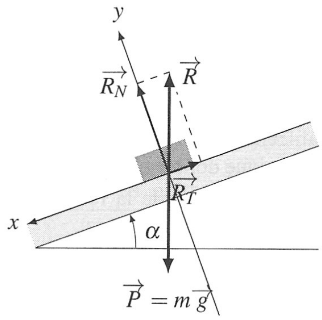
MC1 – Mécanique en référentiel galiléen

A – Travaux dirigés

MC11 - Palet sur un plan incliné

1. On étudie le mouvement du palet assimilé à un point M de masse m dans le référentiel terrestre galiléen.

Le palet est entraîné par son poids vertical et dirigé vers le bas $\vec{P} = m\vec{g}$. Il subit également la réaction du plan incliné $\vec{R}$. Le mouvement est plan.



2. On définit un repère cartésien (0,x,y) sur le schéma d'où :

$$m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow R_x = T = -mgsin\alpha \; et \; R_y = N = mgcos\alpha$$

La composante R_x est négative, ce qui est cohérent avec le fait que la force de frottement solide empêche le palet de glisser vers le bas. La composante R_y est positive et donc dirigé du plan vers le palet.

3. En l'absence de glissement, $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ d'où:

$$\left|\frac{T}{N}\right| < f \Leftrightarrow \tan\alpha < f \; donc \; \alpha < \alpha_m = Arctan(f)$$

4. Lorsque l'angle α est supérieur à α_m, le palet glisse et on utilise la loi de Coulomb relative au glissement : $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

Sous l'action du poids, la palet glisse vers le bas et donc vers les x croissants. La force de frottement solide est opposée au mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow m\ddot{x} = mgsin\alpha - |T| \; et \; 0 = N - mgcos\alpha$$

Donc : $m\ddot{x} = mgsin\alpha - |T| = mgsin\alpha - fmgcos\alpha$

$$= mgsin\alpha - tan\alpha_m . mgcos\alpha = m\ddot{x} = mgsin\alpha\left(1 - \frac{tan\alpha_m}{tan\alpha}\right) > 0$$

Ce qui prouve que le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré. On vérifie également que l'on obtient bien $\ddot{x} > 0$ puisque l'accélération doit manifestement être dirigée vers les x croissants.

MC12 - Résonance cyclotronique

1. Soit : $m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB_0\dot{x} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

La résolution selon l'axe Oz est la plus simple. Soit $\dot{z} = cste = \gamma a\omega_0 \Rightarrow z = \gamma a\omega_0 t$, la trajectoire n'est donc pas plane.

L'intégration des projections sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ donne : $m\dot{x} = qB_0y + C_1$ et $m\dot{y} = -qB_0x + C_2$

Les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = -a\omega_0$ donnent :

$$m\dot{x} = qB_0y \; et \; m\dot{y} = -qB_0x - ma\omega_0$$

On peut alors replacer ces expressions dans les membres de droite des équations fournies par le principe fondamental de la dynamique, soit :

$$\ddot{x} = \frac{qB_0}{m}\dot{y} = -\frac{q^2B_0^2}{m^2}x - \frac{qB_0}{m}a\omega_0$$

$$et \; \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m}\dot{x} = -\frac{q^2{B_0}^2}{m^2}y$$

Donc : $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ où $\omega_0 = \frac{qB_0}{m} \Rightarrow y(t) = A\,cos\,(\omega_0 t) + B\,sin\,(\omega_0 t)$

où A et B sont des constantes.

- $y(0) = 0$ $fournit$ $A = 0$.
- $\dot{y}(0) = -a\omega_0 \Rightarrow B = -a$.

Donc :

$$y(t) = -a\,sin\,(\omega_0 t)$$

Or :

$$\dot{x} = \frac{qB_0}{m}y = -\frac{qB_0}{m}a\,sin\,(\omega_0 t)$$

Donc :

$$x = \frac{qB_0}{m\omega_0}a\,cos\,(\omega_0 t) + C = a\,cos\,(\omega_0 t) + C$$

Or : $x(0) = a$ donc : $x(t) = a\,cos\,(\omega_0 t)$

2. On rajoute $q\vec{E}$ sur la première coordonnée d'où :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{qE_0}{m}cos(\omega t) = \varepsilon a\omega_0^2\,cos(\omega t) \text{ où } \omega_0 = \frac{qB_0}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{qE_0}{m} = \varepsilon a\omega_0^2 \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{qE_0}{ma\omega_0^2}$$

3. Donc : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \lambda\cos(\omega t)$

Où : $-\lambda\omega^2 + \omega_0^2\lambda = \varepsilon a\omega_0^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\varepsilon a\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$

De plus : $x(0) = a = A + \lambda \Leftrightarrow A = a - \lambda\ et\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$

Donc : $\frac{x}{a} = \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{a}\cos(\omega t) \Leftrightarrow \frac{x}{a} = (1-\mu)\cos(\omega_0 t) + \mu\cos(\omega t)$

Or : $\dot{y} = -\omega_0 x \Rightarrow \frac{y}{a} = -(1-\mu)\sin(\omega_0 t) - \frac{\mu\omega_0}{\omega}\sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = (1-\mu)\cos(\omega_0 t) + \mu\cos(\omega t) \\ \frac{y}{a} = -(1-\mu)\sin(\omega_0 t) - \frac{\mu\omega_0}{\omega}\sin(\omega t) \text{ où } \mu = \frac{\varepsilon\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}$$

4. Donc : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \lambda t\sin(\omega t)$

Or $\dot{x_p} = \lambda\sin(\omega t) + \lambda t\,\omega\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x_p} = 2\lambda\omega\cos(\omega t) - \lambda t\omega^2\sin(\omega t)$

D'où : $2\lambda\omega\cos(\omega t) - \omega_0^2\lambda t\sin(\omega t) + \omega_0^2\lambda t\sin(\omega t) = \varepsilon a\omega_0^2\cos(\omega t)$

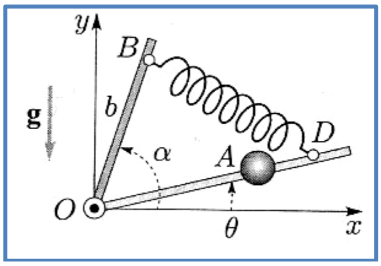
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\varepsilon a\omega_0}{2}$$

De plus : $x(0) = a = A \Leftrightarrow et\ \dot{x}(0) = B\omega_0 = 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \cos(\omega_0 t) + \frac{\lambda}{a}\, t\sin(\omega t)$$

5. Celui de gauche correspond au système non résonant. Celui de droite caractérise la résonance pour $\omega = \omega_0$. Il suffit de sélectionner $\omega=\omega_0$ pour une des particules et utiliser un diaphragme (ou un disque plein) pour réaliser la séparation…

MC13 - Sismographe de la Coste



1. Soit : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OD} \wedge k\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{OD} \wedge k\overrightarrow{OB}$

$= l\overrightarrow{u_r} \wedge mg(-sin\theta\overrightarrow{u_r} - cos\theta\overrightarrow{u_\theta}) + d\overrightarrow{u_r} \wedge kb(cos(\alpha - \theta)\overrightarrow{u_r} + sin(\alpha - \theta)\overrightarrow{u_\theta})$

