_{p,eff} < E_m$ .

## II-3) Champs newtoniens gravitationnels

### a) Analyse qualitative

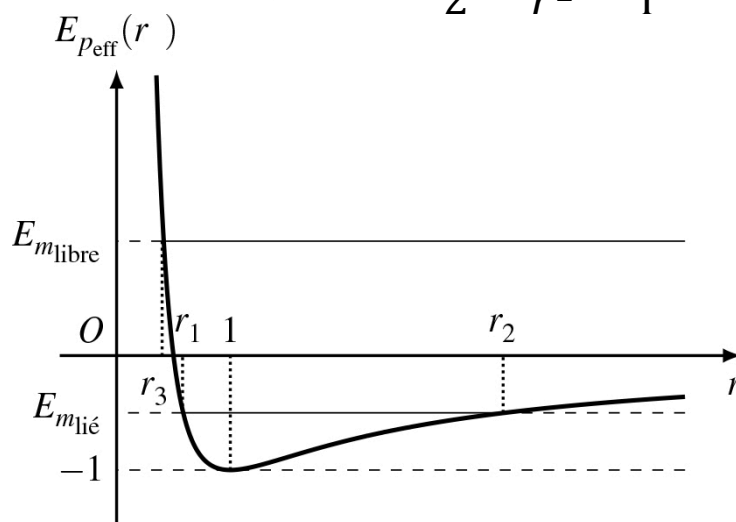
L'énergie potentielle est :

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow E_p = \frac{k}{r} \text{ où } k = -Gmm' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$$

On a :

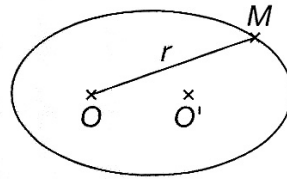
$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

$$\text{où : } E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}$$



Les zones accessibles pour une énergie mécanique  $E_m$ , donnée sont celles pour lesquelles  $E_{p,eff}(r) \leq E_m$ . On distingue alors trois cas sur la figure :

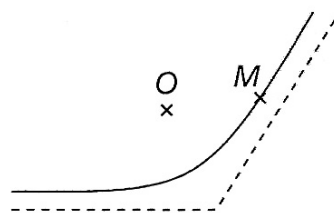
- $E_m < 0$  : la masse  $m$  est mobile dans la zone  $r_1 < r < r_2$  et reste à proximité du centre attracteur  $O$  : c'est un état lié. On admettra que de telles trajectoires sont des ellipses dont l'un des foyers est  $O$ .



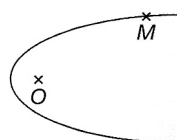
- $E_m > 0$  : la masse  $m$  a accès à la zone  $r \in (r_{min}, \infty)$  c'est clairement un état de diffusion. En fait, la masse réussit à s'arracher à l'attraction du centre  $O$ . Notamment, la norme de la vitesse de la masse est  $v_\infty$ , telle que :

$$E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

Dans ce cas, on admet que la trajectoire est une branche d'hyperbole.



- $E_m = 0$  : il s'agit d'un cas un peu formel qui n'a que peu de chances de se produire vu que l'énergie mécanique doit être exactement nulle. La masse  $m$  pouvant aller jusqu'à l'infini, il s'agit d'un état de diffusion. Géométriquement, on admet qu'il s'agit d'une parabole.



Suivant le signe de l'énergie mécanique  $E_m$ , la trajectoire est :

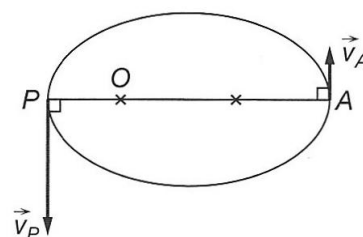
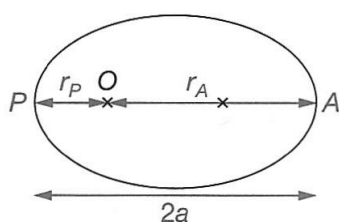
- Elliptique si  $E_m < 0$  ;
- Hyperbolique si  $E_m > 0$  ;
- Parabolique si  $E_m = 0$ .

