

MC1a – Mécanique en référentiel galiléen (1)

Thème : Mouvements et interactions

Pour commencer l'année on va faire un léger rappel du cours de mécanique du point de première année. En effet, la mécanique du point est une matière à ne pas prendre à la légère car la plupart des autres thématiques s'appuient dessus dans la résolution des exercices. Bien entendu ce cours qui durera une semaine, ne pas se substituer à un cours de deux mois de première année et ne sera pas complet mais posera les bases.

0 - Lien avec le programme de PCSI

La partie 2.1 « Description et paramétrage du mouvement d'un point » vise notamment à mettre en place les principaux systèmes de coordonnées : cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques. Le but est de permettre aux étudiants de disposer d'outils efficaces pour décrire une grande variété de mouvements de points. Pour atteindre cet objectif, il convient de les familiariser progressivement avec les projections et dérivations de vecteurs ainsi qu'avec l'algébrisation des grandeurs dans un contexte relevant de la physique. Enfin, cette partie est l'occasion de procéder à des analyses qualitatives des comportements cinématiques de systèmes réels assimilés à un point, notamment sur les exemples simples des mouvements rectilignes et circulaires.

Notions et contenus	Capacités exigibles	Remarques
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point		
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.	
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.	Il est important de connaître par cœur ou savoir retrouver TRES rapidement ces expressions.
	Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.	
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.	
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.	A connaître par cœur.
Repérage d'un point dont la trajectoire est connue. Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.	Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane. Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.	Le repère de Frenet est une nouveauté du programme de 2022 par rapport à 2013...on le retrouvera dans les nouveaux sujets de concours.

Dans la partie **2.2.** intitulée « **Lois de Newton** », on cherche d'abord à renforcer les compétences des étudiants relatives à la mise en équations d'un problème, qu'il s'agisse des étapes de bilans de forces ou de projection de la deuxième loi de Newton sur la base choisie. On cherche par ailleurs, sur l'exemple de quelques mouvements simples, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : stabilité des solutions, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période typique d'évolution, etc. Cette pratique s'articule avec l'utilisation d'un langage de programmation pour résoudre des équations différentielles. Enfin, il s'agit aussi de confronter les étudiants aux limites de validité de certains modèles de forces, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle.

2.2. Lois de Newton		
Quantité de mouvement Masse d'un système. Conservation de la masse pour système fermé.	Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.	
Quantité de mouvement d'un point et d'un système de points. Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.	Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\vec{p} = m \vec{v}(G)$.	
Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.	
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.	Attention aux projections !!!
Deuxième loi de Newton. Théorème de la quantité de mouvement.	Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen. Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.	
Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Etudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.	On va revenir dessus dans la partie MC3.
Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.	Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée. Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.	On n'oubliera qu'en CPGE il y a deux modèles étudiés : le linéaire $-h\vec{v}$ et le quadratique $-hv^2\vec{u}$
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Modéliser un comportement élastique par une loi de force linéaire ; extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de données mesurées ou fournies. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux. Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.	La force de raideur d'un ressort peut-être relié à une force de déformation élastique (on reverra cela en physique des ondes)
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.	À savoir résoudre très rapidement.
Modèle des lois de frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.	Les lois de Coulomb doivent être fournies...

La partie **2.3.** « **Approche énergétique du mouvement d'un point matériel** » vise à construire une démarche alternative et complémentaire pour l'étude d'une situation relevant de la mécanique – et plus généralement de la physique – fondée sur la conservation de certaines grandeurs – ici, l'énergie mécanique. Cette approche est l'occasion d'illustrer la capacité prédictive des analyses graphiques et numériques, par exemple pour pouvoir décrire un comportement à partir d'une représentation graphique de l'énergie potentielle dans le cas d'un mouvement conservatif.