Donc sur $\overrightarrow{u_z}$: $ml^2\ddot{\theta} = kdb\big(sin(\alpha - \theta)\big) - mglcos\theta$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}cos\theta = \frac{kdb}{ml^2}\big(sin(\alpha - \theta)\big)$$

2. Au repos : $\ddot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$ $d'o$ù :

$$\frac{g}{l} = \frac{kdb}{ml^2}sin(\alpha) \Leftrightarrow sin(\alpha) = \frac{mgl}{kdb}$$

3. Donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}cos\theta = \frac{kdb}{ml^2}\big(sin(\alpha - \theta)\big) = \frac{kdb}{ml^2}(sin\alpha cos\theta - cos\alpha sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}cos\theta = \frac{g}{l}cos\theta + \frac{g}{l.sin\alpha}(-cos\alpha sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{ltan\alpha}sin\theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{ltan\alpha}\theta = 0$$

Donc :

$$T_0 = 2\pi\left(\frac{ltan\alpha}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

AN : $tan(\alpha) = 1998 \Rightarrow \alpha = 89{,}97°$

MC14 - Voyage interplanétaire de la terre a mars

1) L'énergie du vaisseau spatial en D est $\mathscr{E} = \frac{1}{2}mv_D^2 - m\frac{GM_S}{R_T} = -m\frac{GM_S}{2a}$, où a est le demi grand-axe de l'ellipse de Hohman .

On en déduit $v_D^2 = 2GM_S\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2a}\right)$.

Sachant que $a = \frac{R_T + R_M}{2}$, on obtient :

$$v_D = \sqrt{2GM_S}\sqrt{\frac{R_M}{R_T(R_T + R_M)}}.$$

La vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique au départ est la même que celle de la Terre sur son orbite autour du Soleil, c'est-à-dire :

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}.$$

La vitesse v_D est donc égale à :

$$v_D = v_T\left(\sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}}\right) = 32,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

La variation de vitesse en D est :

$$\Delta v_D = v_D - v_T = v_T\left(\sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}} - 1\right) = 2,9 \text{ km.s}^{-1}.$$

Les moteurs fournissent l'énergie W égale à la différence d'énergie du vaisseau entre l'ellipse de Hohman et l'orbite de parking, soit :

$$\mathscr{E} = \left(-m\frac{GM_S}{2a}\right) - \left(-m\frac{GM_S}{2R_T}\right)$$

(d'après les hypothèses de l'énoncé, l'énergie du vaisseau sur l'orbite de parking dans le référentiel héliocentrique est égale à celle de la Terre dans ce même référentiel).

Tous calculs faits, on obtient :

$$W_D = \frac{mv_T^2}{2}\left(\frac{R_M - R_T}{R_T + R_M}\right) = 91,6.10^6\ m \text{ (en joules)}.$$

On remarque que $W_D > 0$: c'est normal car la nouvelle orbite est extérieure à la première.

2) La conservation du moment cinétique du vaisseau sur l'ellipse de Hohman, entre D et A , permet d'écrire

$v_A R_M = v_D R_T$, d'où $v_A = v_D\frac{R_T}{R_M} = 21,5 \text{ km.s}^{-1}$.

À l'arrivée sur Mars, la vitesse du vaisseau dans le référentiel héliocentrique est égale à celle de Mars donc à v_M .

La variation de vitesse à l'arrivée est donc :

$$\Delta v_A = v_M - v_T\frac{R_T}{R_M}\sqrt{\frac{2R_M}{R_T + R_M}} = 2,7 \text{ km.s}^{-1}.$$

Les moteurs fournissent l'énergie W_A :

$$W_A = \left(-m\frac{GM_S}{2R_M}\right) - \left(-m\frac{GM_S}{2a}\right) = \frac{mv_T^2}{2}\frac{R_T(R_M - R_T)}{R_M(R_M + R_T)}$$

$= 60,3.10^6\ m$ (en joules).

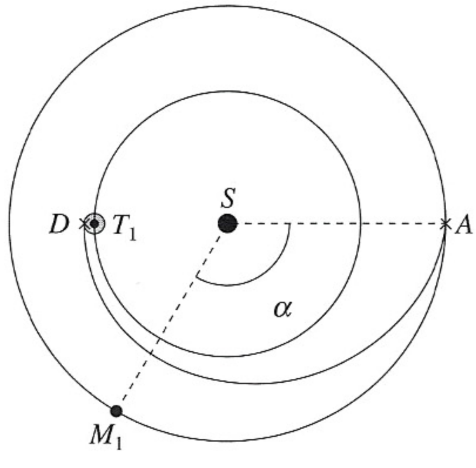
W_A est également positif, car on fait encore une fois passer le vaisseau sur une orbite extérieure.

3) La période du mouvement du vaisseau sur l'ellipse de Hohman vérifie $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{R_T^2}$, où T_0 est la période de rotation de la Terre autour du Soleil, c'est-à-dire 1 an. La durée τ du transfert étant égale à $\frac{T}{2}$,

on en déduit $\tau = \frac{1}{2}\left(\frac{R_T + R_M}{2R_T}\right)^{\frac{3}{2}} T_0 = 258$ jours .

4) La période de rotation de Mars autour du Soleil est $T_M = \left(\frac{R_M}{R_T}\right)^{\frac{3}{2}} T_0 = 684$ jours.

En 258 jours, l'angle dont a tourné la planète est $2\pi\frac{\tau}{T_M}$ = 135,8°, ce qui définit la position de Mars au départ du vaisseau.



B – Exercices supplémentaires

MC15 - Mouvement le long d'une came

1. Soit : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = c\dot{\theta}sin\theta\overrightarrow{u_r} + (b - c.cos\theta)\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = c\omega sin\theta\overrightarrow{u_r} + (b - c.cos\theta)\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

Et $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} =$

$$= (c\omega^2cos\theta - (b - c.cos\theta)\omega^2)\overrightarrow{u_r} + (0 + 2c\omega sin\theta.\omega)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \omega^2[(2c.cos\theta - b)\overrightarrow{u_r} + (2csin\theta)\overrightarrow{u_\theta}]$$

2. En $\pi/2$: $\vec{v} = c\omega\overrightarrow{u_r} + b\omega\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{a} = \omega^2[-b\,\overrightarrow{u_r} + (2c)\overrightarrow{u_\theta}]$

Donc $v = \omega\sqrt{c^2 + b^2} = 0{,}070 m/s$ et $a = \omega^2\sqrt{b^2 + 4c^2} = 0{,}28 m/s^2$

MC16 - Mouvement d'un point matériel sur une parabole

1) $x = r\cos\theta$ et $r^2 = x^2 + y^2$, or l'équation de la courbe peut s'écrire $a = \frac{r}{2}(1 + \cos\theta)$, donc :

$(2a - x)^2 = x^2 + y^2$ ou encore $y^2 = 4a(a - x)$.
C'est bien l'équation d'une parabole.

2) a) $v_r = \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = a\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}\dot{\theta}$

et $v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\dot{\theta}$.

