MC1 – Mécanique en référentiel galiléen

A - Travaux dirigés

MC11 - Palet sur un plan incliné

Un palet de masse m repose sur un plan incliné d'un angle α sur l'horizontale. On augmente progressivement l'angle d'inclinaison et on observe que le palet se met en mouvement pour un angle α_m. On veut montrer que la mesure de cet angle permet de connaître la valeur du coefficient de frottement solide f apparaissant dans les lois empiriques de Coulomb du frottement solide.

On décompose la force de contact exercée par le plan incliné sur le palet en une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$ appelée force de frottement solide : $\vec{R}$.

Le coefficient de frottement solide noté f est alors tel que :

- En l'absence de glissement : $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$
- En présence de glissement : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$

1. Quelle est la force motrice qui entraîne le palet vers le bas ? Quelle est son expression ?
2. Déterminer les expressions des composantes $\vec{N}$ et $\vec{T}$ lorsque $\alpha < \alpha_m$.
3. En déduire la valeur minimale α_m de α qui permet à l'objet d'être mis en mouvement.
4. Pour $\alpha > \alpha_m$, déterminer la nature du mouvement.

Rép : 1. Le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ 2. $T = -mgsin\alpha \; et \; N = mgcos\alpha$ 3. $\alpha < \alpha_m = Arctan(f)$

4. $m\ddot{x} = mgsin\alpha\left(1 - \frac{tan\alpha_m}{tan\alpha}\right) > 0$ Ce qui prouve que le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré.

MC12 - Résonance cyclotronique

Une particule P de charge q et de masse m est lancée depuis le point $(a, 0, 0)$ avec une vitesse initiale non-relativiste $(0, -\omega_0 a, \gamma a \omega_0)$ dans un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ (avec $\omega_0 = \frac{qB}{m}$).

1. Déterminer les équations de la trajectoire $x(t)$ & $y(t)$.
2. En plus de $\vec{B}$, on applique un champ électrique $\vec{E}$ de direction orthogonale à $\vec{B}$, uniforme dans la région où de déplace la particule et variant simultanément dans le temps : $\vec{E} = E_0 cos(\omega t)\overrightarrow{u_x}$.

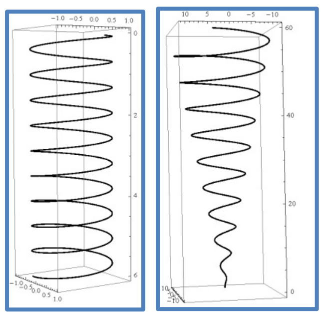
Démontrer que l'équation différentielle régissant le mouvement est :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon a \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

où l'on déterminera ε en fonction de q, E_0, m, a & ω_0^2.

3. Résoudre cette équation différentielle dans le cas où $\omega \neq \omega_0$ en prenant la solution particulière sous la forme $x_2 = \lambda\, cos(\omega t)$. En déduire que :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = (1-\mu)\cos(\omega_0 t) + \mu\cos(\omega t) \\ \dfrac{y}{a} = -(1-\mu)\sin(\omega_0 t) - \dfrac{\mu\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) \text{ où } \mu = \dfrac{\varepsilon\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

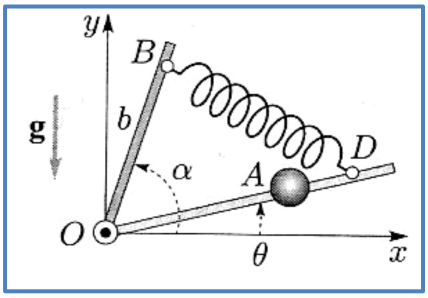


4. Résoudre l'équation différentielle sur $x(t)$ dans le cas particulier où $\omega = \omega_0$ en prenant la solution particulière $x_2 = \lambda\, t sin(\omega t)$.
5. On a représenté graphiquement les deux situations précédentes. Associer à chaque situation le graphique correspondant. Expliquer comment le dispositif précédent, appliqué à des particules soumises initialement au seul champ magnétique et formant donc un faisceau de direction Oz, peut servir à réaliser une séparation isotopique.

Rép : 1. $x(t) = acos(\omega_0 t)$, $y(t) = -asin(\omega_0 t)$ et $z(t) = a\,\gamma\,\omega_0 t$ 2. $\varepsilon = \frac{qE_0}{ma\omega_0^2}$ 3. λ=μa... 4. $x(t) = acos(\omega_0 t) + \frac{\varepsilon}{2}\omega_0 atsin(\omega_0 t)$

5°) Il suffit de sélectionner $\omega = \omega_0$ pour une des particules et utiliser un diaphragme pour réaliser la séparation.

MC13 - Sismographe de la Coste

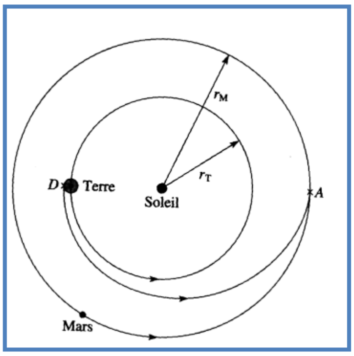


Une tige de masse négligeable et de longueur l, portant un point matériel A, de masse m, oscille sans frottement autour de l'axe Oz horizontal d'un référentiel terrestre $R = \{Oxyz\}$; Oy est la verticale ascendante. Un ressort, d'extrémités B et D, exerce sur la tige une force de rappel $K.\overrightarrow{DB}$. Sur la figure sont précisées les notations : $OA = l, OB = b, OD = d,\ (Ox, OB) = \alpha = cste\ et\ (Ox, OA) = \theta$.

1. Etablir l'équation différentielle en θ.
2. A quelle condition sur $m, g, l, d, b, K\ et\ \alpha$, l'angle définissant la position d'équilibre θ_e est-il nul ?
3. Trouver l'expression de la période des petites oscillations. On donne $l = 5cm$. Quelle doit être la valeur de α pour que la période T_0 soit de 20s.