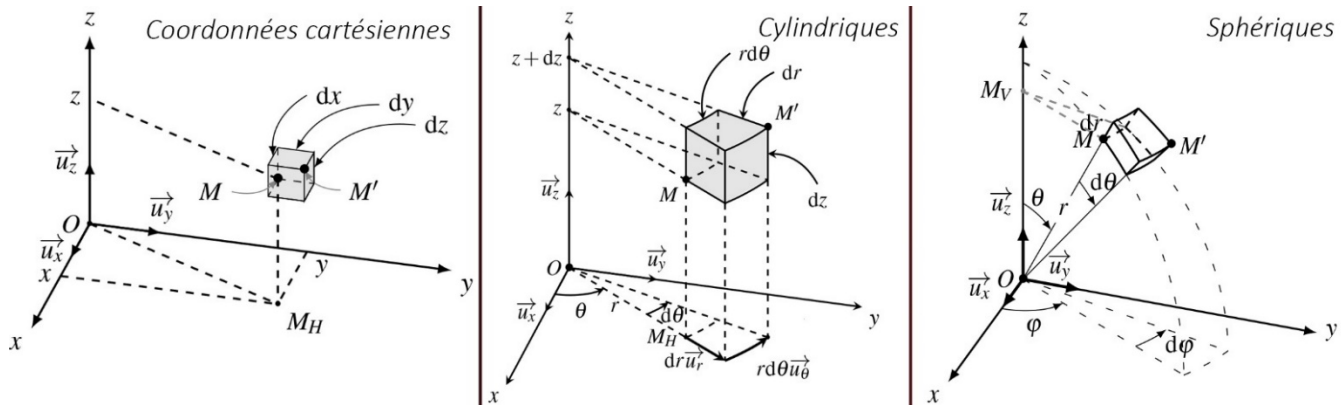
2.3. Approche énergétique du mouvement d'un point matériel		
Puissance, travail et énergie cinétique Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.	Les forces de frottements sont des forces résistantes.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.	
Champ de force conservative et énergie potentielle Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique. Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.	Attention à l'énergie potentielle de pesanteur et son signe suivant l'orientation de l'axe.
Énergie mécanique Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.	
Mouvement conservatif à une dimension.	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.	
Positions d'équilibre. Stabilité.	Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.	Deux méthodes pour trouver x_{eq} : E_p ou PFD .
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non- linéaire et faire apparaître l'effet des termes non- linéaires.	

La partie 2.4. « **Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires** » introduit l'expression de la force de Lorentz ainsi que deux situations de base sur lesquelles les étudiants doivent être autonomes dans la résolution, attestant en cela de l'acquisition d'une certaine aisance à ce stade de leur formation. Des situations physiques variées sont en capacité d'illustrer concrètement cette partie qui ne doit pas se réduire à des développements calculatoires ou des illustrations graphiques.

2.4. Mouvement de particules chargées dans des champs électrique et magnétostatique, uniformes et stationnaires		
Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.	Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.	Les forces de frottements sont des forces résistantes.
Puissance de la force de Lorentz.	Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.	
Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.	Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant. Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.	Attention au signe de l'énergie potentielle de pesanteur suivant l'orientation de l'axe (Oz).
Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.	Déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.	Il existe plusieurs méthodes pour faire ce calcul. On en verra plusieurs.

I – Cinématique

I-1) Les différentes coordonnées



Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \\ \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \overline{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, & z \in \mathbb{R} \\ x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta, & z = z \\ \overline{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, & 0 \leq \theta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ x = r \sin \theta \cos \varphi, & y = r \sin \theta \sin \varphi, & z = r \cos \theta \\ \overline{OM} = r\vec{u}_r \end{cases}$

I-2) Grandeurs géométriques élémentaires

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} d\overline{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z \\ d^2S = dx dy \text{ ou } dx dz \text{ ou } dy dz \\ d^3\tau = dx dy dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overline{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z \\ d^2S = dr dz \text{ ou } r d\theta dz \\ d^3\tau = r dr d\theta dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overline{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi \\ d^2S = r dr d\theta \text{ ou } r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \text{ ou } r \sin \theta d\varphi dr \\ d^3\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{cases}$

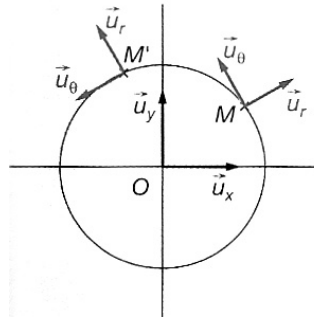
I-3) Vitesse et accélération

a) Vitesse

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z + z \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

Contrairement au cas des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de la base locale varient au cours du temps. Il est alors nécessaire d'évaluer leur dérivée temporelle.



On a :

$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$$

$$\text{et } \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$

Donc :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\text{et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

On retiendra :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

En effet la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à θ est directement orthogonale à celui-ci.