## b) Trajectoires elliptiques

### i. Propriétés

La première loi de Kepler énonce que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Détaillons quelques caractéristiques des orbites elliptiques, seuls états liés d'un champ newtonien :

- La distance au centre attracteur varie entre deux valeurs limites : maximale  $r_A$  atteinte au point A et minimale  $r_P$  atteinte au point P. Les points A et P se nomment respectivement apogée et périégée pour un satellite en orbite autour de la Terre, et aphélie et périhélie pour une planète autour du Soleil ; On nomme demi-grand axe noté  $a$  la demi-distance entre A et P :  $2a = AP$ ;
- Les deux points A et P de l'ellipse sont caractérisés par le fait que la norme de la vitesse  $v$  est respectivement minimale et maximale. Ce sont par ailleurs les seuls points de l'ellipse où la vitesse est orthoradiale, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon vecteur.



ii. *Énergie mécanique d'une orbite elliptique*

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse  $m'$  immobile en O, l'énergie mécanique  $E_m$ , est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$

En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit en ces points :

$$v = r\dot{\theta} = \frac{C}{r} \text{ aux points A et P}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \text{ aux points A et P}$$

$$\Rightarrow r^2 - \frac{1}{2} \frac{mC^2}{E_m} r + \frac{Gmm'}{E_m} = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives,  $r_A$  et  $r_P$  :

$$r = -\frac{1}{2} \frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Ainsi, le demi-grand axe a vérifie :

$$r_A + r_P = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

Au final, on obtient l'expression de l'énergie mécanique pour une orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2a} = -\frac{|k|}{2a}$$

## c) Trajectoire circulaire

i. *Energie mécanique*

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2r} = -\frac{|k|}{2r}$$

ii. *Première vitesse cosmique*

Le cas le plus simple de trajectoire liée est la trajectoire circulaire. Son rayon est noté  $r$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r \\ \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \\ \Rightarrow m(-r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r^3}} \end{aligned}$$

Au final, la vitesse sur l'orbite circulaire de rayon  $r$  s'écrit :

$$v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r}}$$

où  $m'$  est la masse du centre attracteur.

C'est ce que l'on nomme la première vitesse cosmique. C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet pour le satelliser.

iii. *Troisième loi de Kepler*

La période du mouvement d'une masse  $m$  autour d'un astre immobile de masse  $m'$  est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler : pour des astres orbitant autour d'un corps donné, le rapport du carré de la période sur le

cube du rayon de la trajectoire a toujours la même valeur, liée à la masse du corps attracteur.

Il est à noter que la troisième loi de Kepler reste valide pour les trajectoires elliptiques, à condition de remplacer le rayon par le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse :

Troisième loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

## II-4) Satellites terrestres

### a) Les différentes orbites

Pour les satellites artificiels autour de la Terre, on distingue généralement trois types d'orbites correspondant à des avantages et inconvénients différents, et donc des utilisations différentes.

- **Orbite basse** : il s'agit d'orbites dont l'altitude est inférieure à 2 000 km (limite arbitraire).
  - **Avantages** : ce type d'orbite sont les plus basses et donc les moins « chères » en carburant, cela présente aussi des avantages pour les satellites d'observations car la proximité permet des prises de photos ou de mesures avec une plus grande résolution.
  - **Inconvénients** : c'est aussi le type d'orbite pour lesquelles la force de traînée due à l'atmosphère est la plus importante. On se limite d'ailleurs généralement à des altitudes supérieures à 300 km.
  - **Utilisation** : satellites météo, d'imagerie terrestre, de renseignement, de télécommunication, mission habitée.

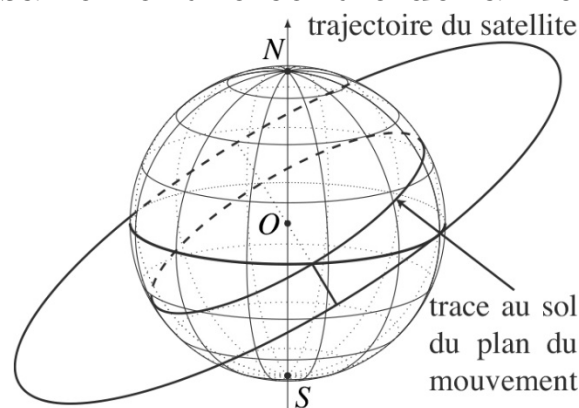
- Orbite terrestre moyenne : il s'agit d'orbites dont l'altitude est comprise entre 2 000 km et 36 000 km. Ces satellites tournent plus lentement autour de la terre que les précédents.