Rép : 1. Soit : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OD} \wedge k\overrightarrow{DB} \Rightarrow \ldots \ddot{\theta} + \frac{g}{l}cos\theta = \frac{kdb}{ml^2}\left(sin(\alpha - \theta)\right)$ 2. Au repos : $\ddot{\theta} = 0\ et\ \theta = 0\ d'où \ldots sin(\alpha) = \frac{mgl}{kdb}$ 3. $\alpha = 89{,}97°$

MC14 - Voyage interplanétaire de la terre a mars



Pour envoyer un vaisseau spatial vers une autre planète, Mars dans cet exercice, on le place au préalable sur une orbite (dite de parking) autour de la Terre. Un moteur auxiliaire lui fournit alors l'énergie nécessaire pour le placer sur l'orbite interplanétaire ; le moment adéquat du transfert dépendant des positions relatives de la Terre et de la planète de destination. On suppose que la Terre et Mars décrivent des orbites circulaires autour du soleil, de rayons respectifs $R_T = 1\ ua\ et\ R_M = 1{,}52\ ua$ (on rappelle que $1\ ua = 150.10^6 km$), situées dans le même plan (plan de l'écliptique), leurs vitesses respectives étant $v_T = 29{,}8\ km \cdot s^{-1}\ et\ v_M = 24{,}2\ km \cdot s^{-1}$. L'orbite de transfert (dite « orbite de Hohman » du nom de l'astronome qui l'a étudié le premier) est une ellipse tangente à l'orbite de la Terre au départ et à l'orbite de Mars à l'arrivée. Le départ du vaisseau a lieu quand il se trouve sur la face sombre de la Terre (point D), la vitesse du vaisseau sur son orbite de parking et celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil étant de même sens. La position de Mars coïncide avec celle du vaisseau à l'arrivée de celui-ci (point A).

On suppose que le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle du Soleil (on néglige celle de la Terre), que le rayon de l'orbite de parking est négligeable devant la distance Terre-Soleil et que la vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique au départ est la même que celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil.

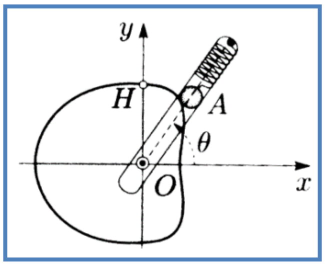
1. Calculer la vitesse v_D du vaisseau en D sur l'ellipse de Hohman. En déduire la variation de vitesse du vaisseau et l'énergie massique que doivent fournir les moteurs.
2. Calculer la vitesse v_A du vaisseau en A sur l'ellipse de Hohman. En déduire la variation de vitesse du vaisseau et l'énergie massique que doivent fournir les moteurs. Commenter.
3. Calculer la durée du transfert.
4. Quelle était la position de Mars sur son orbite au départ du vaisseau pour que la rencontre soit possible ? On donnera la valeur de l'angle (SM_1, SA), où $A\ et\ M_1$ désignent les positions de Mars à l'instant initial et final.

Rép : 1. $v_D = v_T\sqrt{\frac{2R_M}{R_T+R_M}} = 32{,}7 km.s^{-1}$, Δv=2,9 $km.s^{-1}$ et $\Delta\varepsilon = \frac{1}{2}m{v_T}^2(R_M - R_T)/(R_M + R_T) = 91{,}6.10^6 m\ (en\ Joules)$

2. $v_A = v_D R_T/R_M = 21{,}5 km.s^{-1}$, Δ'v=2,7 $km.s^{-1}$ et $\Delta'\varepsilon = 60{,}3.10^6 m\ (en\ J)$ 3. $\tau = \frac{T_0}{2}\left[\frac{R_T+R_M}{2R_T}\right]^{3/2} = 258 jours$ 4. $\alpha = \frac{2\pi\tau}{T_M} = 135{,}8°$

B – Exercices supplémentaires

MC15 - Mouvement le long d'une came



Un point matériel A est astreint à se déplacer, dans la plan Oxy d'un référentiel R=Oxyz, le long du pourtour d'une came fixe dans R. L'équation polaire de la came est $r = b - c \times cos\theta$. La tige qui permet le mouvement réalise à l'aide d'un ressort le contact sur la came, tourne uniformément autour de l'axe Oz, avec une vitesse angulaire ω.

1. Exprimer, en coordonnées polaires (r, θ), la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ de A par rapport à R.
2. Calculer v et a pour $\omega = 30\ tr \cdot min^{-1}$, lorsque A atteint le point H de la came $(\theta = \frac{\pi}{2})$, sachant que $b = 2cm\ et\ c = 1cm$.

Rép : 1. $\vec{v} = c\omega sin\theta\overrightarrow{u_r} + (b - c.cos\theta)\omega\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{a} = \omega^2[(2c.cos\theta - b)\overrightarrow{u_r} + (2csin\theta)\overrightarrow{u_\theta}]$ 2. $v = \omega\sqrt{c^2 + b^2} = 0{,}070 m/s$ et $a = \omega^2\sqrt{b^2 + 4c^2} = 0{,}28 m/s^2$

MC16 - Mouvement d'un point matériel sur une parabole

Un point matériel M décrit la courbe d'équation polaire $r \cdot cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a$ où a est une constante positive, θ variant de $-\pi$ à $+\pi$.

1. Montrer que la trajectoire de M est une parabole.
2. On suppose que le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r : $v = kr$, où k est une constante positive.
    a. Calculer, en fonction de θ, les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse de M.
    b. Déterminer la loi du mouvement θ(t) en supposant que θ est nul à l'instant t=0 et que θ croît.

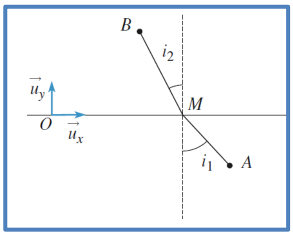
On donne :

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos(\theta)} = ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Rép : 1. $y^2 = 4a(a-x)$ 2. a) $v_r = a\frac{d\theta}{dt}\frac{sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $v_\theta = a\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ b) $Ln\left|tan\left(\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{kt}{2}$

MC17 – Sauvetage en mer

Pour aller au secours d'un nageur en détresse, un maître-nageur part du poste de secours situé au point A pour aller jusqu'au nageur situé en B. Sachant que le sauveteur court à $v_1 = 2\,m \cdot s^{-1}$ sur la plage et nage à $v_2 = 1\,m \cdot s^{-1}$ dans l'eau, en quel point M doit-il entrer dans l'eau pour atteindre au plus vite le nageur ? On situera ce point à l'aide d'une relation entre $v_1, v_2, i_1\ et\ i_2$ indiqués sur le schéma.