D'où :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

b) Accélération

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z$$

Par conséquent :

$$\Rightarrow \vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \end{cases}$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dots \end{cases}$$

c) Mouvement circulaire uniforme

À partir de l'expression de \vec{v} et \vec{a} , on obtient vu que :

$$\begin{cases} r = R = cste \Rightarrow \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = \omega = cste \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \\ z = cste \Rightarrow \dot{z} = 0 \text{ et } \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

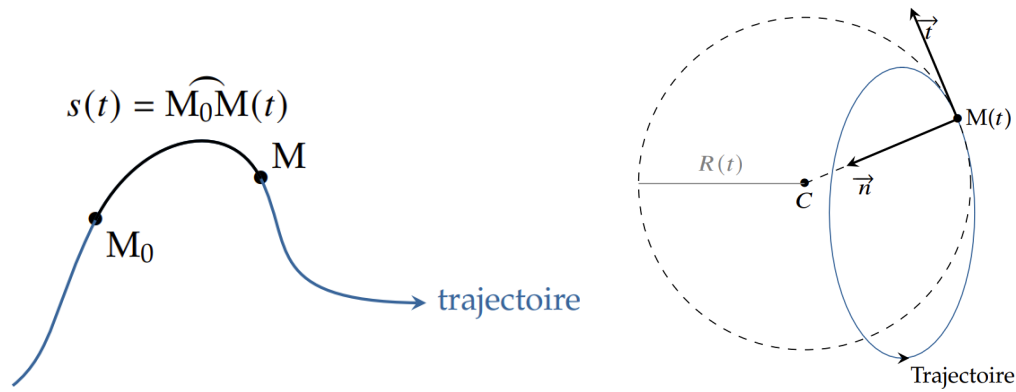
Pour un mouvement circulaire uniforme, dans un plan orthogonal à (Oz) :

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r \end{cases}$$

I-4) Repère de Frenet

La base de Frenet est constituée de deux vecteur unitaires orthogonaux entre eux, notés \vec{t} et \vec{n} . Les deux vecteurs sont liés au point M dont on décrit le mouvement. (Le troisième vecteur si besoin se note \vec{b})

Pour repérer le point M on se sert de l'abscisse curviligne $s(t)$ représentée sur le schéma ci-dessous.



- \vec{t} est tangent à la trajectoire au point M, et dirigé dans le sens du mouvement.
- \vec{n} est orthogonal à \vec{t} et dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.
- Le vecteur vitesse est tangentiel à la courbe, donc par définition de \vec{t} :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{t} \text{ où } v(t) = \dot{s}(t)$$

- Le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}(t) = \dot{v} \vec{t} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

Où $R(t)$ est le rayon de courbure de la courbe au point M, c'est-à-dire le rayon du cercle qui épouse le mieux la forme de la trajectoire au point M.

Pour mieux comprendre la notion de rayon de courbure et de cercle osculateur, on pourra aller voir cette animation :

<https://femto-physique.fr/simulations/evolute.php>

II – Les lois de Newton

II-1) Première loi de Newton

Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

II-2) Deuxième loi de Newton

Le principe fondamental de la dynamique ou seconde loi de Newton s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

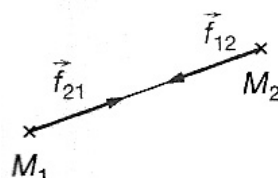
Si la masse du système est constante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i$$

II-3) Troisième loi de Newton

Si le milieu extérieur exerce la force $\vec{f}_{ext \rightarrow M}$ sur M, alors M exerce la force $\vec{f}_{M \rightarrow ext}$ sur le milieu extérieur telle que $\vec{f}_{M \rightarrow ext} = -\vec{f}_{ext \rightarrow M}$.

Dans le cas des points matériels, le problème présente une symétrie d'axe M_1M_2 . Les forces sont opposées sur l'axe M_1M_2 .



III – Les lois de frottement

III-1) Les frottements « fluides

La loi de frottement fluide peut s'écrire :

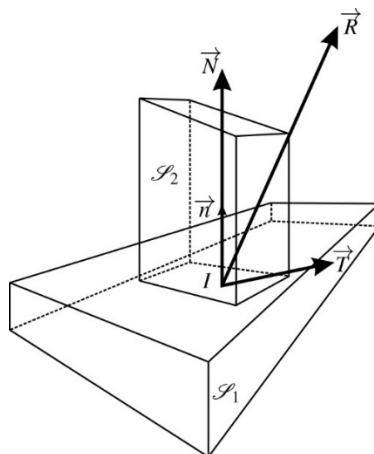
$$\vec{f} = -h\nu^\beta \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{v}}{\nu}$$

Cependant afin de simplifier les problèmes on admet que la force de frottement peut s'écrire en général sous deux formes.