Il reste à éliminer $\dot{\theta}$ en utilisant :

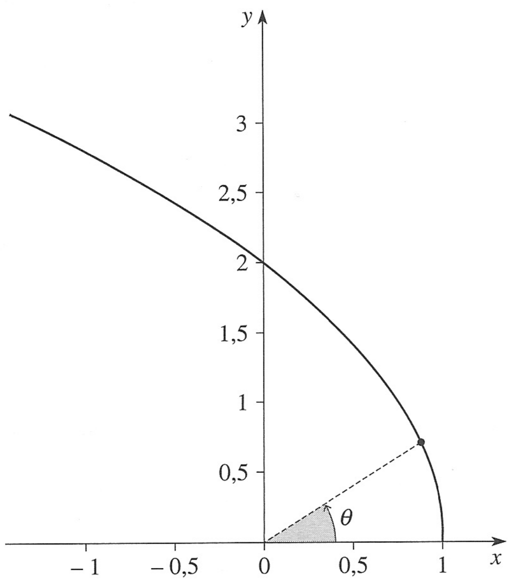
$$v = \mathrm{k}r = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = \frac{a\dot{\theta}}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$\theta \in\,]-\pi\,;+\pi[$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est positif et $\dot{\theta}$ est positif par hypothèse.
Donc $\dot{\theta} = \mathrm{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

et $v_r = \mathrm{k}a\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $v_\theta = \frac{\mathrm{k}a}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

b) $\dot{\theta} = \mathrm{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \mathrm{k}\,\mathrm{d}t$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\left|\tan\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = \mathrm{k}t + \mathrm{cte}.$$



$\theta \in\,]-\pi;+\pi[$ donc $\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \in\,]0;\frac{\pi}{2}[$
d'où sa tangente est positive.
Si $\theta = 0$ à $t = 0$, la constante est nulle.

MC17 – Sauvetage en mer

Le maître-nageur parcourt AM en $t_1 = \dfrac{AM}{v_1}$ et MB en $t_2 = \dfrac{MB}{v_2}$.

$AM = [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}$

$BM = [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}$

La durée totale du trajet est :

$T = t_1 + t_2$.

$T = \dfrac{1}{v_1}[(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2} + \dfrac{1}{v_2}[(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}$.

On cherche x tel que T soit minimale.

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \frac{x - x_A}{v_1[(x-x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}} + \frac{x - x_B}{v_2[(x-x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}} = 0$$

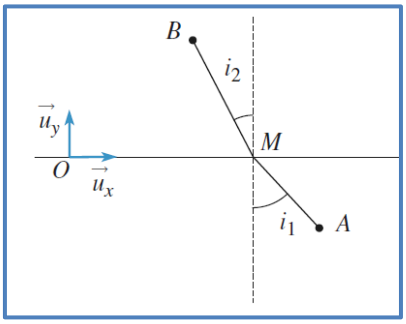
Soit $\dfrac{x - x_A}{v_1 AM} + \dfrac{x - x_B}{v_2 BM} = 0$ ①

Si on introduit i_1 et i_2, il vient :

$\sin i_1 = \dfrac{x_A - x}{AM}$ et $\sin i_2 = \dfrac{x - x_B}{BM}$.

① s'écrit alors $\dfrac{\sin i_1}{v_1} = \dfrac{\sin i_2}{v_2}$.

Remarque : la valeur de x trouvée correspond bien à un minimum pour T. La dernière relation écrite est analogue à la loi de Descartes pour la réfraction en optique : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



MC18 – Course automobile

1 • Nous avons :

$$x_A(t) = \frac{1}{2} a_A t^2 \text{ et } x_B(t) = \frac{1}{2} a_B (t - t_0)^2,$$

cette deuxième expression étant applicable à $t \geqslant t_0 = 1$ s.

Les deux voitures sont au même niveau à l'instant t_1, soit :

$$a_A t_1^2 = a_B (t_1 - t_0)^2$$

ce qui donne :

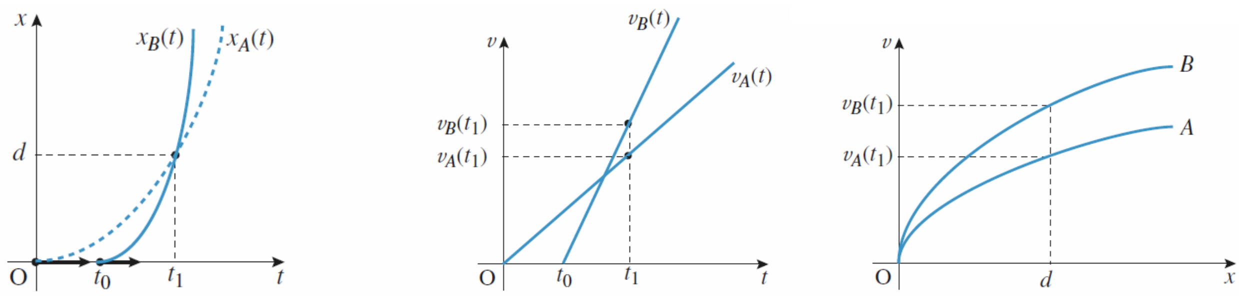
$$t_1 = t_0 . \frac{1}{1 - \sqrt{\dfrac{a_A}{a_B}}} \approx 9{,}5 \text{ s.}$$

2 • À l'instant t_1 :

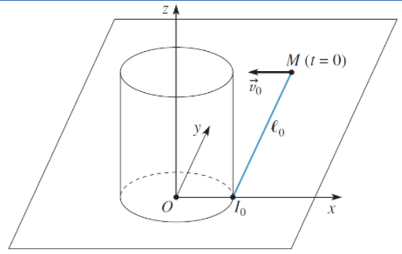
$$d = x_A(t_1) = x_B(t_1) = \frac{1}{2} a_A t_1^2 \approx 1{,}8 . 10^2 \text{ m.}$$

3 • $v_A(t_1) = a_A t_1 \approx 38$ m.s^{-1} et $v_B(t_1) = a_B(t_1 - t_0) \approx 42$ m.s^{-1}.

4 •

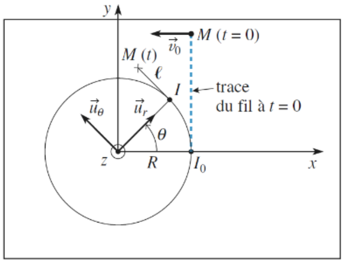


MC19 - Enroulement d'un fil sur un cylindre



Vue en perspective à l'instant t = 0

1. On a $l = l_0 - \widehat{II_0} = l_0 - R\theta$
2. Soit : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\overrightarrow{u_r} + l\overrightarrow{u_\theta} = R\overrightarrow{u_r} + (l_0 - R\theta)\overrightarrow{u_\theta}$
3. Donc $\vec{v} = 0\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + (0 - R\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + (l_0 - R\theta)\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$
$\Leftrightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + (-R\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + (l_0 - R\theta)(-\dot{\theta})\overrightarrow{u_r}$
$= -(l_0 - R\theta)(\dot{\theta})\overrightarrow{u_r}$



Vue de dessus à l'instant t

4. On a $\vec{v} = v\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_r} + v\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_r} + v\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \vec{T} + \vec{R} + \vec{P}$.

