

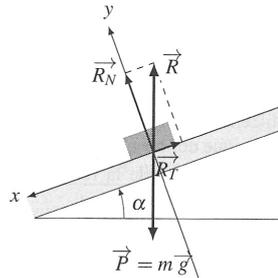
# MC1 – Mécanique en référentiel galiléen

## A – Travaux dirigés

### MC11 - Palet sur un plan incliné

1°) On étudie le mouvement du palet assimilé à un point M de masse  $m$  dans le référentiel terrestre galiléen.

Le palet est entraîné par son poids vertical et dirigé vers le bas  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Il subit également la réaction du plan incliné  $\vec{R}$ . Le mouvement est plan.



2°) On définit un repère cartésien  $(0, x, y)$  sur le schéma d'où :

$$m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow R_x = T = -mgsin\alpha \text{ et } R_y = N = mgcos\alpha$$

La composante  $R_x$  est négative, ce qui est cohérent avec le fait que la force de frottement solide empêche le palet de glisser vers le bas. La composante  $R_y$  est positive et donc dirigé du plan vers le palet.

3°) En l'absence de glissement,  $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$  d'où :

$$\left| \frac{T}{N} \right| < f \Leftrightarrow \tan \alpha < f \text{ donc } \alpha < \alpha_m = \text{Arctan}(f)$$

4°) Lorsque l'angle  $\alpha$  est supérieur à  $\alpha_m$ , le palet glisse et on utilise la loi de Coulomb relative au glissement :  $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ .

Sous l'action du poids, la palet glisse vers le bas et donc vers les  $x$  croissants. La force de frottement solide est opposée au mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow m\ddot{x} = mgsin\alpha - |T| \text{ et } 0 = N - mgcos\alpha$$

$$\text{Donc : } m\ddot{x} = mgsin\alpha - |T| = mgsin\alpha - fmgcos\alpha$$

$$= mgsin\alpha - \tan\alpha_m \cdot mgcos\alpha = m\ddot{x} = mgsin\alpha \left( 1 - \frac{\tan\alpha_m}{\tan\alpha} \right) > 0$$

Ce qui prouve que le mouvement est **rectiligne et uniformément accéléré**. On vérifie également que l'on obtient bien  $\ddot{x} > 0$  puisque l'accélération doit manifestement être dirigée vers les  $x$  croissants.

## MC12 - Résonance cyclotronique

1°) Soit :  $m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

Cette expression mène à :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

La résolution selon l'axe Oz est la plus simple :

- soit  $\dot{z} = cste = \gamma a \omega_0 \Rightarrow z = \gamma a \omega_0 t$ , la trajectoire n'est donc plane.

L'intégration des projections sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  donne :

$$m\dot{x} = qB_0y + C_1 \text{ et } m\dot{y} = -qB_0x + C_2$$

Les conditions initiales  $\dot{x}(0) = 0$  et  $\dot{y}(0) = -a\omega_0$  donnent :

$$m\dot{x} = qB_0y \text{ et } m\dot{y} = -qB_0x - ma\omega_0$$

On peut alors remplacer ces expressions dans les membres de droite des équations fournies par le principe fondamental de la dynamique, soit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{qB_0}{m} \dot{y} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} x - \frac{qB_0}{m} a\omega_0 \\ \text{et } \ddot{y} &= -\frac{qB_0}{m} \dot{x} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} y \end{aligned}$$

Donc :  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$  où  $\omega_0 = \frac{qB_0}{m} \Rightarrow y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

où A et B sont des constantes.

- $y(0) = 0$  fournit  $A = 0$ .
- $\dot{y}(0) = -a\omega_0 \Rightarrow B = -a$ .

Donc :

$$y(t) = -a \sin(\omega_0 t)$$

Or :

$$\dot{x} = \frac{qB_0}{m} y = -\frac{qB_0}{m} a \sin(\omega_0 t)$$

Donc :

$$x = \frac{qB_0}{m\omega_0} a \cos(\omega_0 t) + C = a \cos(\omega_0 t) + C$$

Or :  $x(0) = a$

Donc :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t)$$

2°) On rajoute  $q\vec{E}$  sur la première coordonnée d'où :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) = \varepsilon a \omega_0^2 \cos(\omega t) \text{ où } \omega_0 = \frac{qB_0}{m}$$

$$\text{Donc : } \frac{qE_0}{m} = \varepsilon a \omega_0^2 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{qE_0}{ma\omega_0^2}$$

$$3^\circ) \text{ Donc : } x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \lambda \cos(\omega t)$$

$$\text{Où : } -\lambda \omega^2 + \omega_0^2 \lambda = \varepsilon a \omega_0^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varepsilon a \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\text{De plus : } x(0) = a = A + \lambda \Leftrightarrow A = a - \lambda \text{ et } \dot{x}(0) = B \omega_0 = 0$$

Donc :

$$\frac{x}{a} = \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{a} \cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{x}{a} = (1 - \mu) \cos(\omega_0 t) + \mu \cos(\omega t)$$

Or :

$$\dot{y} = -\omega_0 x \Rightarrow \frac{y}{a} = -(1 - \mu) \sin(\omega_0 t) - \frac{\mu \omega_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$4^\circ) \text{ Donc : } x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \lambda t \sin(\omega t)$$

$$\text{Or } \dot{x}_p = \lambda \sin(\omega t) + \lambda t \omega \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{x}_p = 2\lambda \omega \cos(\omega t) - \lambda t \omega^2 \sin(\omega t)$$

$$\text{D'où : } 2\lambda \omega \cos(\omega t) - \omega_0^2 \lambda t \sin(\omega t) + \omega_0^2 \lambda t \sin(\omega t) = \varepsilon a \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

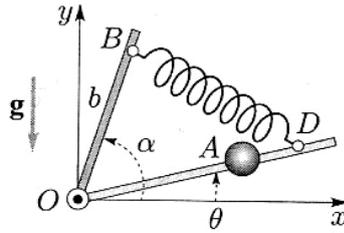
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\varepsilon a \omega_0}{2}$$

$$\text{De plus : } x(0) = a = A \Leftrightarrow \text{ et } \dot{x}(0) = B \omega_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = a \cos(\omega_0 t) + \mu t \sin(\omega t)$$

5°) Il suffit de sélectionner  $\omega = \omega_0$  pour une des particules et utiliser un diaphragme pour réaliser la séparation...