- Faible vitesse, modèle linéaire : $\vec{f} = -h\nu \vec{u} = -h\vec{v}$
- Vitesse élevée, modèle quadratique : $\vec{f} = -h\nu^2 \vec{u} = -h\nu \vec{v}$

III-2) Description des forces de contact

Quand un point matériel est au contact avec un support, ce dernier exerce une force sur le point matériel, appelée réaction du support et notée \vec{R} . On rappelle que cette force a pour origine la répulsion à faible distance des nuages électroniques des atomes du point matériel et du support. La réaction \vec{R} se décompose en une partie normale au support notée \vec{N} et une partie tangente au support notée \vec{T} , soit $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$



La partie tangentielle est liée aux frottements entre le support et le point matériel. Elle est souvent nommée force de frottement. Un contact sans frottement impose une réaction purement normale.

III-3) Lois de Coulomb

a) Modèle des frottements secs

Le français Charles-Augustin Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, donnant une relation entre les composantes tangentielle et normale de la force de réaction.

S'il y a glissement, $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors:

- Le vecteur \vec{T} est colinéaire à \vec{v} ;
- Le vecteur \vec{T} s'oppose au mouvement, ainsi $\vec{T} \cdot \vec{v} \leq 0$;
- $\|\vec{T}\| = f_D \|\vec{N}\|$ où f_D coefficient de frottement dynamique

S'il n'y a pas glissement, $\vec{v} = \vec{0}$ alors:

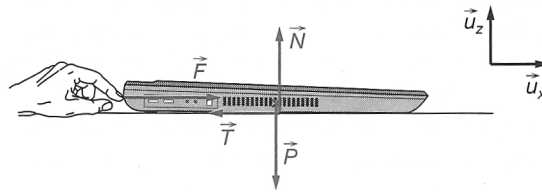
- $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$ où f_s coefficient de frottement statique.
- On parle d'adhérence.

b) Les coefficients de frottements

En général, $f_D < f_s$; cependant, dans de nombreux modèles simplifiés, on écrit souvent $f_D = f_s = f$.

c) Exemple.

Un ordinateur portable est posé sur une table et une personne le pousse vers la droite. L'ordinateur est supposé se comporter comme un point matériel.



Étudions successivement les deux cas :

i. *Non glissement*

Si, malgré les efforts de la personne, l'ordinateur ne glisse pas, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'ordinateur s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

Donc :

$$\vec{F} = -\vec{T} \text{ et } \vec{N} = -m\vec{g}$$

$$\text{Or : } \|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \Rightarrow F < f_s mg \Rightarrow F < f mg$$

où f est le coefficient de frottement.

ii. *Glissement*

Si l'ordinateur glisse, on obtient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

soit en projection sur l'horizontale et la verticale :

$$m\ddot{x} = F - T \text{ et } 0 = N - mg$$

$$\text{Or : } \|\vec{T}\| = f_d\|\vec{N}\| = f\|\vec{N}\| = fmg$$

Donc :

$$m\ddot{x} = F - fmg > \text{ si } F > fmg$$

IV – Théorèmes énergétiques

IV-1) Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B} \text{ où } dE_c = \delta W$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{f} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v} \\
 \Rightarrow m \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \text{ car } dv^2 = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} \\
 \Rightarrow \frac{d(E_c)}{dt} &= P \text{ (Théorème de la puissance cinétique)} \\
 &\Rightarrow dE_c = \delta W \\
 \int_A^B d(E_c) &= \int_A^B P dt = \int_A^B \delta W \\
 \Leftrightarrow \Delta E_c &= E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}
 \end{aligned}$$

IV-2) Énergie potentielle et forces conservatives

a) Définitions

On dit qu'une force est conservative si son travail $W_{A \rightarrow B}$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B.