Le PFD sur $\overrightarrow{u_r}$ donne $ma_r = m\frac{dv}{dt} = 0$ donc v=cste

5. Donc : $\vec{v} = -(l_0 - R\theta)(\dot{\theta})\overrightarrow{u_r} \Rightarrow v = (l_0 - R\theta)(\dot{\theta}) > 0 = v_0$
6. On a : $(l_0 - R\theta)(\dot{\theta}) = v_0 \Leftrightarrow (l_0 - R\theta)d\theta = v_0 dt \Leftrightarrow l_0\theta - R\theta^2 = v_0 t + cste = v_0 t$

$$\Leftrightarrow \theta^2 - 2\frac{l_0}{R}\theta + \frac{2v_0 t}{R} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{l_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2 - \frac{2v_0 t}{R}} > 0$$

Comme θ croît : $\theta = \frac{l_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{l_0}{R}\right)^2 - \frac{2v_0 t}{R}} = \frac{l_0}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}\right)$.

7. Le fil est entièrement enroulé lorsque l=0 $\Leftrightarrow l_0 - R\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{l_0}{R} = 143°$

Donc : $\sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}} = 0 \Leftrightarrow l_0^2 = 2Rv_0 t \Leftrightarrow t = \frac{l_0^2}{2Rv_0} = 6{,}25 s$

8.
   a. Pour déterminer la tension du fil, on projette la relation fondamentale de la dynamique sur $\overrightarrow{u_\theta}$, en utilisant le fait que $\vec{v} = -v_0\,\overrightarrow{u_r} \Rightarrow \vec{a} = -\dot{\theta}v_0\overrightarrow{u_\theta}\ d'où :$

$$T = mv_0\dot{\theta} = mv_0\frac{d}{dt}\left(\frac{l_0}{R}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}}\right)\right) = mv_0^2/l_0\left(1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}\right)^{-1/2}$$

   b. On isole t et on obtient :

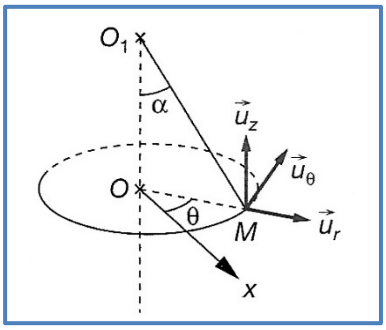
$$\left(\frac{l_0 T}{mv_0^2}\right)^2\left(1 - \frac{2Rv_0 t}{l_0^2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2Rv_0 t}{l_0^2} = -\left(\frac{mv_0^2}{l_0 T}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow t_{rup} = \frac{l_0^2}{2Rv_0}\left(1 - \left(\frac{mv_0^2}{l_0 T_{rup}}\right)^2\right) = 6{,}09\ s$$

On remplace la valeur de t_{rup} dans l'expression de Q6 :

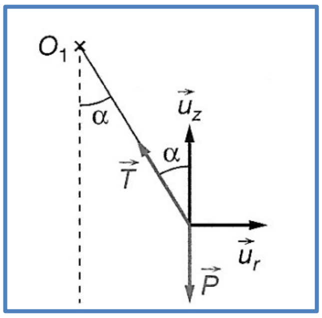
$\theta_{rup} = \frac{l_0}{R}\left(1 - \frac{mv_0^2}{l_0 T_{rup}}\right) = 2{,}1\ rad = 120° < 143°$ (Cela casse avant l'enroulement complet)

MC110 - Pendule en rotation



1. La trajectoire étant un cercle (de rayon r = l sin α), des coordonnées cylindriques semblent adaptées. La position du pendule sur le cercle est repérée par l'angle θ.

2. Les actions mécaniques sur la bille sont son poids mg et la tension T du fil,



Soit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$.

En projection sur l'axe radial : $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -mlsin\alpha\omega^2 = -Tsin\alpha$

Sur l'axe Oz : $0 = -mg + Tcos\alpha$

3. En éliminant T, on aboutit à :

$$-mlsin\alpha\omega^2 = -Tsin\alpha \Leftrightarrow ml\omega^2 = T = mg\frac{1}{cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \omega^2 = g\frac{1}{l\,cos\alpha} \geq \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

4. Si ω devient très important, cos α tend vers 0, soit α tend vers π/2. La ficelle devient effectivement quasi horizontale.

5. On a : $\omega = 3\ 2\pi = 19\ rad.s^{-1}$, d'où α=82°

MC111 - Expérience de Millikan

1. $Soit\ :\ m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - M\vec{g} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)\vec{g} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{v}_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)g\tau$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \left(1 - \frac{M}{m}\right)g\frac{m}{\lambda} = (m - M)\frac{g}{\lambda} = \frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho')\frac{g}{6\pi\eta R}$$

$$\Leftrightarrow v_{lim} = \frac{2g}{9\eta}R^2(\rho - \rho')$$

2. Calcul du coefficient de viscosité

   On suppose la vitesse limite atteinte rapidement d'où :

$$v_{lim} = \frac{h}{\Delta t} = 3{,}8.10^{-4} m \cdot s^{-1} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{9\eta v_{lim}}{2g(\rho - \rho')}} = 1{,}8\mu m$$

3. $Soit\ :\ m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - M\vec{g} - \lambda\vec{v} + \frac{qU}{l}(-\overrightarrow{u_z})$ (opposé au poids)

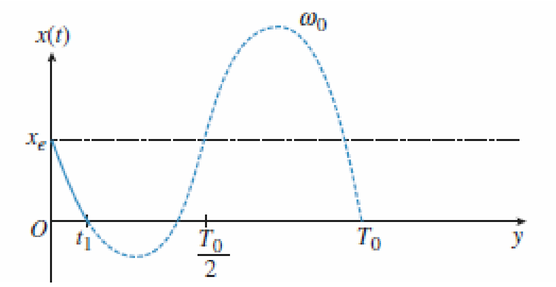
$$\Rightarrow v_{lim2} = (m - M)\frac{g}{\lambda} - \frac{qU}{l\lambda} = \frac{2g}{9\eta}R^2(\rho - \rho') - \frac{qU}{l\lambda}$$

4. On a $v_{lim2} = 0 \Rightarrow q = \frac{2gl6\pi\eta R}{9\eta U}R^2(\rho - \rho') = \frac{4\pi gl}{3U}R^3(\rho - \rho') = 5{,}510^{-19}C = 3e$

5. Trouvez une valeur de la charge élémentaire

MC112 - Oscillateur harmonique quelconque

1.



À l'équilibre, les forces qui agissent sur m sont l'action du ressort, le poids et la réation du support, parallèle à Oy en l'absence de frottements.

En projection sur Ox : $0 = -k(x_e - L_0) + mg \sin \alpha$.

Au cours du mouvement : $m\ddot{x} = -k(x - L_0) + mg \sin \alpha$

$m\ddot{x} = -k(x - x_e)$.

En introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient :

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e$.

d'où $x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_e$.