## MC13 – Sismographe de la Coste



1°) Soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \vec{OA} \wedge \vec{P} + \vec{OD} \wedge k\vec{DB} = \vec{OA} \wedge \vec{P} + \vec{OD} \wedge k\vec{OB} \\ &= l\vec{u}_r \wedge mg(-\sin\theta\vec{u}_r - \cos\theta\vec{u}_\theta) + d\vec{u}_r \wedge kb(\cos(\alpha - \theta)\vec{u}_r + \sin(\alpha - \theta)\vec{u}_\theta) \end{aligned}$$

Donc sur  $\vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned} ml^2\ddot{\theta} &= kdb(\sin(\alpha - \theta)) - mgl\cos\theta \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\cos\theta &= \frac{kdb}{ml^2}(\sin(\alpha - \theta)) \end{aligned}$$

2°) Au repos :  $\ddot{\theta} = 0$  et  $\theta = 0$  d'où

$$\frac{g}{l} = \frac{kdb}{ml^2}\sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{mgl}{kdb}$$

3°) Donc :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\cos\theta &= \frac{kdb}{ml^2}(\sin(\alpha - \theta)) = \frac{kdb}{ml^2}(\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\cos\theta &= \frac{g}{l}\cos\theta + \frac{g}{l\sin\alpha}(-\cos\alpha\sin\theta) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l\tan\alpha}\sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l\tan\alpha}\theta = 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{l\tan\alpha}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{AN : } \tan(\alpha) = 1998 \Rightarrow \alpha = 89,97^\circ$$

# MC14 - Voyage interplanétaire de la terre a mars

1) L'énergie du vaisseau spatial en  $D$  est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_D^2 - m\frac{GM_S}{R_T} = -m\frac{GM_S}{2a}, \text{ où } a \text{ est le demi}$$

grand-axe de l'ellipse de Hohman .

$$\text{On en déduit } v_D^2 = 2GM_S\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right).$$

Sachant que  $a = \frac{R_T + R_M}{2}$ , on obtient :

$$v_D = \sqrt{2GM_S} \sqrt{\frac{R_M}{R_T(R_T + R_M)}}.$$

La vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique au départ est la même que celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil, c'est-à-dire :

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}.$$

La vitesse  $v_D$  est donc égale à :

$$v_D = v_T \left( \sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}} \right) = 32,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

La variation de vitesse en  $D$  est :

$$\Delta v_D = v_D - v_T = v_T \left( \sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}} - 1 \right) = 2,9 \text{ km.s}^{-1}.$$

Les moteurs fournissent l'énergie  $W$  égale à la différence d'énergie du vaisseau entre l'ellipse de Hohman et l'orbite de parking, soit :

$$\mathcal{E} = \left( -m\frac{GM_S}{2a} \right) - \left( -m\frac{GM_S}{2R_T} \right)$$

(d'après les hypothèses de l'énoncé, l'énergie du vaisseau sur l'orbite de parking dans le référentiel héliocentrique est égale à celle de la Terre dans ce même référentiel).

Tous calculs faits, on obtient :

$$W_D = \frac{mv_T^2}{2} \left( \frac{R_M - R_T}{R_T + R_M} \right) = 91,6.10^6 \text{ m (en joules)}.$$

On remarque que  $W_D > 0$  : c'est normal car la nouvelle orbite est extérieure à la première.

2) La conservation du moment cinétique du vaisseau sur l'ellipse de Hohman, entre  $D$  et  $A$ , permet d'écrire

$$v_A R_M = v_D R_T, \text{ d'où } v_A = v_D \frac{R_T}{R_M} = 21,5 \text{ km.s}^{-1}.$$

À l'arrivée sur Mars, la vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique est égale à celle de Mars donc à  $v_M$ .

La variation de vitesse à l'arrivée est donc :

$$\Delta v_A = v_M - v_T \frac{R_T}{R_M} \sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}} = 2,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

Les moteurs fournissent l'énergie  $W_A$  :

$$W_A = \left( -m\frac{GM_S}{2R_M} \right) - \left( -m\frac{GM_S}{2a} \right) = \frac{mv_T^2}{2} \frac{R_T(R_M - R_T)}{R_M(R_M + R_T)}$$

$$= 60,3.10^6 \text{ m (en joules)}.$$

$W_A$  est également positif, car on fait encore une fois passer le vaisseau sur une orbite extérieure.

3) La période du mouvement du vaisseau sur l'ellipse de Hohman vérifie  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{R_T^2}$ , où  $T_0$  est la période de rotation de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 1 an. La durée  $\tau$  du transfert étant égale à  $\frac{T}{2}$ ,

$$\text{on en déduit } \tau = \frac{1}{2} \left( \frac{R_T + R_M}{2R_T} \right)^{\frac{3}{2}} T_0 = 258 \text{ jours}.$$

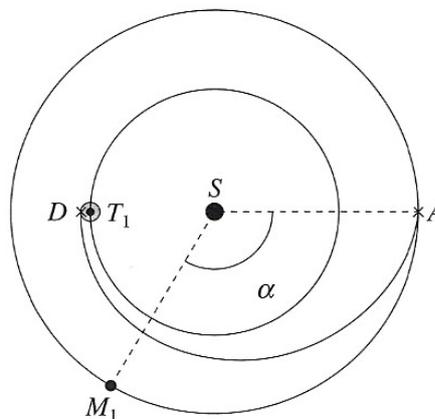
4) La période de rotation de Mars autour du Soleil

$$\text{est } T_M = \left( \frac{R_M}{R_T} \right)^{\frac{3}{2}} T_0 = 684 \text{ jours}.$$

En 258 jours, l'angle dont a tourné la planète est

$$2\pi \frac{\tau}{T_M} = 135,8^\circ, \text{ ce qui définit la position de Mars}$$

au départ du vaisseau.



## B – Exercices supplémentaires

## MC15 - Mouvement le long d'une came

$$\begin{aligned} \text{a) Soit : } \vec{v} &= \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = c \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_r + (b - c \cos \theta) \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ &\Leftrightarrow \vec{v} = c \omega \sin \theta \vec{u}_r + (b - c \cos \theta) \omega \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

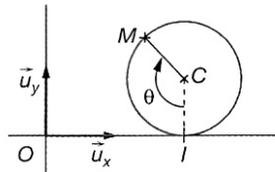
$$\begin{aligned} \text{Et } \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta = \\ &= (c \omega^2 \cos \theta - (b - c \cos \theta) \omega^2) \vec{u}_r + (0 + 2c \omega \sin \theta \cdot \omega) \vec{u}_\theta \\ &\Rightarrow \vec{a} = \omega^2 [(2c \cos \theta - b) \vec{u}_r + (2c \sin \theta) \vec{u}_\theta] \end{aligned}$$

$$\text{b) En } \pi/2 : \vec{v} = c \omega \vec{u}_r + b \omega \vec{u}_\theta \text{ et } \vec{a} = \omega^2 [-b \vec{u}_r + (2c) \vec{u}_\theta]$$

$$\text{Donc } v = \omega \sqrt{c^2 + b^2} = 0,070 \text{ m/s et } a = \omega^2 \sqrt{b^2 + 4c^2} = 0,28 \text{ m/s}^2$$