Ainsi on décompose les travaux (et les forces) en deux catégories :

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$$

Tel que : $\delta W_c = -dE_p$ où E_p est appelée Energie potentielle

Une force est dite conservative si on peut trouver une fonction énergie potentielle E_p telle que

$$\delta W_c = \vec{f}_c \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p$$

On peut donc écrire : $\vec{f}_c = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$

Exemples de forces conservatives

- Poids d'un corps

Soit : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ d'où :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ &\Leftrightarrow dE_p = mgdz \\ &\Rightarrow E_p = mgz + C \end{aligned}$$

Si l'axe est dirigé dans l'autre sens on aura : $E_p = -mgz + C$

- Force newtonienne

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ où } k = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} = -Gmm_p \\ \Rightarrow dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + \dots) \\ &\Leftrightarrow dE_p = -\frac{k}{r^2} dr \\ &\Rightarrow E_p = \frac{k}{r} + C \end{aligned}$$

Or $E_p = 0$ lorsque $r \rightarrow \infty$:

$$\Rightarrow E_p = \frac{k}{r}$$

- Force élastique d'un ressort

Un ressort de raideur k ayant subi un allongement $\Delta x = x - x_0$ exerce une force de rappel élastique dans la direction de l'allongement : $\vec{f} = -k(x - x_0)\vec{u}_x$

Donc :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = k(x - x_0)\vec{u}_x \cdot (dx\vec{u}_x + \dots) \\ &\Leftrightarrow dE_p = k(x - x_0)dx \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + C \end{aligned}$$

où C est une constante.

On prend généralement comme référence des énergies

potentielles $E_p=0$ lorsque le ressort est à sa longueur à vide donc que $x - x_0 = 0$.

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

b) Exemples de forces non conservatives

On considère une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\lambda \vec{v} \cdot \vec{v} dt = -\lambda v^2 dt < 0$$

Donc $W_{A \rightarrow B} < 0$ et même $W_{A \rightarrow A} < 0$.

IV-3) Énergie mécanique

Soit :

$$dE_c = \delta W = \delta W_c + \delta W_{Nc} = -dE_p + \delta W_{Nc}$$

$$\Rightarrow dE_p + dE_c = \delta W_{Nc}$$

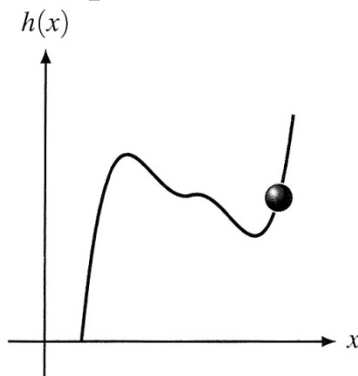
$$\Rightarrow dE_m = \delta W_{Nc}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$dE_m = \delta W_{Nc} \text{ où } E_m = E_p + E_c$$

$$\Rightarrow E_m = \text{cste si } W_{Nc} = 0$$

IV-4) Étude qualitative des mouvements et des équilibres



Jeu constitué d'une perle enfilée sur une tige rigide. Le profil d'altitude $h(x)$ coïncide, à un facteur d'échelle près, au profil d'énergie potentielle.

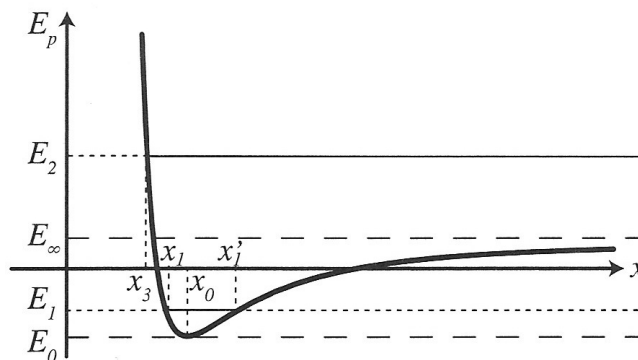
D'après le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie mécanique se conserve soit :

$$E_p + E_c = E_m = \text{cste}$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique est une quantité positive :

$$\begin{aligned} E_c = E_m - E_p &> 0 \\ \Rightarrow E_m &> E_p \end{aligned}$$

Ainsi on peut classer les différentes possibilités sur un graphe $E_p(x)$.



Analyse graphique des positions accessibles au mobile en fonction de son énergie mécanique.

- Etats impossibles :

Si $E_m < E_0$, alors $E_m < E_p$ quelle que soit la position.

- Etats liés :

Si $E_0 < E_m < E_\infty$ alors le point matériel ne peut évoluer qu'entre les positions x_1 et x_1' . Il reste dans une zone bornée de l'espace et ne peut pas s'en aller à l'infini.

- Etats libres :

Si $E_m > E_\infty$ alors le point matériel peut évoluer aux positions d'abscisses x vérifiant $x \geq x_3$. Le point matériel peut s'échapper à l'infini.