A $t = 0$ $x(0) = A + x_e = x_e$ $\quad A = 0$

$\dot{x}(0) = B\,\omega_0 = -v_0 \quad B = -\frac{v_0}{\omega_0}$

Donc $x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_e$.

2.

$x(t)$ peut s'annuler si $x_e - \frac{v_0}{\omega_0} < 0$

$v_0 > x_e \omega_0$.

On a impact en O à t_1 avec $t_1 < \frac{T_0}{4}$. $\quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\sin \omega_0 t_1 = \frac{\omega_0 x_e}{v_0}$ soit $t_1 = \frac{1}{\omega_0}$ Arc sin$\frac{\omega_0 x_e}{v_0}$.

La vitesse au moment du choc vérifie :

$\dot{x}(t_1) = -v_0 \cos \omega_0 t_1$.

$$\dot{x}(t_1) = -v_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2 x_e^2}{v_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

MC113 - Résistance de l'air - Cas quadratique

1. Soit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + kmv^2\frac{\vec{g}}{g} \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{kv^2}{g}\vec{g} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + kv^2 = -g$

$$\Leftrightarrow dv = (-g - kv^2)dt \Leftrightarrow \frac{dv}{g + kv^2} = -dt$$

$$Or\ g = k\lambda^2 \Rightarrow \frac{dv}{\lambda^2 + v^2} = -kdt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}Arctan\left(\frac{v}{\lambda}\right) + cste = -kt \Rightarrow Arctan\left(\frac{v}{\lambda}\right) = -kt\lambda + \phi$$

$$\Rightarrow v = \lambda tan(-kt\lambda + \phi)\ avec\ v_0 = \lambda tan(\phi)$$

2. On a $z = \int vdt = \int \lambda tan(-kt\lambda + \phi)dt = \frac{1}{k}Ln|cos(-kt\lambda + \phi)| + cste$

Or $z(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{k}Ln|cos(\phi)| + cste = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{k}Ln\left|\frac{cos(-kt\lambda+\phi)}{cos(\phi)}\right|$

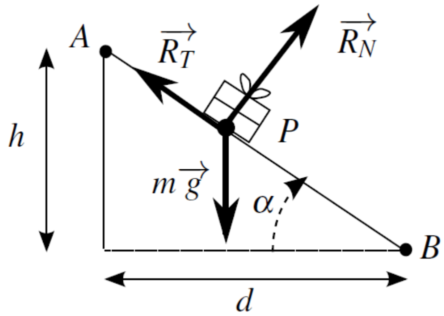
3. Lorsque v=0 on a : $-kt\lambda + \phi = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{k}Ln\left|\frac{1}{cos(\phi)}\right| = \frac{1}{k}Ln\left|\sqrt{1 + tan^2\phi}\right|$

D'où : $z_M = \frac{1}{k}Ln\left|\sqrt{1 + tan^2\phi}\right| = \frac{1}{k}Ln\left|\sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{\lambda}\right)^2}\right| = 346m$

Et sans frottement : $z_M = \frac{v_0^2}{2g} = 744m.$

MC114 – Toboggan

1. Le référentiel lié au sol est galiléen. On définit le repère A, AX, AY comme sur la figure (15.25). Les forces s'exerçant sur P sont le poids, la réaction normale et la réaction tangentielle.



On écrit la relation fondamentale de la dynamique : $m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{R_N}$. La force $\overrightarrow{R_T}$ est une force de frottement donc elle s'oppose au mouvement. Les forces sont représentées sur la figure (15.25). Les projections sur AX et AY donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{X} &= mg\sin\alpha - R_T \\ m\ddot{Y} &= -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

où g, R_T et R_N sont les normes des vecteurs correspondants. Or $Y = cte$ donc $\ddot{Y} = 0$ soit $R_N = mg\cos\alpha$. On en déduit $R_T = fmg\cos\alpha$. On reporte dans l'équation sur AX et on intègre :

$$\ddot{X} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = gt(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \text{cte}$$

La constante est nulle car la vitesse initiale est nulle puis :

$$X = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha) + \text{cte}$$

La constante est nulle car $X(0) = 0$.
La position du point B correspond à $X = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, donc B est atteint en un temps t_B tel que :

$$h = \frac{gt_B^2}{2}(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad t_B = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - f\cos\alpha)}}$$

Puisque $h = d$, l'angle α vaut $\pi/4$ soit $t_B = 1{,}8$ s.

2. Le chariot reste immobile $\delta t = 1$ s, il faut donc que le paquet parte au plus tard à $t_2 = t_B - \delta t = 0{,}8$ s avant l'arrivée du chariot et au plus tôt $t_B = 1{,}8$ s avant l'arrivée.
On calcule l'instant t_a d'arrivée du chariot en C_B : $t_a = C_0C_B/v_c = 4$ s. Le joueur doit donc lâcher le paquet entre 2,2 s et 3,2 s.

MC115 – Atterrissage d'urgence

1. On étudie le mouvement de l'avion dans le référentiel lié à la piste d'atterrissage galiléen. Ce mouvement est horizontal selon la direction de la piste repérée par l'axe (Ox).

a. On assimile le mouvement de l'avion à celui de son centre de gravité M de masse m. L'étude cinématique du mouvement de M donne :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}.$$

Les forces s'exerçant sur l'avion sont : le poids, la réaction normale de la piste et la force de traînée T due au parachute. La seule force horizontale est donc T. La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur (Ox) donne donc :

$$m\ddot{x} = -T = -k\dot{x}^2 \quad \text{avec} \quad k = C_x\rho S/(2m)$$

b. Pour intégrer l'équation du mouvement on sépare les variables, soit en notant $v = \dot{x}$:

$$\frac{\dot{v}}{v^2} = -k \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} = -kt + \text{cte}$$

or à $t = 0$, $v = v_a$: $\dfrac{1}{v} = kt + \dfrac{1}{v_a} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{v_a}{v_a kt + 1}$.

c. L'avion s'arrête si la vitesse devient nulle, or d'après l'expression précédente la vitesse tend vers 0 au bout d'un temps infini. Cette force n'est pas suffisante pour stopper l'avion.

2. On obtient l'expression de la position de l'avion en intégrant l'expression précédente de la vitesse et en prenant $x(0) = 0$:

$$x = \frac{1}{k}\ln(v_a kt + 1) + \text{cte} \quad \text{soit} \quad x = \frac{1}{k}\ln(v_a kt + 1) \quad \Leftrightarrow \quad v_a kt + 1 = \exp(kx)$$

d'où la vitesse à la distance d : $v = v_a \exp(-kd) = 24{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ soit une vitesse de $89{,}6\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, d'où l'utilité des freins.