Ce type d'orbite est utilisé pour les satellites de navigation et positionnement : GPS, Galileo... Avec une période d'environ 1/2 jour à 20 000 km d'altitude, on peut « facilement » créer une constellation de satellites (ensemble de satellites) dont plusieurs sont toujours visibles depuis n'importe quel point du globe.

- Orbite géostationnaire : Ce type d'orbite situé à 36000 km est utilisé pour les télécommunications (bien que plus loin que l'orbite basse, ce qui est un inconvénient, on peut rester focalisé sur un pays en particulier), pour la surveillance en continue d'un point précis. Ces orbites sont très demandées (environ 500 satellites sur la même orbite), et ne permettent pas de voir (ou d'être vue depuis) les pôles.

### b) Satellite géostationnaire

L'étude du mouvement du satellite est effectuée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, on a montré que l'orbite est située dans un plan qui contient le centre d'attraction de la force gravitationnelle. Le plan du mouvement contient donc nécessairement le centre de la Terre.



La figure montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre, ainsi que



l'intersection du plan du mouvement avec la sphère terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite est situé tantôt au dessus de l'hémisphère nord et tantôt au dessus de l'hémisphère sud. Il n'est pas immobile pour un observateur terrestre qui va, au minimum, observer un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite.

Le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan équatorial de la Terre.

Cette situation correspond à une orbite circulaire de période  $T$  24 h. D'après l'expression de la vitesse circulaire on a :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow r = \left( \frac{Gm'T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42000 \text{ km}$$

soit une altitude :  $h = 36000 \text{ km}$

## II-5) Vitesses cosmiques

### a) Première vitesse cosmique

Il s'agit de la vitesse en orbite basse d'un satellite sur une orbite rasante (altitude nulle).

$$v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} = 7,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

### b) Deuxième vitesse cosmique

Au fur et à mesure qu'un objet est lancé à partir de la surface d'une planète avec une vitesse de norme de plus en plus importante, cet objet atteint des altitudes de plus en plus élevées (il s'agit ici d'une expérience de pensée vu que tous les frottements dus à l'air

sont négligés). Il est intéressant de connaître la vitesse limite, pour laquelle l'objet partira au loin sans revenir, c'est ce que l'on nomme la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique. Comme  $E_m$  est constante, on l'évalue au moment du lancer :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \geq 0$$

où  $R_T$  est le rayon de l'astre attracteur (et  $M_T$  sa masse). Donc :

$$v_0 > v_{\text{lib}} \text{ où } v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Numériquement, la vitesse de libération à la surface de la Terre est d'environ  $11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et seulement de  $2,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  à la surface de la Lune, qui est bien plus légère que la Terre.

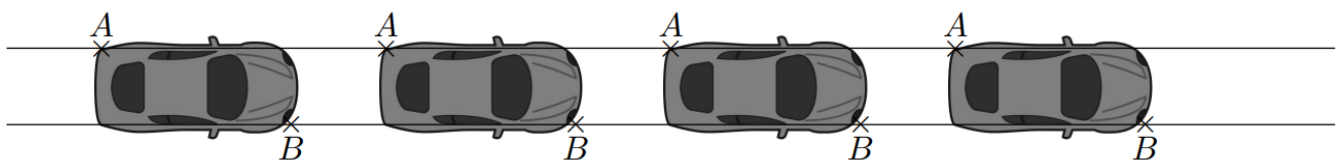
### III – Solide en rotation

#### III-1) Translation

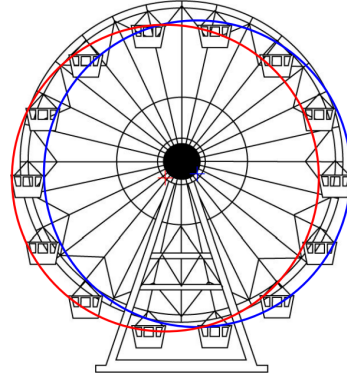
En mécanique, la notion de solide représente un solide indéformable (En thermodynamique c'est un état).

On dit que deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre si les axes de  $R$  gardent toujours une direction constante par rapport à ceux de  $R$ .

Tous les points d'un solide en translation rectiligne dans le référentiel  $R$  d'étude décrivent des trajectoires rectilignes parallèles entre elles dans  $R$ .



Tous les points d'un solide en translation circulaire dans le référentiel R d'étude décrivent des trajectoires circulaires dans R de même rayon mais dont les centres sont décalés les uns par rapport aux autres.