Rép : Les lois de Descartes viennent à vous.

MC18 – Course automobile

Deux pilotes amateurs prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A, démarre avec une accélération constante de $a_A = 4\,m \cdot s^{-2}$, le deuxième, B, a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante de $a_B = 5\,m \cdot s^{-2}$. A a cependant plus de réflexes que B et démarre une seconde avant.

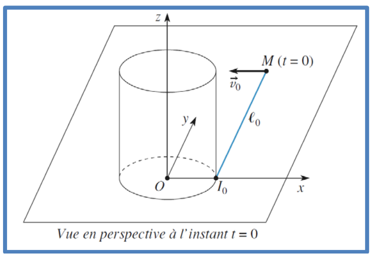
1. Quelle durée faudra-t-il à B pour rattraper A ?
2. Quelle distance auront-ils parcourue quand B doublera A ?
3. Quelle seront les vitesses à cet instant-là ?
4. Représenter $x(t)\ et\ v(t)$, en précisant la position de l'événement « B dépasse A » sur ces représentations des mouvements.

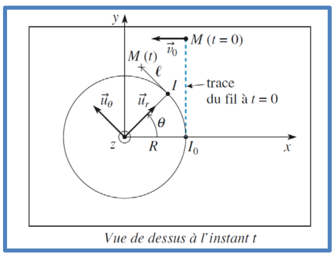
Rép : 1. $t_1 = t_0 \cdot \frac{1}{1-\sqrt{\frac{a_A}{a_B}}} = 9{,}5s$ 2. $d = 180m$ 3. $v_A(t_1) = 38\,m \cdot s^{-1}$ $v_B(t_1) = 42\,m \cdot s^{-1}$ 4....

MC19 - Enroulement d'un fil sur un cylindre

Un cylindre de révolution, d'axe vertical, de rayon R, repose sur un plan horizontal et fixe par rapport à un référentiel (Ox, Oy, Oz).

On attache une extrémité d'un fil parfaitement souple, infiniment mince et de masse négligeable à la base du cylindre, et on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base. L'autre extrémité du fil est fixée à une particule M de masse m, astreinte à glisser sur le plan horizontal (Oxy). La partie I_0M non enroulée du fil est tendue.





Données numériques : $R = 0{,}2m\,;\ m = 0{,}04\,kg\,;\ l_0 = I_0M = 0{,}5m\,;\ v_0 = 0{,}1\,m \cdot s^{-1}$.

1. A l'instant t=0, on communique à la particule M une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ horizontale à I_0M et orienté comme l'indiquent les deux figures ci-après. On admet que le fil reste tendu au cours du mouvement. A l'instant t, on appelle θ l'angle dont s'est enroulé le fil et l la longueur IM du fil non encore enroulé. Le fil étant inextensible, donner la relation entre $l, l_0, R\ et\ \theta$.
2. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{OM}$ suivant les vecteurs unitaires de la base polaire en fonction de $l_0, R\ et\ \theta$.
3. En déduire les composantes de la vitesse de la particule M dans la base polaire.
4. Montrer que la norme v de la vitesse reste constante au cours du mouvement.
5. Déduire des questions 3. et 4. la relation entre $\theta, \dot{\theta}, l_0, R\ et\ v_0$.
6. Exprimer θ en fonction de $t, l_0, R\ et\ v_0$.
7. Déterminer l'instant final t_f pour lequel le fil est entièrement enroulé autour d'un cylindre. Effectuer l'application numérique.
8.
   a) Déterminer la tension T du fil en fonction de $t, m, l_0, R\ et\ v_0$.
   b) En réalité, il y a rupture du fil dès que sa tension dépasse la valeur $T_{rup} = 5.10^{-3}N$. Déterminer l'instant t_{rup} et l'angle θ_{rup} lorsqu'intervient la rupture du fil. Effectuer l'application numérique.

MC110 - Pendule en rotation

Un enfant fait tourner un pendule constitué d'une ficelle de longueur l et de faible masse fixée en O_1 à laquelle est attaché un caillou de masse m de manière à ce que le caillou effectue un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω dans le plan xOy. Le fil garde un angle α constant par rapport à la verticale au cours du mouvement.

1. Quel système de coordonnées est adapté à l'étude du problème.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique et le projeter.
3. En déduire une relation entre $\omega,\ l, \alpha$ et la norme du champ de pesanteur g. Montrer que la vitesse angulaire ω est forcément supérieure à une certaine valeur ω_0.
4. Interpréter le cas où ω devient très importante.
5. Calculer la valeur de α en degrés pour une longueur de ficelle $l = 20\ cm$, et un caillou faisant 3 tours par seconde dans le champ de pesanteur $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

Rép : 1. Coordonnées cylindriques 2. $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mlsin\alpha\omega^2 = -Tsin\alpha$ et $0 = -mg + Tcos\alpha$ 3. $\omega^2 = g\frac{1}{l\,cos\alpha} \geq \omega_0^2 = \frac{g}{l}$ 4. La ficelle devient effectivement quasi horizontale. 5. $\alpha = 82°$

MC111 - Expérience de Millikan

Entre deux plateaux horizontaux d'un condensateur plan à air, distants de l=16mm, on introduit de petites gouttes de glycérine de rayon uniforme R. On prendra $g = 10\ m \cdot s^{-2}$.

Partie 1 : La tension U aux bornes du condensateur est nulle :

1. Montrer que chaque goutte, abandonnée sans vitesse, atteint une vitesse limite :

$$v_{lim} = \frac{2g}{9\eta} R^2 (\rho - \rho')$$

Pour cela on écrira la force de frottement de l'air sous la forme $\vec{f} = -6\pi\eta\, R\, \vec{v}$, et on n'oubliera pas la poussée d'Archimède.

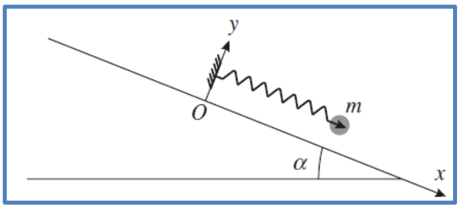
2. A l'aide d'une lunette d'observation, on constate qu'une goutte parcourt $h = 7{,}84\ mm\ en\ \Delta t = 20{,}4s$. Donner la valeur de R.