## MC16 - Trajectoire cycloïdale

1°) Soit :



- Sans glissement on a :

I étant le point de contact à l'instant entre la roue et l'axe Ox, la largeur de l'arc IM est égale à OI

$$\text{D'où : } x_I = R\theta \Leftrightarrow vt = R\omega t$$

2°)

$$\begin{aligned} \text{a) On a : } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM} = (x_I - R \sin \theta) \vec{u}_x + (R - R \cos \theta) \vec{u}_y \\ \text{donc } \overrightarrow{OM} &= R(\omega t - \sin(\omega t)) \vec{u}_x + R(1 - \cos(\omega t)) \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) D'où : } \vec{v} &= R(\omega - \omega \cos(\omega t)) \vec{u}_x + R(0 + \omega \sin(\omega t)) \vec{u}_y \\ \vec{v} &= R\omega(1 - \cos(\omega t)) \vec{u}_x + R\omega \sin(\omega t) \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\text{c) D'où : } \vec{a} = R\omega^2(\sin(\omega t)) \vec{u}_x + R\omega^2 \cos(\omega t) \vec{u}_y = -\omega^2 \overrightarrow{CM}$$

$$\text{3°) Si } z=0 \text{ on a } \cos \theta = 1 \text{ d'où : } \vec{a} = +R\omega^2 \vec{u}_y$$

## MC17 - Mouvement d'un point matériel sur une parabole

1)  $x = r \cos \theta$  et  $r^2 = x^2 + y^2$ , or l'équation de la courbe peut s'écrire  $a = \frac{r}{2}(1 + \cos \theta)$ , donc :

$(2a - x)^2 = x^2 + y^2$  ou encore  $y^2 = 4a(a - x)$ .  
C'est bien l'équation d'une parabole.

$$2) \text{ a) } v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = a \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta}$$

$$\text{et } v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta} .$$

Il reste à éliminer  $\dot{\theta}$  en utilisant :

$$v = kr = \sqrt{r^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \frac{a \dot{\theta}}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} .$$

$\theta \in ]-\pi ; +\pi[$ ,  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est positif

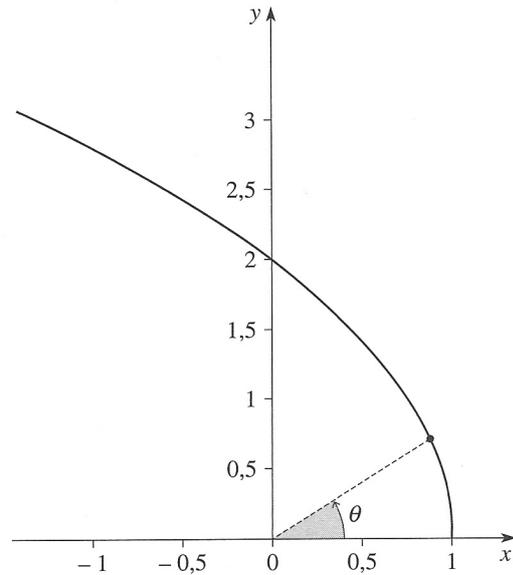
et  $\dot{\theta}$  est positif par hypothèse.

Donc  $\dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\text{et } v_r = ka \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ et } v_\theta = \frac{ka}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} .$$

$$\text{b) } \dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = k dt$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln \left( \left| \tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right) = kt + \text{cte} .$$

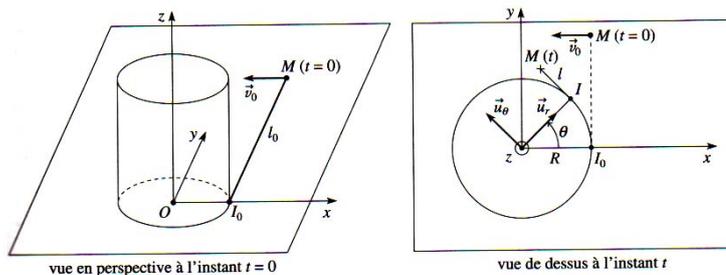


$\theta \in ]-\pi ; +\pi[$  donc  $\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$

d'où sa tangente est positive.

Si  $\theta = 0$  à  $t = 0$ , la constante est nulle.

## MC18 - Enroulement d'un fil sur un cylindre



$$1^\circ) \text{ On a } l = l_0 - \widehat{I\bar{O}} = l_0 - R\theta$$

$$2^\circ) \text{ Soit : } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\overrightarrow{u}_r + l\overrightarrow{u}_\theta = R\overrightarrow{u}_r + (l_0 - R\theta)\overrightarrow{u}_\theta$$

$$3^\circ) \text{ Donc } \vec{v} = 0\overrightarrow{u}_r + R\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} + (0 - R\dot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + (l_0 - R\theta)\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + (-R\dot{\theta})\overrightarrow{u}_\theta + (l_0 - R\theta)(-\dot{\theta})\overrightarrow{u}_r = -(l_0 - R\theta)(\dot{\theta})\overrightarrow{u}_r$$

$$4^\circ) \text{ On a } \vec{v} = v\overrightarrow{u}_r \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_r + v\frac{d\overrightarrow{u}_r}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u}_r + v\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = \vec{T} + \vec{R} + \vec{P}.$$

Le PFD sur  $\overrightarrow{u}_r$  donne  $ma_r = m\frac{dv}{dt} = 0$  donc  $v = \text{cste}$

$$5^\circ) \text{ Donc : } \vec{v} = -(l_0 - R\theta)(\dot{\theta})\overrightarrow{u}_r \Rightarrow v = (l_0 - R\theta)(\dot{\theta}) > 0 = v_0$$

$$6^\circ) \text{ On a : } (l_0 - R\theta)(\dot{\theta}) = v_0 \Leftrightarrow (l_0 - R\theta)d\theta = v_0 dt \Leftrightarrow l_0\theta - R\theta^2 = v_0 t + \text{cste} = v_0 t$$

$$\Leftrightarrow \theta^2 - 2\frac{l_0}{R}\theta + \frac{2v_0 t}{R} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{l_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2 - \frac{2v_0 t}{R}} > 0$$

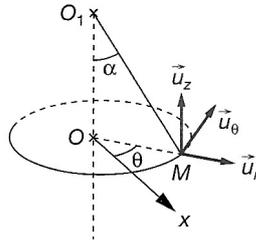
$$\text{Comme } \theta \text{ croît : } \theta = \frac{l_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2 - \frac{2v_0 t}{R}} = \frac{l_0}{R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}\right).$$

$$7^\circ) \text{ Le fil est entièrement enroulé lorsque } l=0 \Leftrightarrow l_0 - R\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{l_0}{R} = 143^\circ$$

$$\text{Donc : } \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}} = 0 \Leftrightarrow l_0^2 = 2Rv_0 t \Leftrightarrow t = \frac{l_0^2}{2Rv_0} = 6,25 \text{ s}$$

## MC19 - Pendule en rotation

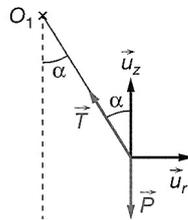
- a) La trajectoire étant un cercle (de rayon  $r = l \sin \alpha$ ), des coordonnées cylindriques semblent adaptées. La position du pendule sur le cercle est repérée par l'angle  $\theta$ .