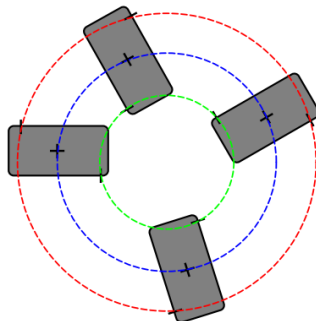


### III-2) Rotation autour d'un axe fixe

Un solide a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport au référentiel R si les points liés rigidement au solide et situés sur cet axe sont fixes par rapport à R et au solide.  
L'axe de rotation peut appartenir ou non au solide en rotation.

Le mouvement du point M est circulaire autour de l'axe, donc la distance  $r$  ne varie pas au cours du temps. En utilisant les coordonnées polaires sa vitesse est donc :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\omega\vec{u}_\theta$$



### III-3) Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz), le moment d'inertie  $J_z$  est constant, alors :

$$J_z \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \sum_i M_{zi}$$

$$\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} = \sum_i M_{zi}$$

Le principe fondamental de la dynamique écrit pour un solide en translation rectiligne sur l'axe (0x) :

$$m\ddot{x} = \sum_i f_{xi}$$

On remarque que :

- L'accélération linéaire  $\ddot{x}$  est remplacée par l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$
- Les forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetés sur l'axe de rotation
- La masse inerte  $m$  par le moment d'inertie.

### III-4) Couples

a) Couple de deux forces

Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  opposées s'appliquant respectivement en  $A_1$  et  $A_2$  forment un couple de forces. Leur résultante est nulle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Or :

$$M_z = -F_1 d_1 - F_2 d_2 \text{ avec } F_1 = F_2 = f$$

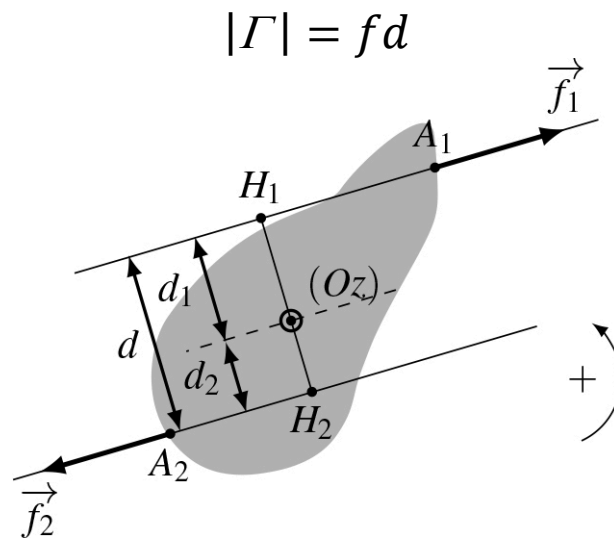
D'où :

$$|M_z| = f(d_1 + d_2) = fd$$

La distance  $d$  entre ces droites s'appelle le bras de levier du couple et le moment du couple de force par rapport à l'axe orienté  $(Oz)$  est égal au produit de la force par le bras de levier. :

$$|M_z| = fd_1 + fd_2 = fd$$

Par abus de langage, étant donné que la somme des deux forces est nulle et que seul le moment de ces forces est non nul, on le désigne souvent par couple :



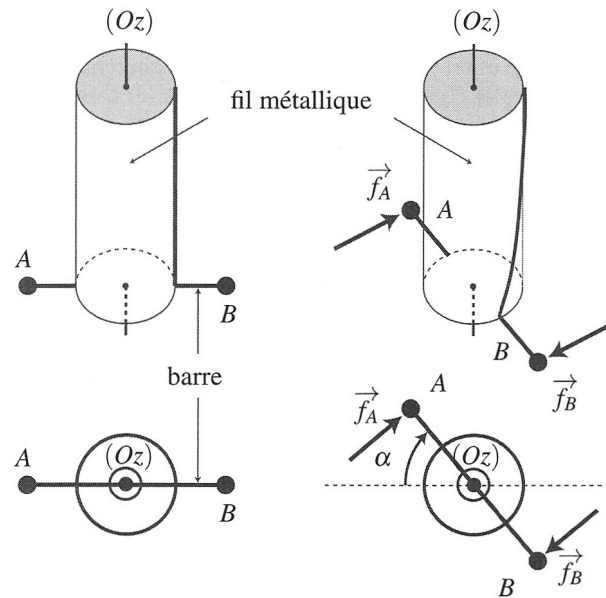
Un couple de deux forces telles que :  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

Peut s'exprimer sous la forme :  $\Gamma = \pm fd$

Il est algébrique et on peut trouver son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner M autour de l'axe orienté  $(Oz)$  : si ce sens est direct,  $\Gamma > 0$  sinon,  $\Gamma < 0$ .