Partie 2 : La tension U aux bornes du condensateur est non nulle :

3. En présence d'une ddp U entre les armatures, la goutte subie la force verticale $\frac{qU}{l}$, Exprimer la nouvelle vitesse limite v_{lim2} d'une goutte qui porte la charge q.
4. Pour immobiliser la goutte, il faut appliquer une tension $U_1 = 7{,}0kV$. Calculer la charge q de la charge.
5. Quelle était le but de Millikan pour cette expérience d'après vous ?

Données numériques :

- Coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1{,}83.10^{-5}\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
- Masse volumique de la glycérine $\rho = 1260\ kg \cdot m^{-3}$
- Masse volumique de l'air $\rho' = 1{,}3\ kg \cdot m^{-3}$



MC112 - Oscillateur harmonique quelconque

Un objet ponctuel de masse m, fixé à un ressort de constante de raideur k et longueur à vide l_0, attaché en O, se déplace le long d' un plan incliné d' angle α. On suppose la masse du ressort nulle, ainsi que sa longueur quand il est comprimé. La position de la masse est x_e à l'équilibre. On néglige les frottements. À l'instant initial, on lance la masse, située en x_e, avec une vitesse v_0 vers O.

1. Déterminer le mouvement x(t).
2. À quelle condition sur v_0 la masse frappe-t-elle le point O ? À quel instant le choc a-t-il lieu et quelle est alors la vitesse de la masse ?

Rép : 1. $x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_e$ 2. $\dot{x}(t_1) = -v_0\left(1 - \frac{\omega_0^2 x_e^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

MC113 - Résistance de l'air - Cas quadratique

Une petite sphère de Plomb, de masse m, est envoyée vers le haut, à partir du point O (z=0) avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, à un instant qu'on prendra comme origine des temps. Le module de la résistance de l'air, opposée au mouvement de la masse, est proportionnelle au carré de la vitesse v d'où sa norme : $R = kmv^2$ où k>0.

On posera $\lambda = \sqrt{\frac{g}{k}}$.

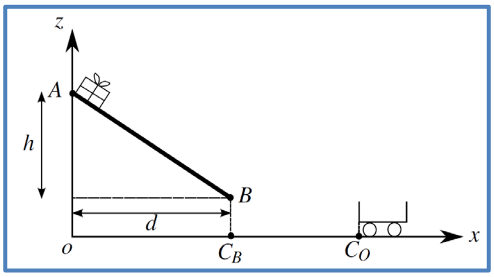
1. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la particule à l'instant t sachant que :
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cste$$
2. Déterminer l'espace parcouru $z(t)$ en fonction du temps t au cours du mouvement ascendant.
3. En déduire l'altitude maximale z_m atteinte par P, comptée à partir de O. La comparer à celle obtenue en ne tenant pas compte de la résistance de l'air.

A.N : $k = 2.10^{-3}\ SI,\ g = 10\ m\cdot s^{-2},\ v_0 = 122\ m\cdot s^{-1}$.

Rép : 1. $v = \lambda tan(-kt\lambda + \phi)\ avec\ v_0 = \lambda tan(\phi)$ 2. $z = \frac{1}{k} Ln\left|\frac{cos(-kt\lambda+\phi)}{cos(\phi)}\right|$ 3. $z_M = Ln\left|\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}\right| = 346m$

MC114 – Toboggan

Une personne participant à un jeu télévisé doit laisser glisser un paquet sur un toboggan, à partir du point A de manière à ce qu'il soit réceptionné, au point B par un chariot se déplaçant le long de l'axe (Ox). On néglige les frottements de l'air. Le toboggan exerce sur le paquet non seulement une réaction normale $\overrightarrow{R_N}$ mais aussi une réaction tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ telle que : $R_t = f \cdot R_N$ où $f = 0,5$.

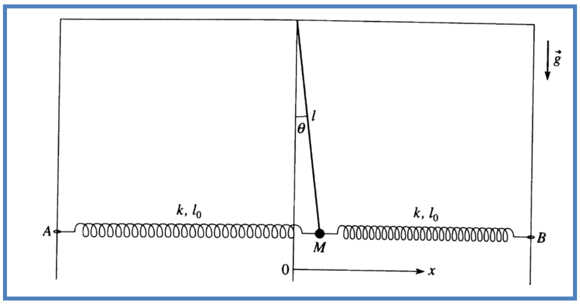


Le chariot part du point C_O à l'instant t = 0, vers la gauche avec une vitesse $v_c = 0,5\ m\cdot s^{-1}$. Arrivé en C_B, il s'arrête pendant un intervalle de temps $\delta t = 1\ s$. La hauteur du toboggan est $h = 4\ m$, la distance d est égale à h et $C_0 C_B = 2\ m$. La masse du paquet est $m = 10\ kg$ et $g = 9,8\ m\cdot s^{-2}$.

1. On pose $X = AP$ où P est la position du paquet à l'instant t. Déterminer X(t). En déduire le temps mis par le paquet pour arriver en B.
2. A quel instant le joueur doit-il lâcher le paquet, sans vitesse initiale, pour qu'il tombe dans le chariot ?

Rép : 1. $t_B = \sqrt{\frac{2h}{gsin\alpha(sin\alpha - fcos\alpha)}} = 1,8s$ 2. Entre $2,2s\ et\ 3,2s$.

MC115 – Atterrissage d'urgence



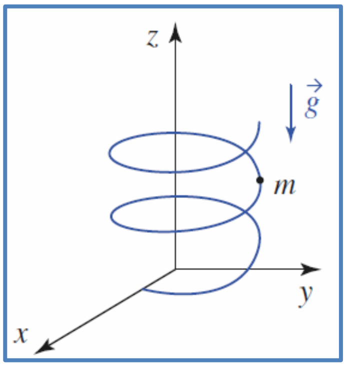
Un avion de chasse de masse $m = 9\,t$ en panne de freins atterrit à une vitesse $v_a = 241\,km \cdot h^{-1}$. Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre $D = 3\,m$ déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol.