- b) Les actions mécaniques sur la bille sont son poids  $mg$  et la tension  $T$  du fil, Soit  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ .

En projection sur l'axe radial :  $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ml\sin\alpha\omega^2 = -T\sin\alpha$

Sur l'axe Oz :  $0 = -mg + T\cos\alpha$



- c) En éliminant  $T$ , on aboutit à :

$$-ml\sin\alpha\omega^2 = -T\sin\alpha \Leftrightarrow ml\omega^2 = T = mg \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = g \frac{1}{l \cos\alpha} \geq \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

- d) Si  $\omega$  devient très important,  $\cos \alpha$  tend vers 0, soit  $\alpha$  tend vers  $\pi/2$ . La ficelle devient effectivement quasi horizontale.
- e) On a :  $\omega = 3 \ 2\pi = 19 \text{ rad.s}^{-1}$ , d'où  $\alpha = 82^\circ$

## MC110 - Expérience de Millikan

$$1^\circ) \text{ Soit : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - M\vec{g} - \lambda\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)\vec{g} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)g\tau$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)g \frac{m}{\lambda} = (m - M) \frac{g}{\lambda} = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho - \rho') \frac{g}{6\pi\eta R}$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \frac{2g}{9\eta} R^2 (\rho - \rho')$$

2°) Calcul du coefficient de viscosité

On suppose la vitesse limite atteinte rapidement d'où :

$$v_{lim} = \frac{h}{\Delta t} = 3,8 \cdot 10^{-4} m/s \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9\eta v_{lim}}{2g(\rho - \rho')}} = 1,8 \mu m$$

$$3^\circ) \text{ Soit : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - M\vec{g} - \lambda\vec{v} + \frac{qU}{l} (-\vec{u}_z) \text{ (opposé au poids)}$$

$$\Rightarrow v_{lim2} = (m - M) \frac{g}{\lambda} - \frac{qU}{l\lambda} = \frac{2g}{9\eta} R^2 (\rho - \rho') - \frac{qU}{l\lambda}$$

$$4^\circ) \text{ On a } v_{lim2} = 0 \Rightarrow q = \frac{2gl6\pi\eta R}{9\eta U} R^2 (\rho - \rho') = \frac{4\pi gl}{3U} R^3 (\rho - \rho') = 5,510^{-19} C = 3e$$

5°) Trouvez une valeur de la charge élémentaire

## MC111 - Résistance de l'air - Cas quadratique

$$1^\circ) \text{ Soit : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \frac{kmv^2}{g} \vec{g} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = g + \frac{kv^2}{g} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + kv^2 = -g$$

$$\Leftrightarrow dv = (-g - kv^2)dt \Leftrightarrow \frac{dv}{g + kv^2} = -dt$$

$$\text{Or } g = k\lambda^2 \Rightarrow \frac{dv}{\lambda^2 + v^2} = -kdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{Arctan}\left(\frac{v}{\lambda}\right) + cste = -kt \Rightarrow \text{Arctan}\left(\frac{v}{\lambda}\right) = -kt\lambda + \phi$$

$$\Rightarrow v = \lambda \tan(-kt\lambda + \phi) \text{ avec } v_0 = \lambda \tan(\phi)$$

$$2^\circ) \text{ On a } z = \int v dt = \int \lambda \tan(-kt\lambda + \phi) dt = \frac{1}{k} \text{Ln} |\cos(-kt\lambda + \phi)| + cste$$

$$\text{Or } z(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{k} \text{Ln} |\cos(\phi)| + cste = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{k} \text{Ln} \left| \frac{\cos(-kt\lambda + \phi)}{\cos(\phi)} \right|$$

$$3^\circ) \text{ Lorsque } v=0 \text{ on a : } -kt\lambda + \phi = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{k} \text{Ln} \left| \frac{1}{\cos(\phi)} \right| = \frac{1}{k} \text{Ln} \left| \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \right|$$

$$\text{D'où : } z_M = \frac{1}{k} \text{Ln} \left| \sqrt{1 + \tan^2 \phi} \right| = \frac{1}{k} \text{Ln} \left| \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2} \right| = 346m$$

$$\text{Et sans frottement : } z_M = \frac{v_0^2}{2g} = 744m.$$

## MC112 - Mouvement d'une perle sur une hélice

$$\begin{aligned}
 1^\circ \text{ Soit } E_k &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{2}m\left((-R\sin\theta \cdot \dot{\theta})^2 + (R\cos\theta \cdot \dot{\theta})^2 + p^2\dot{\theta}^2\right) \\
 &= \frac{1}{2}m(R^2 + p^2)\dot{\theta}^2
 \end{aligned}$$

2°) On a donc :  $E_p = mgz + C = mgp\theta + C$  Calculer son énergie potentielle.

$$3^\circ \text{ Soit : } \frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow (R^2 + p^2)\ddot{\theta}\dot{\theta} + gp\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{gp}{(R^2+p^2)} = 0$$

Donc :

$$\theta = -\frac{1}{2}\frac{gp}{(R^2 + p^2)}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2}\frac{gp}{(R^2 + p^2)}t^2 + \theta_0$$

## MC113 - Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

1°) Soit l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l_0 + x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - x - l_0)^2 - mgz + C = kx^2 - mgz + C$$

Donc :

$$E_p = k(l\sin\theta)^2 - mg(l\cos\theta) + C$$

Utilisons les formules d'approximation :

$$E_p = k(l\theta)^2 - mgl + \frac{mgl\theta^2}{2} + C = \theta^2 \left( \left( \frac{mgl}{2} \right) + kl^2 \right) + C - mgl$$

Soit  $E_p=0$  pour  $\theta=0$  d'où :

$$E_p = \theta^2 \left( \left( \frac{mgl}{2} \right) + kl^2 \right)$$

2°) Soit :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow 2 * \frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + 2 * \theta\dot{\theta} \left( \left( \frac{mgl}{2} \right) + kl^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * \frac{2}{ml^2} \left( \left( \frac{mgl}{2} \right) + kl^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * \left( \left( \frac{g}{l} \right) + \frac{2k}{m} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \text{ où : } \omega_1^2 = \frac{g}{l} \text{ et } \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

## MC114 - Mouvement d'une bille reliée à un ressort sur un cercle

On étudie la bille dans le référentiel terrestre galiléen. Elle est soumise à son poids, à la force de rappel élastique du ressort et à la réaction du cerceau qui est normale du fait de l'absence de frottement.