MC116 - Mouvement d'une perle sur une hélice

1. Soit $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$

$$= \frac{1}{2}m\left(\left(-R\sin\theta.\dot{\theta}\right)^2 + \left(R\cos\theta.\dot{\theta}\right)^2 + p^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(R^2 + p^2)\dot{\theta}^2$$

2. On a donc : $E_p = mgz + C = mgp\theta + C$Calculer son énergie potentielle.

3. Soit : $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow (R^2 + p^2)\ddot{\theta}\dot{\theta} + \text{gp}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\text{gp}}{(R^2+p^2)} = 0$

Donc :

$$\theta = -\frac{1}{2}\frac{\text{gp}}{(R^2 + p^2)}t^2 + \dot{\theta}_0 t + \theta_0 \Rightarrow \theta = -\frac{1}{2}\frac{\text{gp}}{(R^2 + p^2)}t^2 + \theta_0$$

MC117 - Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

1. Soit l'énergie potentielle :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l_0 + x - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(l_0 - x - l_0)^2 - mgz + C = kx^2 - mgz + C$$

Donc :

$$E_p = k(l sin\theta)^2 - mg(l cos\theta) + C$$

Utilisons les formules d'approximation pour les petits angles :

$$E_p = k(l\theta)^2 - mgl + \frac{mgl\theta^2}{2} + C = \theta^2\left(\left(\frac{mgl}{2}\right) + kl^2\right) + C - mgl$$

Soit E_p=0 pour θ=0 d'où :

$$E_p = \theta^2\left(\left(\frac{mgl}{2}\right) + kl^2\right)$$

2. Soit :

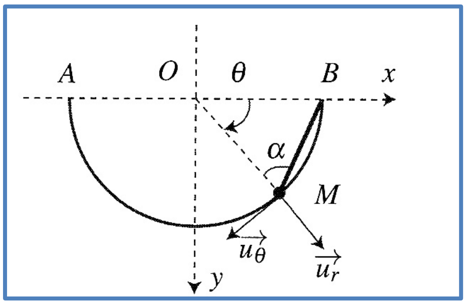
$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow 2 * \frac{1}{2}ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + 2 * \theta\dot{\theta}\left(\left(\frac{mgl}{2}\right) + kl^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * \frac{2}{ml^2}\left(\left(\frac{mgl}{2}\right) + kl^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * \left(\left(\frac{g}{l}\right) + \frac{2k}{m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \theta * (\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \text{ où : } \omega_1^2 = \frac{g}{l} \text{ et } \omega_2^2 = \frac{2k}{m}$$

MC118 - Mouvement d'une bille reliée à un ressort sur un cercle



1. Le triangle OMB est isocèle en O donc les angles des sommets B et M sont égaux. Par ailleurs, la somme des angles d'un triangle vaut π. En explicitant ces deux conditions, on obtient :

$$\alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$$

2. Pour calculer la distance MB, on détermine son carré :

$$MB^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 cos\theta$$
$$= 2R^2(1 - cos\theta) = 4R^2 sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Donc : $MB = 2R\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$

3. Les forces qui s'appliquent sur le système sont conservatives (poids, force de rappel élastique) ou à puissance nulle (réaction du cerceau). On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique. On détermine l'énergie potentielle dont dérive le poids :

$$E_{pp} = mgy = -mgRsin\theta$$

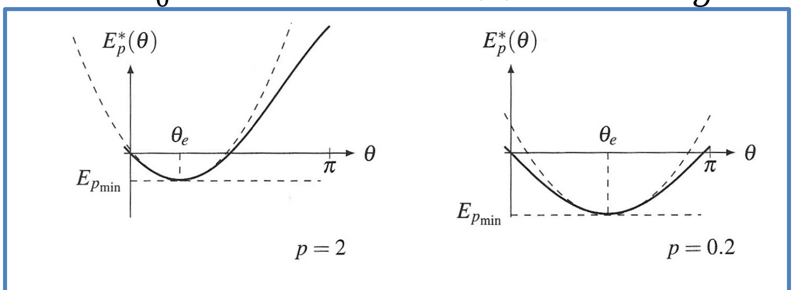
Puis l'énergie potentielle élastique : $E_{pe} = \frac{1}{2}kMB^2 = 2kR^2 sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

Donc :

$$E_p = -mgRsin\theta + 2kR^2 sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Pour la représenter, on remarque que θ ne peut varier qu'entre 0 et π et on fixe $E_o = mgR$ comme échelle d'énergie. On trace l'énergie potentielle sans dimension pour deux valeurs de p :

$$\frac{E_p}{E_0} = -sin\theta + p\, sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ où } p = \frac{2kR}{mg}$$



Tracé de l'énergie potentielle pour deux valeurs de p.

L'énergie potentielle présente un minimum en θ_e entre 0 et π. La position de coordonnée θ_e, est donc une position d'équilibre stable que l'on peut déterminer en recherchant le point d'annulation de la dérivée :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow -cos\theta_e + psin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) cos\left(\frac{\theta_e}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -cos\theta_e + \frac{p}{2}sin(\theta_e) = 0 \Leftrightarrow tan(\theta_e) = \frac{2}{p} = \frac{mg}{kR}$$

La position d'équilibre est, comme on pouvait s'y attendre comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Elle tend vers 0 lorsque la raideur du ressort est si grande que le poids de M ne peut pas l'étirer et vers $\frac{\pi}{2}$ lorsqu'elle est si faible que le poids de M l'étire facilement.

4. Si l'on écarte la bille de sa position d'équilibre stable et qu'on la lâche sans vitesse initiale, la bille va osciller dans le puits de potentiel. Si on l'en écarte faiblement, on s'attend à observer des oscillations harmoniques, tout se passant comme si la bille oscillait dans le potentiel harmonique tangent dessiné en pointillé sur la figure ci-dessus.

5. L'énergie cinétique du système vaut $E_c = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$ puis l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgRsin\theta + 2kR^2sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Le mouvement étant conservatif, l'énergie mécanique est conservée et sa dérivée s'annule :

$$mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgRcos\theta\,\dot{\theta} + 4kR^2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(cos\theta - \frac{4kR}{mg}sin\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(cos\theta - \frac{p}{2}sin\theta\right) = 0$$

6. On écarte M de sa position d'équilibre et on pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$ puis :

$$\begin{cases} cos\theta = \cos(\theta_e + \varepsilon) = cos\theta_e cos\varepsilon - sin\theta_e sin\varepsilon \sim cos\theta_e - \varepsilon \times sin\theta_e \\ sin\,\theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = sin\theta_e cos\varepsilon + cos\theta_e sin\varepsilon \sim sin\theta_e + \varepsilon \times cos\theta_e \end{cases}$$

On injecte alors ces relations dans l'équation du mouvement et on trouve :

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\left(cos\theta_e - \varepsilon sin\theta_e - \frac{p}{2}sin\theta_e - \frac{p}{2}\varepsilon cos\theta_e\right) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\left(-cos\theta_e + \frac{p}{2}sin\theta_e + \varepsilon\left(sin\theta_e + \frac{p}{2}cos\theta_e\right)\right) = 0$$

Or : $-cos\theta_e + \frac{p}{2}sin(\theta_e) = 0$

Donc :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g\left(sin\theta_e + \frac{p}{2}cos\theta_e\right)}{R}\varepsilon = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\varepsilon = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{g\left(sin\theta_e + \frac{p}{2}cos\theta_e\right)}{R}$$

Comme prévu, le mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est celui d'un oscillateur harmonique.