On néglige les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute qui s'écrit $T = \frac{1}{2} \times C_x \rho S v^2$ avec v la vitesse de l'avion, S la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse, C_x le coefficient de traînée supposé constant et égal à 1,5, $\rho = 1{,}2\,kg \cdot m^{-3}$ la masse volumique de l'air.

1. On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.
   a. Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse v de l'avion.
   b. En déduire l'expression de v en fonction de la date t. On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.
   c. Montrer que la force de trainée n'est pas suffisante pour stopper complètement l'avion.
2. Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de $d = 1400\,m$. Déterminer la vitesse atteinte par l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance. Faites l'application numérique.

Rép : 1. a) $m\ddot{x} = -k\dot{x}^2$ $avec$ $k = \frac{C_x \rho S}{2m}$ b) $v = \frac{v_a}{1+v_a kt}$ c) Non suffisante 2. $v = v_a e^{-kd} = 24{,}9\,m \cdot s^{-1}$

MC116 - Mouvement d'une perle sur une hélice



On enfile des perles sur un fil métallique matérialisant une hélice circulaire d'axe (Oz) vertical ascendant et d'équations $x = Rcos\theta$, $y = Rsin\theta$ et $z = p\theta$ où $p > 0$. La perle étant abandonnée sans vitesse initiale en un point de côte $z = h = p\theta_0$, étudier son mouvement ultérieur an l'absence de frottements.

1. Calculer son énergie cinétique.
2. Calculer son énergie potentielle.
3. En déduire θ(t).

Rép : 1. $E_k = \frac{1}{2} m(R^2 + p^2)\dot{\theta}^2$ 2. $E_p = mgp\theta + C$ 3. $-\frac{1}{2}\frac{gp}{(R^2+p^2)}t^2 + \theta_0$

MC117 - Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

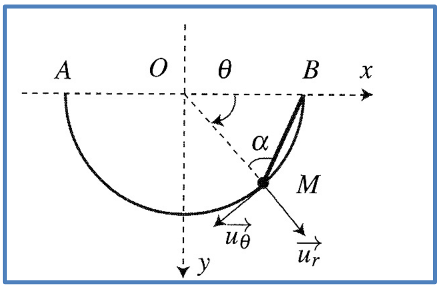
Un pendule simple (point matériel M de masse m au bout d'un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur l) est lié à deux ressorts accrochés en A et B. Les deux ressorts sont identiques : longueur à vide l_0 et raideur k. Quand le pendule est vertical, les deux ressorts sont au repos. Les élongations angulaires du pendule sont faibles de façon à pouvoir considérer en permanence les deux ressorts horizontaux.

On posera $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ et $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle du système en utilisant le fait que si θ est petit : $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.
2. Etudier le mouvement de la masse m au voisinage $\theta = 0$.

Rép : 1. $E_p = \theta^2\left(\left(\frac{mgl}{2}\right) + kl^2\right)$ 2. $\ddot{\theta} + \theta * (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0$

MC118 - Mouvement d'une bille reliée à un ressort sur un cercle



On considère le mouvement d'une bille M de masse m pouvant coulisser sans frottement sur un cerceau de centre O et de rayon R disposé dans un plan vertical. On note AB le diamètre horizontal du cerceau, Ox l'axe horizontal, Oy l'axe vertical descendant et θ l'angle entre Ox et OM. La bille est attachée à un ressort de longueur à vide nulle et de raideur k dont la seconde extrémité est fixée en B. Elle ne peut se déplacer que sur le demi-cercle inférieur.

1. Déterminer l'angle α entre MO et MB en fonction de θ.
2. Etablir l'expression de la longueur de ressort en fonction de R et θ.
3. En déduire l'énergie potentielle totale du système. Représenter la courbe d'énergie potentielle et en déduire les

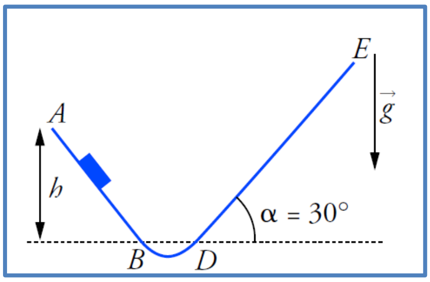
positions d'équilibres éventuelles et leur stabilité.

On pourra poser : $p = \frac{2kR}{mg}$ $et\ E_0 = mgR$

4. Si l'on écarte faiblement la bille de sa position d'équilibre stable, et qu'on la lâche sans vitesse initiale, à quel type de mouvement peut-on s'attendre ?
5. Etablir l'équation différentielle du mouvement.
6. On note ε l'écart θ-θ_e. Initialement, on écarte la bille d'un angle $\varepsilon_0 \ll \frac{\pi}{2}$ à partir de sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Linéariser l'équation du mouvement et conclure.

Rép : 1. $\alpha = \frac{\pi-\theta}{2}$ 2. $MB = 2R\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$ 3. $\frac{E_p}{E_0} = -sin\theta + p\ sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ où $p = \frac{2kR}{mg}$ $et\ tan(\theta_e) = \frac{2}{p}$ 4. Si l'on écarte la bille de sa position d'équilibre stable avec $v_{ini} = 0$, la bille va osciller dans le puits de potentiel… 5. $\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(cos\theta - \frac{p}{2}sin\theta\right) = 0$ 6. $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{g\left(sin\theta_e + \frac{p}{2}cos\theta_e\right)}{R}$

MC119 – Montagnes russes

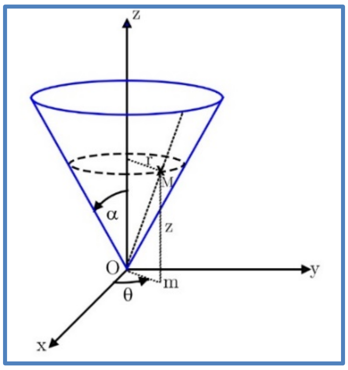


Un chariot de masse $m = 40\ kg$ est solidaire d' une piste P. Les parties (AB) et (DE) sont rectilignes, la partie (BD) est une portion de cercle. Le chariot glisse sans frottement sur les parties $(AB)\ et\ (BD)$. On prendra $g = 10\ m\cdot s^{-2}$.