1°) Le triangle OMB est isocèle en O donc les angles des sommets B et M sont égaux. Par ailleurs, la somme des angles d'un triangle vaut  $\pi$ . En explicitant ces deux conditions, on obtient :  $\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$

2°) Pour calculer la distance MB, on détermine son carré :

$$\begin{aligned} MB^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta \\ &= 2R^2(1 - \cos \theta) = 4R^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Donc :  $MB = 2R \left| \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right|$

3°) Les forces qui s'appliquent sur le système sont conservatives (poids, force de rappel élastique) ou à puissance nulle (réaction du cerceau). On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique.

On détermine l'énergie potentielle dont dérive le poids :

$$E_{pp} = mgy = -mgR \sin \theta$$

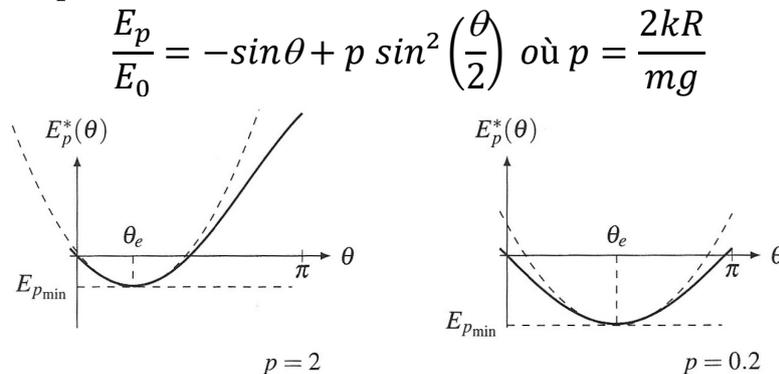
Puis l'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k MB^2 = 2kR^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Donc :

$$E_p = -mgR \sin \theta + 2kR^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

Pour la représenter, on remarque que  $\theta$  ne peut varier qu'entre 0 et  $\pi$  et on fixe  $E_0 = mgR$  comme échelle d'énergie. On trace l'énergie potentielle sans dimension pour deux valeurs de  $p$  :



Tracé de l'énergie potentielle pour deux valeurs de  $p$ .

L'énergie potentielle présente un minimum en  $\theta_e$  entre 0 et  $\pi$ . La position de

coordonnée  $\theta_e$ , est donc une position d'équilibre stable que l'on peut déterminer en recherchant le point d'annulation de la dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{dE_p}{d\theta} = 0 &\Leftrightarrow -\cos\theta_e + p\sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\cos\theta_e + \frac{p}{2}\sin(\theta_e) = 0 \\ &\Leftrightarrow \tan(\theta_e) = \frac{2}{p} = \frac{mg}{kR}\end{aligned}$$

La position d'équilibre est, comme on pouvait s'y attendre comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Elle tend vers 0 lorsque la raideur du ressort est si grande que le poids de M ne peut pas l'étirer et vers  $\frac{\pi}{2}$  lorsqu'elle est si faible que le poids de M l'étire facilement.

4°) Si l'on écarte la bille de sa position d'équilibre stable et qu'on la lâche sans vitesse initiale, la bille va osciller dans le puits de potentiel. Si on l'en écarte faiblement, on s'attend à observer des oscillations harmoniques, tout se passant comme si la bille oscillait dans le potentiel harmonique tangent dessiné en pointillé sur la figure ci-dessus.

5°) L'énergie cinétique du système vaut  $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$  puis l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\sin\theta + 2kR^2\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Le mouvement étant conservatif, l'énergie mécanique est conservée et sa dérivée s'annule :

$$\begin{aligned}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgR\cos\theta\dot{\theta} + 4kR^2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\dot{\theta} &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(\cos\theta - \frac{4kR}{mg}\sin\theta\right) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(\cos\theta - \frac{p}{2}\sin\theta\right) &= 0\end{aligned}$$

6°) On écarte M de sa position d'équilibre et on pose  $\theta = \theta_e + \varepsilon$  puis :  
 $\cos\theta = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos\theta_e\cos\varepsilon - \sin\theta_e\sin\varepsilon = \cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e$   
 $\sin\theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin\theta_e\cos\varepsilon + \cos\theta_e\sin\varepsilon = \sin\theta_e + \varepsilon\cos\theta_e,$

On injecte alors ces relations dans l'équation du mouvement et on trouve :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(\cos\theta_e - \varepsilon\sin\theta_e - \frac{p}{2}\sin\theta_e - \frac{p}{2}\varepsilon\cos\theta_e\right) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\left(-\cos\theta_e + \frac{p}{2}\sin\theta_e + \varepsilon\left(\sin\theta_e + \frac{p}{2}\cos\theta_e\right)\right) &= 0\end{aligned}$$

Or :  $-\cos\theta_e + \frac{p}{2}\sin(\theta_e) = 0$

Donc :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g \left( \sin \theta_e + \frac{p}{2} \cos \theta_e \right)}{R} \varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{g \left( \sin \theta_e + \frac{p}{2} \cos \theta_e \right)}{R}$$

Comme prévu, le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est celui d'un oscillateur harmonique.

### MC115 - Pendule simple entraîné

1°)  $E_p = E_{pA} + E_{pB} = -mgl \cos \alpha$  si on choisit  $E_p = 0$  sur l'axe  $Ox$ .

$$2^\circ) E_c = \frac{1}{2} m v^2(A) + \frac{1}{2} m v^2(B) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x} \vec{u}_x + l \dot{\alpha} \vec{u}_\theta)^2$$

$$= m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + m l \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha$$

$$3^\circ) \text{ Donc : } E_m = -mgl \cos \alpha + m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2 + m l \dot{x} \dot{\alpha} \cos \alpha$$

# MC116 - Point mobile à l'intérieur d'un cône

## 1. Cas d'un mouvement circulaire et uniforme.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la loi de la dynamique appliquée au point  $M$  s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

La projection de cette expression dans la base cylindro-polaire s'écrit :

$$(1) \text{ suivant } \vec{u}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -N \cos \alpha$$

$$(2) \text{ suivant } \vec{u}_\theta : m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$(3) \text{ suivant } \vec{u}_z : m\ddot{z} = N \sin \alpha - mg$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme on a :

$$r = cte \Rightarrow \dot{r} = 0 \text{ et } \ddot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$z = cte \Rightarrow \dot{z} = 0 \text{ et } \ddot{z} = 0$$

Les équations précédentes s'écrivent maintenant :

$$(1') : mr\omega^2 = N \cos \alpha \Rightarrow N = \frac{mr\omega^2}{\cos \alpha}$$

$$(2') : r^2\dot{\theta} = Cte$$

$$(3') : N \sin \alpha - mg = 0 \Rightarrow N = \frac{mg}{\sin \alpha}$$

Le rapport des équations (3') et (1') donne :

$$\frac{mg}{\sin \alpha} \frac{\cos \alpha}{mr\omega^2} = 1 \text{ comme } r = a \text{ on obtient :}$$

$$\tan \alpha = \frac{g}{a\omega^2} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} = \frac{1}{\lambda_o^2}$$

$$\lambda_o = \frac{1}{\sqrt{\tan \alpha}}$$

## 2. Expression de la constante.

D'après l'équation (2') :  $r^2\dot{\theta} = Cte$

On détermine l'expression de la constante en utilisant les conditions initiales :

$$r(t=0)^2 \dot{\theta}(t=0) = a^2 \omega = a^2 \lambda \omega_o = Cte$$

On reconnaît ici la loi des aires : en effet dans le plan  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  le mouvement est à force centrale  $-N \cos \alpha \vec{u}_r$ .