MC119 – Montagnes russes

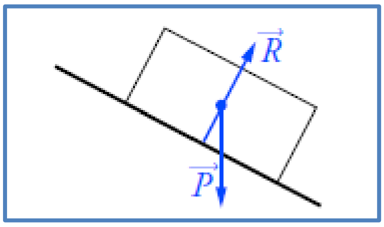
1. Référentiel : galiléen terrestre.

• Système étudié : chariot de masse m, de centre d'inertie G.

• Inventaire des forces appliquées au chariot :

– son poids $\vec{P}$;

– la réaction normale au support $\vec{R}$.



a. Appliquons le théorème de l'énergie cinétique au chariot entre l'état initial (G en A ; $\overrightarrow{v_A} = \vec{0}$) et l'état final ($G$ en H ; $\overrightarrow{v_H} = \vec{0}$).

À tout instant, $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement : $W_{A\to H}(\vec{R}) = 0$.

$\vec{P}$ est une force constante : $W_{A\to H}(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AH}$.

$E_c(H) - E_c(A) = 0 = \vec{P}.\overrightarrow{AH}$. Deux solutions sont possibles :

• soit H est en A mais alors G est immobile : solution sans intérêt ;

• soit $\vec{P}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AH}$, H est à la même hauteur que A : $h_1 = h$.

b. $\vec{P}$ est une force conservative. Avec le repère de $(O ; \vec{i}, \vec{k})$ de la figure ci-contre et en prenant la référence d'énergie potentielle en $z = 0$:

$$E_p(z) = m.g.z \quad \text{et} \quad E_m = E_p + \frac{1}{2}m.v^2 ;$$

soit :
$$E_m(z) = \frac{1}{2}m.v^2 + m.g.z.$$

Appliquons le théorème de l'énergie mécanique entre les états initial et final :
$$m.g.z_H - m.g.z_A = W_{A\to H}(\vec{R}) = 0 ;$$
d'où :
$$z_A = z_H \text{, soit } h = h_1.$$

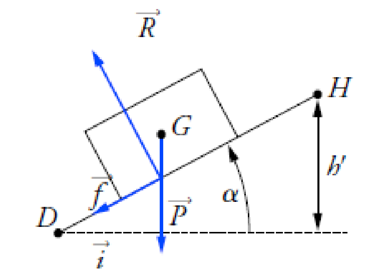
On obtient le même résultat.

2. Dans l'inventaire des forces, il faut ajouter la force de frottement pour la portion (DE).

Gardons le même référentiel, le même état initial et final.

$\vec{f}$ est une force constante sur (DH), donc $W_{D\to H}(\vec{f}) = \vec{f}.\overrightarrow{DH}$.

$\vec{f}$ et $\overrightarrow{DH}$ ont même direction, mais sont de sens opposés. Ils font donc entre eux un angle de π radians. Par ailleurs : $h' = DH.\sin\alpha$.



On voit sur la figure que :

– $h' = DH \sin\alpha$;

– l'angle $(\vec{f}, \overrightarrow{DH})$ est égal à π.

Donc :
$$\vec{f}.\overrightarrow{DH} = -f.\frac{h'}{\sin\alpha}.$$

a. $E_c(H) - E_c(A) = 0 = \vec{P}.\overrightarrow{AH} + \vec{f}.\overrightarrow{DH}$.

$$\vec{P}.\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m.g \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_H - x_A \\ z_H - z_A \end{pmatrix} = -m.g.(z_H - z_A) = -m.g.(h' - h).$$

D'où :
$$f = \frac{m.g.(h-h').\sin\alpha}{h'} ; \text{ soit } \boldsymbol{f = 40\ \text{N}}.$$

b. En utilisant le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m(H) - E_m(A) = (E_c(H) + m.g.z_H) - (E_c(A) + m.g.z_A)$$
$$= m.g.z_H - m.g.z_A ;$$
$$m.g.z_H - m.g.z_A = m.g(h' - h) = W_{A\to H}(\vec{R}) + W_{D\to H}(\vec{f})$$
$$= -f\frac{h'}{\sin\alpha}.$$

On retrouve le même résultat.

MC120 - Point mobile à l'intérieur d'un cône

1. Cas d'un mouvement circulaire et uniforme.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la loi de la dynamique appliquée au point M s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

La projection de cette expression dans la base cylindro-polaire s'écrit :

(1) suivant $\vec{u}_r$: $m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -N\cos\alpha$

(2) suivant $\vec{u}_\theta$: $m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = 0$

(3) suivant $\vec{u}_z$: $m\ddot{z} = N\sin\alpha - mg$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme on a :

$r = cte \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = cte \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$z = cte \Rightarrow \dot{z} = 0$ et $\ddot{z} = 0$

Les équations précédentes s'écrivent maintenant :

$(1') : mr\omega^2 = N\cos\alpha \;\Rightarrow\; N = \dfrac{mr\omega^2}{\cos\alpha}$

$(2') : r^2\dot{\theta} = Cte$

$(3') : N\sin\alpha - mg = 0 \;\Rightarrow\; N = \dfrac{mg}{\sin\alpha}$

Le rapport des équations (3') et (1') donne :

$\dfrac{mg}{\sin\alpha}\dfrac{\cos\alpha}{mr\omega^2} = 1$ comme $r = a$ on obtient :

$$\tan\alpha = \frac{g}{a\omega^2} = \frac{\omega_o^2}{\omega^2} = \frac{1}{\lambda_o^2}$$

$$\lambda_o = \frac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}$$

2. Expression de la constante.

D'après l'équation (2') : $r^2\dot{\theta} = Cte$

On détermine l'expression de la constante en utilisant les conditions initiales :

$$r(t=0)^2\,\dot{\theta}(t=0) = a^2\omega = a^2\lambda\omega_o = Cte$$

On reconnait ici la loi des aires : en effet dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ le mouvement est à force centrale $-N\cos\alpha\vec{u}_r$.

3. Equation différentielle.

On exprime l'énergie mécanique de la particule :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz = \text{constante}$$

Or : $z = \dfrac{r}{\tan\alpha}$; $r^2\dot{\theta} = a^2\lambda\omega_o \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \left(\dfrac{a^2\lambda\omega_o}{r^2}\right)^2$ et $\lambda_o = \dfrac{1}{\sqrt{\tan\alpha}}$

Ces relations permettent d'éliminer de l'intégrale première de l'énergie la dépendance en z et $\dot{\theta}$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{a^2\lambda\omega_o}{r^2}\right)^2 + \frac{\dot{r}^2}{\tan^2\alpha}\right) + \frac{mgr}{\tan\alpha} = \text{constante}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right) + \frac{1}{r^2}a^4\lambda^2\omega_o^2\right) + \frac{mgr}{\tan\alpha} = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right) + \frac{1}{2r^2}a^4\lambda^2\omega_o^2 + gr\lambda_o^2 = \frac{\text{constante}}{m}$$

Comme $g = a\omega_o^2$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{1}{2}\dot{r}^2\left(1+\lambda_o^4\right)}_{\text{Energie cinétique suivant } r} + \underbrace{a^2\omega_o^2\left(\frac{1}{2}\frac{a^2\lambda^2}{r^2} + \lambda_o^2\frac{r}{a}\right)}_{\text{Energie potentielle dite effective } E_{p\,eff}} = Cte'$$