1. Le chariot est lâché en A, sans vitesse initiale, à une hauteur $h = 10\ m$ par rapport à B (ou D). On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottement sur (DE). Déterminer la hauteur h_1 atteinte par le chariot sur (DE) :
   a. Par application du théorème de l'énergie cinétique ;
   b. Par application du théorème de l'énergie mécanique.
2. Sur (DE) le chariot est soumis à une force de frottement de valeur constante f. La hauteur atteinte par le chariot n'est que de 8,0 m. Déterminer f :
   a. Par application du théorème de l'énergie cinétique ;
   b. Par application du théorème de l'énergie mécanique.

Rép : 1. $h_1 = h$ 2. $f = \frac{mg(h-h')\sin\alpha}{h'} = 40N$

MC120 - Point mobile à l'intérieur d'un cône



Soit C un cône de sommet O, d'axe de révolution Oz confondu avec la verticale ascendante et de demi-angle au sommet α. Dans un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z), C est décrit par l'équation $r = ztan\alpha$.

Un point matériel M de masse repose sans frottement sur la surface interne de C, il est donc soumis à son poids $\vec{P} = -mg\ \vec{e_z}$ & à une action de contact normale à C telle que : $\vec{N} = -Ncos\alpha\vec{u_r} + Nsin\alpha\,\vec{u_z}$ où N>0.

M est initialement lancé du point de coordonnées cylindriques $M_0\left(a, 0, \frac{a}{\tan(\alpha)}\right)$ avec une vitesse horizontale et tangente à C : $\vec{v_0}$ (0,aω,0).

On pose ${\omega_o}^2 = \frac{g}{a}$ & $\omega = \lambda\omega_o$.

1. Exprimer la loi de la dynamique en coordonnées cylindriques. En déduire que pour une valeur particulière λ_o de λ telle que ${\lambda_o}^2 = \frac{1}{tan\alpha}$ le mouvement de C peut être circulaire uniforme.

Dans toute la suite λ a une valeur quelconque.

2. Etablir la loi des aires : $r^2\,\dot{\theta} = cste$ à l'aide de la projection du PFD sur $\vec{u_\theta}$.
3. Etablir à l'aide du théorème de l'énergie mécanique l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(1+\lambda_0^4\right) = a^2\cdot\omega_0^2\left(e - w(r)\right)$$

où l'on exprimera e & $w(r)$ en fonction de $\lambda, \lambda_o\ \&\ a$.

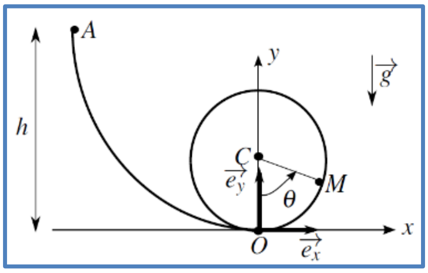
4. Par une méthode graphique, déduire de cette équation que r reste toujours compris entre deux positions limites $r_1\ \&\ r_2$.
5. Montrer que deux allures différentes d'évolution de r se présentent selon que λ est inférieur ou supérieur à λ_o.

Rép : 1. Pour un mouvement circulaire on a z=cste et r=cste d'où $\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{tan\alpha}}$ 2. $r^2\frac{d\theta}{dt} = cste = a^2\omega = a^2\lambda\omega_0$

3. $w(r) = {\lambda_0}^2\frac{r}{a} + \lambda^2\frac{a^2}{2r^2}$ $et\ e = w(a)$. 4. $w(r)$ passe par un minimum en $r_m = a\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{2/3}$, on a $e = w(r)$ pour deux valeurs de r dont une est a.

5. Si $\lambda < \lambda_0$ alors $r_m > a \Rightarrow$ le mobile commence à descendre il s'agit d'un lancement lent…

MC121 – Bille dans une gouttière

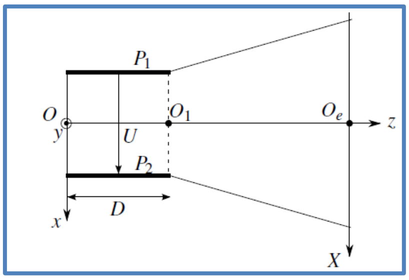


Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du cercle. On note : $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_y}$ l'accélération de la pesanteur.

1. Calculer la norme v_0 de la vitesse en O puis en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ
2. Déterminer la réaction de la gouttière en un point du guide circulaire.
3. Déterminer la hauteur minimale de A pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.

Rép : 1. $v_m = \sqrt{2(h+a(cos\theta - 1)}$ 2. $R = mg\left(3cos\theta + \frac{2h}{a} - 2\right)$ 3. $h > \frac{5}{2}a$.

MC122 - Déflexion électrique

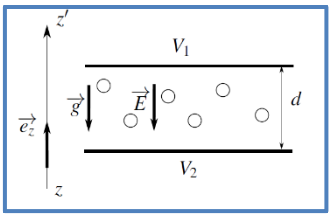


Dans tout l'exercice on se place dans un référentiel galiléen, associé à un repère cartésien. Une zone de champ électrique uniforme est établie entre les plaques $P_1\ et\ P_2$ (le champ est supposé nul en dehors et on néglige les effets de bord) ; la distance entre les plaques est d, la longueur des plaques D et la différence de potentiel est $U = V_{P1} - V_{P2}$ positive. Des électrons (charge q = –e, masse m) accélérés pénètrent en O dans la zone de champ électrique uniforme avec une vitesse $v_0\,\overrightarrow{u_z}$ selon l'axe Oz.

1. Calculer la force subie par les électrons en fonction de $U, q, d\ et\ \overrightarrow{u_x}$. (Rappel : $E = \frac{U}{d}$)
2.
   a. Déterminer l'expression de la trajectoire $x = f\,(z)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de $d, U\ et\ v_0$.
   b. Déterminer le point de sortie K de la zone de champ ainsi que les composantes de la vitesse en ce point.
   c. Montrer que dans la zone en dehors des plaques, le mouvement est rectiligne uniforme.
   d. On note L la distance O_1O_e. Déterminer l'abscisse X_P du point d'impact P de l'électron sur l'écran en fonction de $U, v_0, D, d\ et\ L$.