## 3. Equation différentielle.

On exprime l'énergie mécanique de la particule :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \text{constante}$$

Or :  $z = \frac{r}{\tan \alpha}$  ;  $r^2 \dot{\theta} = a^2 \lambda \omega_o \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left( \frac{a^2 \lambda \omega_o}{r^2} \right)^2$  et  $\lambda_o = \frac{1}{\sqrt{\tan \alpha}}$

Ces relations permettent d'éliminer de l'intégrale première de l'énergie la dépendance en  $z$  et  $\dot{\theta}$  :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \left( \frac{a^2 \lambda \omega_o}{r^2} \right)^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2 \alpha} \right) + \frac{mgr}{\tan \alpha} = \text{constante}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 (1 + \lambda_o^4) + \frac{1}{r^2} a^4 \lambda^2 \omega_o^2 \right) + \frac{mgr}{\tan \alpha} = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 (1 + \lambda_o^4) + \frac{1}{2r^2} a^4 \lambda^2 \omega_o^2 + gr \lambda_o^2 = \frac{\text{constante}}{m}$$

Comme  $g = a \omega_o^2$ , on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{2} \dot{r}^2 (1 + \lambda_o^4)}_{\text{Energie cinétique suivant } r} + \underbrace{a^2 \omega_o^2 \left( \frac{1}{2} \frac{a^2 \lambda^2}{r^2} + \lambda_o^2 \frac{r}{a} \right)}_{\text{Energie potentielle dite effective } E_{p\text{eff}}} = Cte'$$

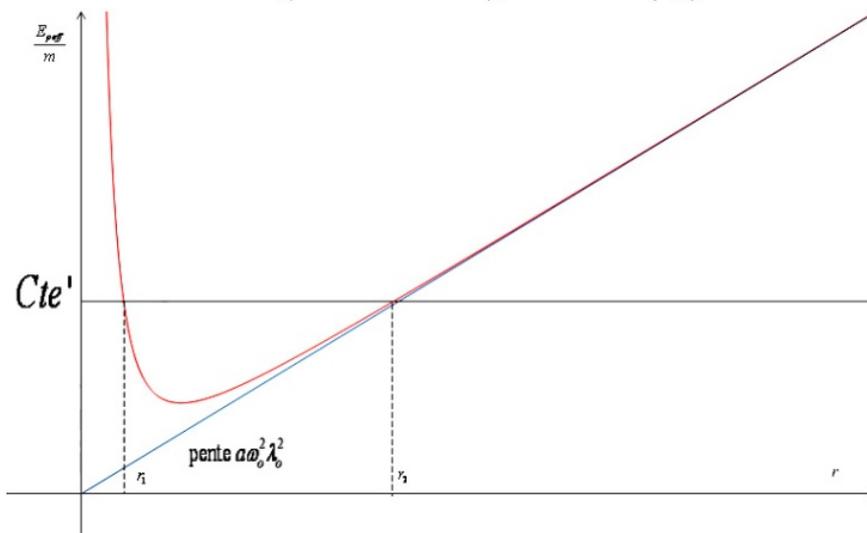
$$E_{p\text{eff}} = a^2 \omega_o^2 \left( \frac{1}{2} \frac{a^2 \lambda^2}{r^2} + \lambda_o^2 \frac{r}{a} \right)$$

$$r \rightarrow \infty \quad E_{p\text{eff}} = a^2 \omega_o^2 \lambda_o^2 \frac{r}{a} = a \omega_o^2 \lambda_o^2 r$$

$$r \rightarrow 0 \quad E_{p\text{eff}} \rightarrow \infty$$

On recherche les extremums de la fonction  $E_{p\text{eff}}$  :

$$\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr} = a^2 \omega_o^2 \left( -\frac{1}{2} a^2 \lambda^2 \frac{2}{r^3} + \frac{\lambda_o^2}{a} \right) = 0 \Rightarrow r = \left( \frac{\lambda}{\lambda_o} \right)^{\frac{2}{3}}$$



On peut déduire de cette étude graphique que :  $r_1 \leq r \leq r_2$ .

#### 4. Evolution de $r$ .

Comme à  $t = 0$ ,  $\dot{r}(0) = 0$  pour  $r = a$ , l'une des deux positions limites  $r_1$  ou  $r_2$  doit être égale à  $a$ .

D'autre part comme la position d'équilibre  $r = a \left( \frac{\lambda}{\lambda_o} \right)^{\frac{2}{3}}$  est nécessairement comprise entre  $r_1$  et  $r_2$ , on peut

en déduire que si :

$$\lambda > \lambda_o \Rightarrow r_1 = a \text{ et } r_2 > a$$

$$\lambda < \lambda_o \Rightarrow r_2 = a \text{ et } r_1 < a$$

# MC117 - Déflexion électrique

1. On néglige la force de pesanteur devant la force électrostatique. Si l'on note  $\vec{E}$  le champ électrostatique, la force subie par la charge est  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Dans le cas d'un champ uniforme, ce qui est le cas d'un condensateur plan, la relation générale  $\vec{E} = -\text{grad } V$  devient ici par intégration  $\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u}_x$ . On en déduit :

$$\vec{F} = -q\frac{U}{d}\vec{u}_x$$

2. a) On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'électron :  $m\vec{a} = \vec{F}$ . La force n'a pas de composante sur  $Oy$  et comme la vitesse initiale n'a pas de composantes non plus sur  $Oy$  on en déduit que le mouvement est dans le plan  $xOz$ . La projection de la relation fondamentale avec l'expression de  $\vec{F} = \vec{E}$  et les intégrations successives donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -q\frac{U}{d} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}t(+cte_1) \\ \dot{z} = cte_2 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}\frac{t^2}{2}(+cte_3) \\ z = v_0t(+cte_4) \end{cases}$$

Les constantes entre parenthèses ( $cte_1, cte_3, cte_4$ ) sont déterminées nulles grâce aux conditions initiales.