### b) Couple de torsion

On considère un fil cylindrique métallique d'axe  $(Oz)$  dont la section supérieure est fixe et auquel on attache une barre AB. On applique un couple de forces de norme  $f$  aux extrémités A et B de la barre.



Couple de torsion d'un fil en perspective ou en vue du haut. À gauche, le fil de torsion est au repos. À droite, il est à l'équilibre sous l'action d'un couple. La section supérieure du fil est fixe.

Le moment par rapport à  $(Oz)$  de ce couple vaut :  $\Gamma_{1z} = f AB$  et conduit le fil à se tordre d'un angle  $\alpha$  appelé angle de torsion.

Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment  $\Gamma$  du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion  $\alpha$  :

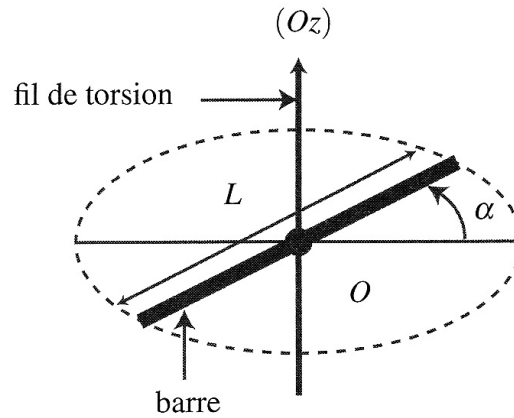
$$\Gamma = -C\alpha \text{ où } C = \text{cste de torsion}$$

D'après la loi du moment cinétique appliquée à la barre à l'équilibre :

$$\Gamma_z = -\Gamma_{1z}$$

### III-5) Pendule de torsion

On considère une barre solide horizontale de masse  $m$ , de longueur  $L$ , suspendue en son milieu  $O$  à un fil de torsion vertical de constante de torsion  $C$ . On étudie des mouvements dans lesquels le fil reste vertical et la barre tourne autour du fil avec un mouvement oscillatoire, tout en restant dans un plan horizontal.



Pendule de torsion vu en perspective.

On applique à la barre la loi du moment cinétique par rapport à l'axe  $(Oz)$  fixe dans le référentiel  $R$  galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\alpha} = \Gamma = -C \alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{C}{J_z}$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega_0$ .

On peut également établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation précédente . Pour cela, on la multiplie par  $\dot{\alpha}$  :

$$J_z \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + C \alpha \dot{\alpha} = J_z \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \right) + C \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + C \frac{\alpha^2}{2} = \text{cste} = E_m$$

- Le terme  $J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$  correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de  $(Oz)$ .
- Le terme  $C \frac{\alpha^2}{2}$  est l'énergie potentielle élastique stockée dans le fil de torsion.

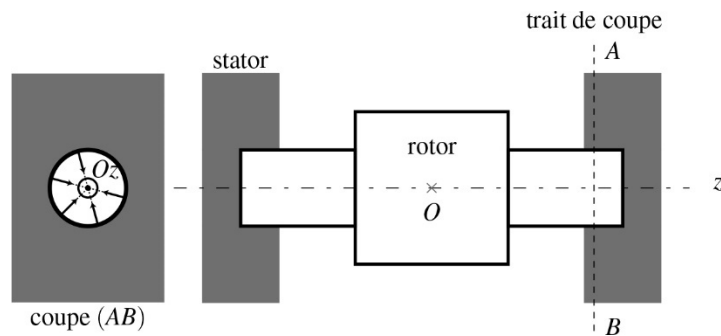
## III-6) Pendule pesant

## a) Liaison pivot d'axe (Oz)

Une liaison pivot d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

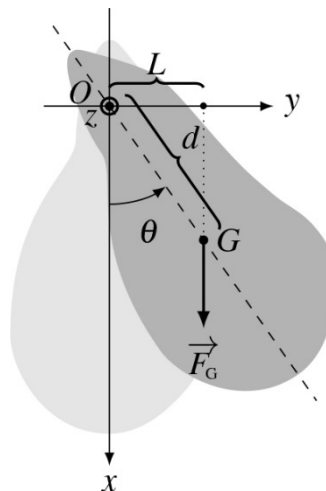
L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$M_z(\text{pivot}) = 0$$



Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de frottements que l'on peut réduire fortement en utilisant des roulements à billes ou à aiguilles.