Rép : 1. $\vec{F} = -\frac{qU}{d}\overrightarrow{u_x}$. 2. a) $x = \frac{eU}{2mdv_0^2}z^2$ b) z_K=D…. c) Aucune force agit sur l'électron d) $x_p = \left(\frac{D}{2} + L\right)\frac{eD}{mdv_0^2}U$

MC123 - Mouvement de gouttelettes chargées



On disperse un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'huile, de masse volumique $\rho_h = 1{,}3.10^3\ kg \cdot m^{-3}$, dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan, distantes de $d = 2.10^{-2}m$. Les gouttelettes sont chargées négativement et sans vitesse initiale. Toutes les gouttelettes ont même rayon R mais pas forcément la même charge –q. En l'absence de champ électrique, une gouttelette est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède de l'air ambiant de masse volumique $\rho_a = 1{,}3 kg \cdot m^{-3}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$, avec $k = \alpha R$ et $\alpha = 3{,}4\ 10^{-4}\ S.I.$

L'accélération de la pesanteur sera prise égale à $9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

1. Mouvement en l'absence de champ électrique.
   a. Déterminer la vitesse limite $\overrightarrow{v_0}$
   b. Déterminer l'expression de la vitesse des gouttes. On fera apparaître un temps caractéristique τ.
   c. On mesure $v_0 = 2.10^{-4}\ m \cdot s^{-1}$, déterminer la valeur de k.
2. On applique une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ de manière à avoir un champ électrique dirigé vers le bas. Le lien entre $U, E\ et\ d$ est : $U = Ed$. Une gouttelette est immobilisée pour U = 3200 V. Calculer la charge q.

Rép : 1. a) $\overrightarrow{v_0} = \frac{4}{3}\pi R^2 \cdot \frac{\rho_h}{\alpha}\vec{g}$ b) $\vec{v}(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\overrightarrow{v_0}$ c) $R = 1{,}1 \cdot 10^{-6}m$ 2. $q = -4{,}8 \cdot 10^{-19}C$

MC124 - Effet Zeeman

Un atome d'hydrogène comporte un proton de charge + e supposé immobile en 0 et un électron de masse m et charge - e. La force exercée par le proton sur l'électron situé au point M est modélisée par une force de rappel élastique $\vec{f} = -k\,\overrightarrow{OM}$ (modèle de l'électron élastiquement lié), où k est une constante. Le poids est négligé.

1. On suppose que la trajectoire de l'électron est contenue dans le plan z = 0. Trouver des équations différentielles satisfaites par les coordonnées $x\,(t)$ *et* $y(t)$.
2. Quelle est la pulsation ω_0 du mouvement et sa nature géométrique ?
3. On soumet l'atome au champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\overrightarrow{u_z}$. Écrire les nouvelles équations du mouvement.
4. Les résoudre en posant $u(t) = x(t) + i\,y(t)$. Montrer que le mouvement est désormais caractérisé par deux pulsations ω_1 *et* ω_2.
5. Quelle est la conséquence de l'effet Zeeman sur un spectre de raies d'émission d'un atome soumis à un champ magnétique.

Rép : 1. 2. 3. … 4. $\omega_{12} = \frac{eB_0 \pm \sqrt{e^2 {B_0}^2 + 4mk}}{2m}$ 5. Dédoublement de raies

MC125 – Chute d'un arbre

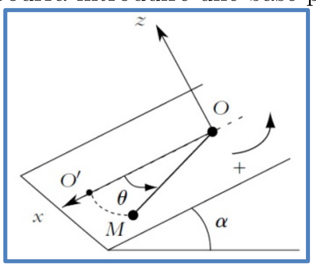
On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre pas l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3}mL^2$.

1. Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$
3. Montrer que cette relation peut être réécrite :
$$\sqrt{\frac{3g}{L}}dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$$
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra $g = 10\,m\cdot s^{-2}$. On donne pour $\theta_0 = 5°$:
$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$$

Rép : 1. $\frac{1}{3}L^2\ddot{\theta} = \frac{gL}{2}\sin\theta$ 2. … 3. … 4. $\Delta t = 5{,}1s$

MC126 - Pendule sur plan incliné

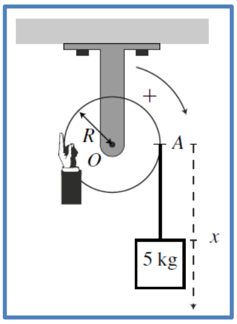
Un pendule simple est constitué d'un point M de masse m attaché à un fil de masse négligeable, de longueur L. L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe. L'ensemble peut se déplacer sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. On pourra introduire une base polaire.



1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O
2.
   a. Déterminer la projection des différentes forces sur la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
   b. En appliquant le théorème du moment cinétique en O, déterminer l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations.
   c. On lance depuis $\theta = 0°$ le pendule avec une vitesse v_0. Déterminer l'angle maximal atteint, en supposant qu'on reste dans le domaine des petites oscillations.

Rép : 1°) $\overrightarrow{L_0} = mL^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$ 2°) a)… b) $\omega_0^2 = \frac{g\sin(\alpha)}{L}$ c) $\theta_{max} = \frac{v_0}{L\omega_0}$

MC127 – Etude d'une poulie



Une masse $m = 5{,}0\ kg$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1{,}0\ kg$ et de rayon $R = 10\ cm$ en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe. On prendra $g = 10\ m \cdot s^{-2}$. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2} m_p R^2$.

1. On suppose que la poulie est en rotation uniforme autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Quelle est la vitesse de la masse m?
2. Cette même poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
3. Avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire du cylindre, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

Rép : 1. $\dot{x} = R\dot{\theta}$ 2. $F = mg = 50N$ 3. $\ddot{x} = \frac{g}{1+0.5\frac{m_p}{m}}$

MC128 - Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite - Freinage par l'atmosphère

On étudie le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les autres interactions que la force de gravitation entre la Terre et le satellite. On note M_T la masse de la Terre, R_T son rayon, m la masse du satellite supposée petite devant M_T et G la constante de gravitation universelle. On note T_0 la période de révolution du satellite.