En éliminant  $t$  entre les équations paramétriques en  $x$  et  $z$ , on obtient :

$$x = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}\frac{z^2}{2v_0^2} = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{z^2}{2v_0^2}$$

Il s'agit d'une parabole.

b) Le point de sortie correspond à  $z_K = D$ , soit dans l'équation précédente  $x_K = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D^2}{2v_0^2}$ . D'après les équations paramétriques obtenues à la question (a), l'instant de passage en  $K$  est  $t_K = z_K/v_0$  soit  $D/v_0$ . les composantes de la vitesse en  $K$  sont obtenues en reportant  $t_K$  dans  $\dot{x}$  et  $\dot{z}$ , soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D}{v_0} \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$$

c) En dehors des plaques, puisqu'on néglige l'effet du champ de pesanteur et que l'on suppose le champ électrique nul, aucune force ne s'exerce sur l'électron : sa trajectoire est donc rectiligne uniforme (principe d'inertie dans un référentiel galiléen). On obtient aussi ce résultat par intégration de  $\vec{A} = \vec{0}$ .

d) Dans le triangle  $O_eJP$  (figure S52.1),  $X_P = O_eP = (JO_1 + L)\tan\theta$ . Il faut donc exprimer  $\tan\theta$  et  $JO_1$  sachant que le segment  $JP$  est tangent à la parabole en  $K$ . On peut écrire :

$$\tan\theta = \frac{O_1K}{JO_1} = \frac{x_K}{JO_1} = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D^2}{2v_0^2}\frac{1}{JO_1}$$

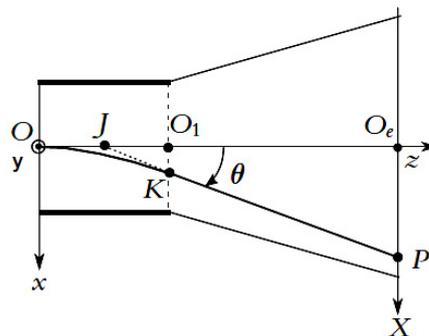
et

$$\tan\theta = \left(\frac{dx}{dz}\right)_K = \left(\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\right)_K = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D}{v_0^2}$$

En combinant les deux équations, on trouve (c'est d'ailleurs une propriété de la parabole) que  $JO_1 = D/2$  et donc :

$$X_P = \left(\frac{D}{2} + L\right)\frac{eD}{mdv_0^2}U$$

La déviation est proportionnelle à la tension  $U$ .



## MC118 - Effet Zeeman

a) Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron donne  $m \vec{a} = \vec{f}$ , soit en projection  $m \ddot{x} = -kx$  et  $m \ddot{y} = -ky$ .

b) On résout  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  (et une expression similaire en  $y(t)$ ) avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

On reconnaît l'expression paramétrique d'une ellipse (visualisation en mode XY de deux signaux déphasés en régime sinusoïdal forcé).

c) Il faut ajouter la force de Lorentz  $\vec{f} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$ , d'où en projection :

$$m \ddot{x} = -e \dot{y} B_0 - kx \text{ et } m \ddot{y} = e \dot{x} B_0 - ky.$$

d) On déduit  $m \ddot{u} - ie B_0 \dot{u} + ku = 0$ . L'équation caractéristique associée  $mr^2 - ie B_0 r + k = 0$  a pour discriminant  $\Delta = -e^2 B_0^2 - 4mk < 0$ . On déduit les racines

$r = \frac{ie B_0 \pm i \sqrt{e^2 B_0^2 + 4mk}}{2m}$ , et les solutions sont de la forme  $u(t) = \alpha \exp(i\omega_1 t) + \beta \exp(i\omega_2 t)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes et  $\omega_{1,2} = \frac{e B_0 \pm \sqrt{e^2 B_0^2 + 4mk}}{2m}$ .

Les solutions sont toujours oscillantes, mais avec des pulsations différentes  $|\omega_1|$  et  $|\omega_2|$ .

La pulsation  $\omega_0$  est la pulsation « naturelle » de l'atome, donc des photons que l'atome peut absorber ou émettre. Dans un champ magnétique, cette pulsation se dédouble, avec un écart dépendant du champ magnétique appliqué (au niveau quantique, il y a subdivision des niveaux d'énergie de l'atome). L'étude de spectres d'émission permet ainsi de mesurer des champs magnétiques, par exemple solaire ou galactique.

## MC119 - Pendule sur plan incliné

1. Le point se déplace dans le plan  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$  à distance  $L$  fixe de  $O$  donc la vitesse est  $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ . Par définition du moment cinétique, on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \vec{\sigma}_0 = L\vec{u}_r \wedge mL\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mL^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

2. a) Les trois forces s'exerçant sur le point  $M$  sont : le poids, la tension du fil  $\vec{T}$  et la réaction normale au plan incliné  $\vec{R}_N$ .

La force  $\vec{T}$  est alignée avec le fil donc  $\vec{T} = -T\vec{u}_r$  si l'on note  $T$  la norme de  $\vec{T}$ . La force  $\vec{R}_N$  est perpendiculaire au plan donc selon  $\vec{u}_z$  soit  $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$ . Le poids est vertical donc dans le plan  $xOz$  soit  $m\vec{g} = mg(\sin\alpha\vec{u}_x - \cos\alpha\vec{u}_z)$ . Il faut ensuite projeter la composante dans le plan sur  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_\theta$  sachant que  $\vec{u}_x = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$ . Finalement on trouve :

$$m\vec{g} = mg(\sin\alpha\cos\theta\vec{u}_r - \sin\alpha\sin\theta\vec{u}_\theta - \cos\alpha\vec{u}_z)$$

b) Le théorème du moment cinétique en  $O$  entraîne :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{u}_z = \vec{OM} \wedge m\vec{g} + \vec{OM} \wedge \vec{R}_N + \vec{OM} \wedge \vec{T}$$

Le moment de la force  $\vec{T}$  par rapport à  $O$  est nul puisque  $\vec{T}$  est colinéaire à  $\vec{OM}$ . Le moment de  $\vec{R}_N$  est perpendiculaire à  $Oz$ . Il reste à calculer les composantes du moment du poids sur  $Oz$  :

$$\vec{OM} \wedge m\vec{g} = mgL(\cos\alpha\vec{u}_\theta - \sin\alpha\sin\theta)\vec{u}_z$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\alpha\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{L}\sin\theta = 0$$