IV-5) Positions d'équilibre

Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Son abscisse x_{eq} vérifie l'équation :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0$$

La position d'équilibre x_{eq} est stable si l'énergie potentielle est minimale en x_{eq} . Cela se traduit généralement par :

$$\left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0$$

V – Force de Lorentz

V-1) Aspects énergétiques

Une charge q de vitesse \vec{v} placée en M à l'instant t subit la force électromagnétique, appelée force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

D'un point de vue énergétique, calculons la puissance de la force de Lorentz :

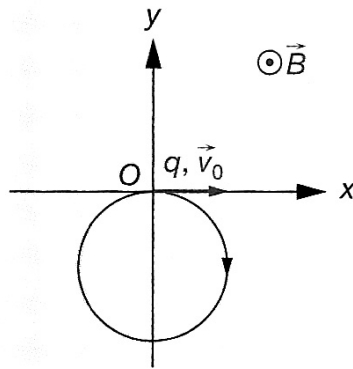
$$\begin{aligned} P &= \vec{f} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &\Rightarrow P = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{f}_e \cdot \vec{v} = P_e \end{aligned}$$

Un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une charge, en revanche, l'action d'un champ magnétique sur une charge sera en général de courber la trajectoire de la charge sans lui fournir d'énergie.

V-2) Mouvement cyclotron

a) Résolution en coordonnées cartésiennes

Une particule de charge q et masse m placée dans un champ magnétique uniforme et statique $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La particule est située initialement au point O et sa vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ est perpendiculaire au champ magnétique.



Le théorème de la puissance cinétique : $\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$ montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Or } \ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0$$

\Rightarrow la trajectoire est donc plane.

L'intégration des projections sur \vec{u}_x et \vec{u}_y donne :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 & (1) \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$$

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$ donnent :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$$

Donc (1) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} x \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} y - \frac{qB_0}{m} v_0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases} \quad \text{où } \omega_c = \frac{qB_0}{m} \text{ pulsation cyclotron}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

Si on pose $R = \frac{v_0}{\omega_c}$ on a :

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y + R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Le mouvement « cyclotron » se caractérise par une trajectoire circulaire parcourue avec une vitesse angulaire ω_c constante, de centre $(x = 0, y = \pm R)$ et de rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B_0}$.

b) Méthode complexe

Si on reprend les équations couplées, on peut poser : $u = x + iy$ ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ \ddot{y} = -qB_0\dot{x} \end{cases}$$

s'écrit :

$$m(\ddot{x} + i\ddot{y}) = qB_0(\dot{y} - i\dot{x}) = -iqB_0(\dot{x} + i\dot{y})$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u} = -i \frac{qB_0}{m} \dot{u} = -i\omega_c \dot{u} \text{ où } \omega_c = \pm |q|B_0/m$$

$$\Rightarrow \dot{u} = Ae^{-i\omega_c t}$$

$$\text{or } \dot{u}(0) = v_0 \Rightarrow \dot{u} = v_0 e^{-i\omega_c t}$$

$$\Rightarrow u = \frac{v_0}{-i\omega_c} e^{-i\omega_c t} + B = i \frac{v_0}{\omega_c} e^{-i\omega_c t} + B$$

$$\text{or } u(0) = 0 \Rightarrow u = i \frac{v_0}{\omega_c} (e^{-i\omega_c t} - 1)$$

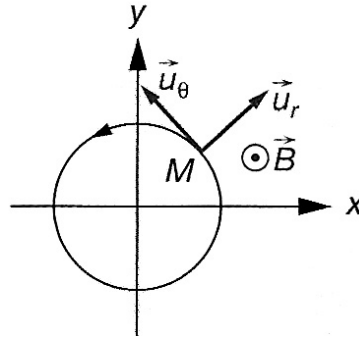
$$\Rightarrow u = -\frac{v_0}{\omega_c} \sin(-\omega_c t) + i \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(-\omega_c t) - 1)$$

On récupère la partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

c) Résolution « simplifiée » en coordonnées polaires

Admettons que la trajectoire soit un cercle perpendiculaire au champ magnétique.



Le vecteur accélération s'écrit en coordonnées polaires de centre O :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = qR\dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B_0\vec{u}_z = qR\dot{\theta}B_0\vec{u}_r$$

Le principe fondamental de la dynamique donne alors :

$$\begin{cases} qR\dot{\theta}B_0 = -mR\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On déduit que le cercle est parcouru uniformément à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \frac{qB_0}{m}$

Or :

$$R = \frac{v_0}{\dot{\theta}} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B_0}$$