1. Établir la conservation du moment cinétique du satellite par rapport à la Terre.
2. En déduire que le mouvement du satellite est plan.
3. Montrer que cela permet de définir une constante des aires C dont on donnera l'expression.
4. On suppose que le satellite est en orbite circulaire autour de la Terre. Montrer que son mouvement est uniforme.
5. Établir l'expression de la vitesse v du satellite en fonction de $G, M_T\ et\ r$ le rayon de l'orbite du satellite.
6. Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_c du satellite en fonction de $G, M_T\ , m\ et\ r$.
7. Même question pour l'énergie potentielle E_p du satellite. Donner la relation entre $E_c\ et\ E_p$.
8. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m et les relations de E_m avec $E_p\ et\ E_c$.
9. Ce satellite subit une force de frottement fluide proportionnelle à sa masse et au carré de sa vitesse. On note α le coefficient de frottement correspondant. Cette force reste suffisamment faible pour que la trajectoire soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les relations entre les différentes énergies restent valables et la variation Δr du rayon de la trajectoire est faible devant le rayon r. Déterminer ΔE_p la variation d'énergie potentielle sur une révolution du satellite consécutive à une variation Δr du rayon de son orbite.
10. En déduire que l'énergie mécanique du satellite diminue sur une révolution d'une quantité ΔE_m qu'on explicitera.
11. Calculer sur une révolution le travail W_f de la force de frottement en fonction de $\alpha, m, v\ et\ T_0$.
12. En déduire que $\Delta r = -4\pi\alpha r^2$.
13. Quel est par conséquent l'effet de la force de frottement sur le rayon de la trajectoire et la vitesse du satellite ?
14. Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire.
15. En supposant que la variation du rayon sur une révolution peut s'identifier à la dérivée du rayon par rapport au temps, montrer que $\sqrt{r} = \sqrt{r_0} + Kt$ où K est une constante à exprimer en fonction de $G, M_T\ et\ \alpha$.

Rép : 9. $\Delta E_p = \frac{G m_T m}{2r^2}\Delta r$ 11. $W_f = -\alpha m v^3 T_0$

MC129 – Périgée

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1\ t$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\ km$ au périgée et $d_A = 35{,}9 \cdot 10^3\ km$ à l'apogée. On rappelle que le périgée P est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée A est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3{,}5 \cdot 10^2\ m \cdot s - 1$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée et le périgée.
2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.
3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.
4. On note $v_A\ et\ v_P$ les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.
5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

Rép : 1.... 2. $a = \frac{d_P + d_a}{2} = 18100\ km$ 3. $T = T_{geo}\left(\frac{a}{a_{geo}}\right)^{3/2} = 6{,}7h$ 4.... 5. $v_P = \frac{v_A d_A}{d_P} = 6{,}3 \cdot 10^4\ m \cdot s^{-1}$.

MC130 – Diffusion de Rutherford

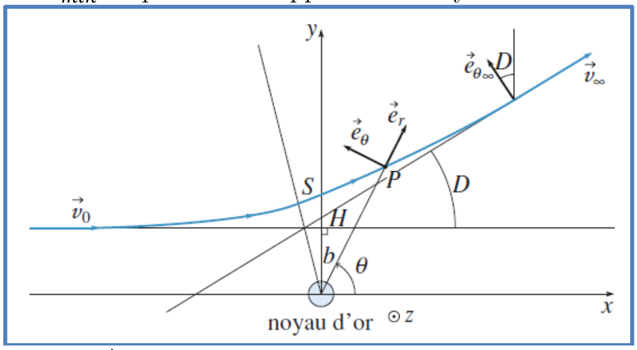
Une particule α de masse m et de charge $q = 2e$, venant de l'infini avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$, s' approche avec un paramètre d' impact $b = OH$ d'un noyau cible (noyau d' or) de masse $M >> m$ et de charge Ze.

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m, montrer que :

$$\overrightarrow{v_\infty} - \overrightarrow{v_0} = -\frac{k}{mv_0 b}\left(\overrightarrow{e_{\theta,\infty}} - \overrightarrow{e_{\theta,0}}\right) \text{ où } k = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}$$

et où l'indice 0 concerne les grandeurs au départ et l'indice ∞ les grandeurs quand la particule est de nouveau infiniment éloignée du noyau.

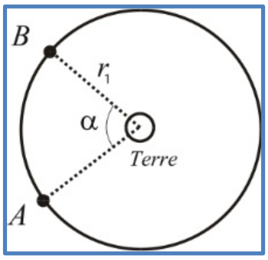
2. En déduire la déviation D de la particule en fonction de $k\,,m\,,b\ et\ v_0$.
3. Déterminer la distance minimale r_{min} de plus courte approche du noyau.



Rép : 1. …2. $\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{k}{mv_0^2 b}$ 3. $r_{min} = b\left(\tan\left(\frac{D}{2}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{D}{2}\right)}\right)$

MC131 – Satellite en orbite

Deux satellites A et B tournent sur une même orbite circulaire de rayon r_1. Depuis le centre de la Terre, l'arc AB est vu sous l'angle α, B étant en retard sur A. On notera M_T la masse de la Terre et G la constante de gravitation universelle.



1. Exprimer la vitesse v_1 de A et B en fonction de $G, M_T\ et\ r_1$. .
2. On rappelle l'expression de l'énergie mécanique d'un corps de masse m sur une trajectoire elliptique de demi grand axe a :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$$

Retrouver cette expression dans le cas particulier d'une trajectoire circulaire de rayon R.

3. Même question concernant la $3^{ème}$ loi de Kepler : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$
4. Pour réaliser un rendez-vous orbital, B modifie sa vitesse en un temps très court, en faisant passer le module de sa vitesse de v_1 à v_2, mais sans changer sa direction. La trajectoire de B devient elliptique. Montrer que la position où B modifie sa vitesse correspond nécessairement au périgée ou à l'apogée de la nouvelle trajectoire.
5. Déterminer la vitesse v_2 pour qu'après avoir décrit sa nouvelle trajectoire une seule fois, B rencontre exactement A. Comparer $v_1\ et\ v_2$ en prenant $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Rép : 1. … 2. … 3. … 4. Répondre à l'aide d'un schéma soigné 5. $\frac{r_2}{r_1} = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0{,}89\ et\ v_2 = v_1\sqrt{\frac{2r_2}{r_1+r_2}} = 0{,}969\ v_1$