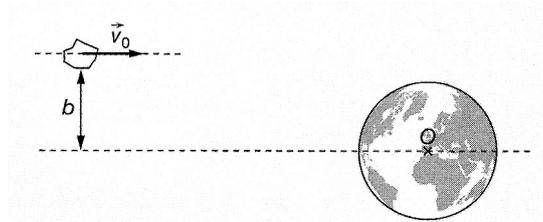
Pour les petites oscillations  $\sin\theta \simeq \theta$  et si l'on pose  $\omega_0^2 = \frac{g\sin\alpha}{L}$ , on trouve l'équation de l'oscillateur harmonique :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ .

c) La solution à l'équation précédente est  $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . À  $t = 0$ ,  $\theta = 0$  entraîne  $\cos\varphi = 0$ . On prend par exemple  $\varphi = \pi/2$ , alors  $\theta = -\theta_0 \sin\omega_0 t$ . Le calcul de  $\dot{\theta}$  donne  $\dot{\theta} = -\omega_0\theta_0 \cos\omega_0 t$ . À  $t = 0$ ,  $\dot{\theta} = v_0/L$  d'où  $\theta_0 = -v_0/(L\omega_0)$  et

$$\theta(t) = \frac{v_0}{L\omega_0} \sin\omega_0 t$$

L'angle maximal atteint est donc  $\frac{v_0}{L\omega_0}$ .

## MC120 - Distance minimale d'approche d'un astéroïde



a) L'énergie mécanique de l'astéroïde se conserve :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 > 0 \text{ car l'énergie potentielle est nulle à}$$

l'infini. La trajectoire est donc hyperbolique (Fig. 34).

b) Outre l'énergie mécanique  $E_m$ , le moment cinétique de l'astéroïde en O se conserve. Évaluons sa norme  $L_O$ . Au loin,  $L_O = m v_0 \cdot OM \cdot \sin \alpha$  (voir Fig. 34). Comme  $\alpha \ll 1$ ,  $\alpha \simeq b / OM$ , soit  $L_O = m b v_0$ .

c) Évaluons ces deux quantités au point P d'approche minimale. La vitesse en P est orthoradiale. En effet,  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ , avec  $\dot{r} = 0$  car la distance est minimale. Ainsi,  $L_O = m d_{\min} v_P$  (voir Fig. 34). De plus,

$$E_m = \frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GmM}{d_{\min}}.$$

On élimine alors  $v_P$  de cette dernière relation, et :

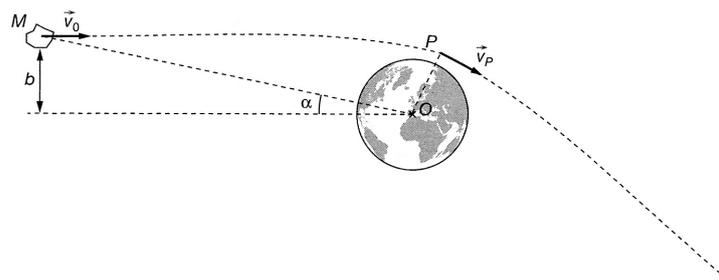
$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left( \frac{b v_0}{d_{\min}} \right)^2 - \frac{GmM}{d_{\min}}$$

$$\text{soit } v_0^2 d_{\min}^2 + 2GMd_{\min} - b^2 v_0^2 = 0.$$

$$\text{On résout : } \Delta' = G^2 M^2 + b^2 v_0^4, \text{ et } d_{\min} = \frac{-GM + \sqrt{\Delta'}}{v_0^2}$$

(l'autre racine négative a été éliminée).

d) La collision est évitée si et seulement si  $d_{\min} \geq R$ .



# MC121 - Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite - Freinage par l'atmosphère

On étudie le satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation colinéaire à son vecteur position.

1. La résultante des forces étant colinéaire avec le vecteur position, son moment par rapport à la Terre est nul et on en déduit par le théorème du moment cinétique que ce dernier est constant au cours du temps.
2. Si la valeur du moment cinétique est nulle, le mouvement est rectiligne. Sinon le mouvement a lieu dans le plan passant par  $O$ , centre de la Terre, et perpendiculaire au moment cinétique.
3. Dans ce plan, on utilise les coordonnées polaires et on explicite l'expression du moment cinétique soit  $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ . On peut définir la constante des aires par  $C = r^2 \dot{\theta}$ .
4. Le mouvement est circulaire si  $r$  est une constante. Comme la constante  $C$  est une constante, on en déduit que si  $r$  est constant,  $\dot{\theta}$  est également constant. Par conséquent, le mouvement est uniforme.
5. La vitesse s'exprime en coordonnées polaires par  $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta = r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  dans le cas d'un mouvement circulaire. La projection du principe fondamental de la dynamique sur  $\vec{u}_r$  donne  $-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{GM_T m}{r^2}$  soit  $C = r\dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{r}$ . On en déduit  $v^2 = r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{GM_T}{r}$ .
6. L'énergie cinétique peut s'exprimer par  $E_c = \frac{1}{2} mr^2 \dot{\theta}^2 = \frac{GM_T m}{2r}$ .
7. Quant à l'énergie potentielle, elle vaut  $E_p = -\frac{GM_T m}{r} = -2E_c$ .
8. On en déduit l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p = -E_c = \frac{E_p}{2} = -\frac{GM_T m}{2r}$ .
9. On effectue un développement limité de l'énergie potentielle

$$E_p(r + \Delta r) = -\frac{GM_T m}{r} \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^{-1} = -\frac{GM_T m}{r} \left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$\text{On en déduit } \Delta E_p = \frac{GM_T m \Delta r}{r^2}.$$

10. Comme  $E_m = \frac{E_p}{2}$  reste valable sur la trajectoire qui est supposée quasi - circulaire, on en déduit  $\Delta E_m = \frac{GM_T m \Delta r}{2r^2}$ .
11. Le travail de la force de frottement s'écrit  $W_f = -\alpha m v \vec{v} \cdot \vec{v} T_0 = -\alpha m v^3 T_0$  car  $v$  est constante.
12. L'application du théorème de l'énergie mécanique donne  $\frac{dE_m}{dt} = W_f$  soit en utilisant les résultats précédents et l'expression de la période de révolution  $T_0 = \frac{2\pi r}{v}$ , on obtient  $\Delta r = -4\pi \alpha r^2$ .
13. Le satellite se rapproche de la Terre sous le freinage de la force de frottement.
14. L'expression de la vitesse conduit à  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \frac{2\pi r}{T_0}$ . On en déduit la troisième loi de Kepler  $\frac{T_0^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ .
15. Avec les hypothèses proposées dans l'énoncé, on a  $T_0 dr = -4\pi \alpha r^2 dt$ . En utilisant la troisième loi de Kepler, on a  $dr = -2\alpha \sqrt{GM_T} r dt$ . En intégrant entre  $r_0$  et  $r$  pour une origine des temps en  $r_0$ , on en déduit

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} - \alpha \sqrt{GM_T} t \quad \text{soit} \quad K = -\alpha \sqrt{GM_T}.$$