## b) Equation du mouvement



Le solide est soumis à :

- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison



pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;

- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

$$M_z = -mgdsin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= J_z \ddot{\theta} = M_z = -mgdsin\theta \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgdsin\theta}{J_z} &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta &= 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z} \end{aligned}$$

Il s'agit de la même équation que celle que l'on a obtenue lors de l'étude du pendule simple.

c) Aspects énergétiques

$$\begin{aligned} \text{Soit : } J_z \ddot{\theta} + mgdsin\theta &= 0 \\ \Rightarrow J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgd\dot{\theta} sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 - mgdcos\theta \right) = 0$$

Donc :

$$\underbrace{\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2}_{E_c} - \underbrace{mgdcos\theta}_{E_p} = E_m = \text{cste}$$

### III-7) Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

#### a) Énergie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$  repérés en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . On a vu que le moment d'inertie du solide par rapport à  $(Oz)$  vaut alors :

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i J_{zi} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

Un solide de moment d'inertie  $J_z$  en rotation autour d'un axe fixe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$$

#### b) Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

On considère une force  $\vec{f}_i$  qui s'applique au point  $M_i$  d'un solide en rotation autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . La puissance de la force  $\vec{f}_i$  est égale au produit scalaire de la force par la vitesse du point  $M_i$  sur laquelle elle s'applique d'où :

$$P(\vec{f}_i) = \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{f}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = f_{i\theta} r_i \dot{\theta} = M_{zi} \dot{\theta}$$

La puissance de la force  $\vec{F}_i$  appliquée en un point  $M_i$  d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $(Oz)$ , est égale à :

$$P(\vec{f}_i) = M_{zi} \dot{\theta} = M_\Delta^{ext} \omega$$

## III-8) Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

La loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) fixe implique :

$$J_z \ddot{\theta} = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \Rightarrow J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2\right)}{dt} = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i)$$

Dans le référentiel R galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures  $\vec{F}_l$  qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i) = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta} = \sum_{\square} M_{\Delta}^{ext} \omega$$

## III-9) Système déformable

Dans le cas d'un système indéformable la puissance des forces intérieures est nulle. Par contre pour un système déformable, elle doit être prise en compte. Ainsi le théorème de la puissance cinétique s'écrit :

Loi de la puissance cinétique pour un système déformable :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P^{ext} + \underbrace{\sum P^{int}}_{=0 \text{ pour un solide}}$$

Exemple : le tabouret d'inertie

On considère une personne assise sur un tabouret pouvant tourner librement. Cette personne tourne initialement avec les bras

écartés et en tenant des masses dans chaque main. La personne ramène les bras vers lui. On se propose de modéliser ce problème de la façon suivante :

- Position 1 : bras tendus, 2 masses situées à une distance  $r_1$  de l'axe de rotation et à une vitesse de rotation  $\omega_1$ .
- Position 2 : bras repliés, 2 masses situées à une distance  $r_2$  de l'axe de rotation et à une vitesse de rotation  $\omega_2$ .

On peut donc affirmer que :

$$J_2 < J_1$$

L'axe est fixe et le référentiel galiléen. On peut donc appliquer le théorème du moment cinétique. Toutes les forces présentes possèdent un moment nul par rapport à l'axe de rotation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Les poids sont parallèles à l'axe de rotation} \\ \text{La réaction est portée par l'axe de rotation} \\ \text{La liaison pivot est supposée idéale.} \end{array} \right.$$

d'où :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta}^{ext} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Par conséquent } L_1 = L_2 &\Rightarrow J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2 \\ &\Rightarrow \omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \omega_1 > \omega_1 \end{aligned}$$

Or  $W_{ext} = 0$ , car la liaison pivot au niveau de l'axe de rotation du tabouret est supposée idéale et que les autres forces extérieures (poids, réaction) ne travaillent pas au cours du mouvement.

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} J_2 \left( \frac{J_1}{J_2} \omega_1 \right)^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 \\ &\Rightarrow \Delta E_c = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 \left( \frac{J_1}{J_2} - 1 \right) > 0 \text{ car } J_1 > J_2 \end{aligned}$$

Cette variation d'énergie cinétique provient de l'opérateur, source de puissance interne en créant une déformation du système ( $W_{int}$ ).