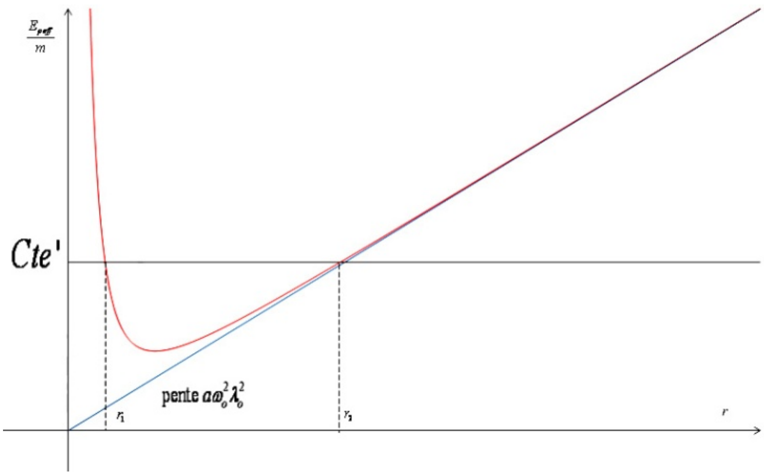
$$E_{p\,eff} = a^2\omega_o^2\left(\frac{1}{2}\frac{a^2\lambda^2}{r^2} + \lambda_o^2\frac{r}{a}\right)$$

$$r\to\infty \quad E_{p\,eff} = a^2\omega_o^2\lambda_o^2\frac{r}{a} = a\omega_o^2\lambda_o^2 r$$

$$r\to 0 \quad E_{p\,eff}\to\infty$$

On recherche les extremums de la fonction $E_{p\,eff}$:

$$\frac{dE_{p\,eff}}{dr} = a^2\omega_o^2\left(-\frac{1}{2}a^2\lambda^2\frac{2}{r^3} + \frac{\lambda_o^2}{a}\right) = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{\lambda}{\lambda_o}\right)^{2/3}$$



On peut déduire de cette étude graphique que : $r_1 \le r \le r_2$.

4. Evolution de *r*.

Comme à $t = 0$, $\dot{r}(0) = 0$ pour $r = a$, l'une des deux positions limites r_1 ou r_2 doit être égale à a.

D'autre part comme la position d'équilibre $r = a\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_o}\right)^{2/3}$ est nécessairement comprise entre r_1 et r_2, on peut en déduire que si :

$\lambda > \lambda_o \Rightarrow r_1 = a$ et $r_2 > a$

$\lambda < \lambda_o \Rightarrow r_2 = a$ et $r_1 < a$

MC121 – Bille dans une gouttière

Le référentiel lié au sol est galiléen. Les forces s'appliquant au système M sont le poids (force conservative) et la réaction du support $\overrightarrow{R}$ (force de travail nul).

1. Le poids est conservatif et la réaction normale ne travaille pas. On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m(A) = E_m(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_A^2 + mgy_A = \frac{1}{2}mv_O^2 + mgy_O,$$

soit puisque $v_A = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_O^2 = mg(y_A - y_O) = mgh \quad \Rightarrow \quad v_O = \sqrt{2gh}.$$

Pour calculer la vitesse en un point M quelconque du cercle. On repère M par sa coordonnée angulaire θ et on reprend le même raisonnement entre O et M. D'après la figure (16.11), l'altitude de M est $z = a(1-\cos\theta)$. On obtient alors :

$$v_m = \sqrt{2(h + a(\cos\theta - 1))}.$$

2. Pour déterminer la réaction, on fait l'hypothèse que la bille reste en contact avec la gouttière. Dans ce cas, son mouvement est circulaire et on utilise les relations cinématiques :

$$\overrightarrow{CM} = a\overrightarrow{u_r} \quad ; \quad \overrightarrow{v} = a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \quad ; \quad \overrightarrow{a} = -\frac{v^2}{a}\overrightarrow{u_r} + a\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

On applique alors la relation fondamentale de la dynamique en projection sur $\overrightarrow{u_r}$ soit :

$$-m\frac{v^2}{a} = -R + mg\cos\theta.$$

En utilisant la vitesse v_M calculée précédemment, on obtient la réaction en M :

$$R = mg\left(3\cos\theta + 2\frac{h}{a} - 2\right).$$

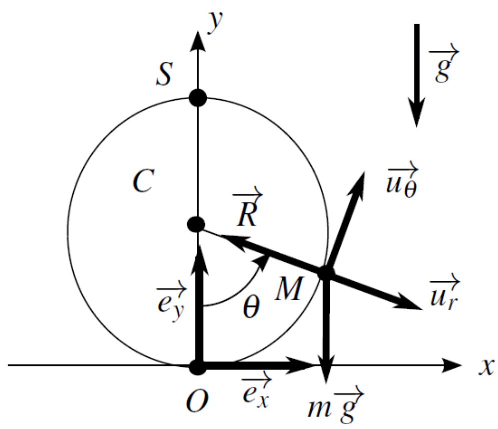


Figure 16.11

3. Pour que la bille ait un mouvement révolutif, il faut que la réaction ne s'annule en aucun point du cercle. Son expression montre qu'elle est minimale en $\theta = \pi$ (au sommet S du cercle). On souhaite donc que $R(\theta = \pi) > 0$ soit :

$$mg\left(-3 + 2\frac{h}{a} - 2\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad h > \frac{5}{2}a.$$

Il faut donc lâcher la bille d'une hauteur 2,5 fois supérieure à celle de S pour que la bille puisse faire un tour en étant plaquée sur la piste.

MC122 - Déflexion électrique

1. On néglige la force de pesanteur devant la force électrostatique. Si l'on note $\overrightarrow{E}$ le champ électrostatique, la force subie par la charge est $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$. Dans le cas d'un champ uniforme, ce qui est le cas d'un condensateur plan, la relation générale $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ devient ici par intégration $\overrightarrow{E} = -\frac{U}{d}\overrightarrow{u_x}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{F} = -q\frac{U}{d}\overrightarrow{u_x}$$

2. a) On applique la relation fondamentale de la dynamique à l'électron : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$. La force n'a pas de composante sur Oy et comme la vitesse initiale n'a pas de composantes non plus sur Oy on en déduit que le mouvement est dans le plan xOz. La projection de la relation fondamentale avec l'expression de $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{E}$ et les intégrations successives donnent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -q\dfrac{U}{d} \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{q}{m}\dfrac{U}{d}t(+cte_1) \\ \dot{z} = cte_2 = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{q}{m}\dfrac{U}{d}\dfrac{t^2}{2}(+cte_3) \\ z = v_0 t(+cte_4) \end{cases}$$

Les constantes entre parenthèses (cte_1, cte_3, cte_4) sont déterminées nulles grâce aux conditions initiales.

En éliminant t entre les équations paramétriques en x et z, on obtient :

$$x = -\frac{q}{m}\frac{U}{d}\frac{z^2}{2v_0^2} = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{z^2}{2v_0^2}$$

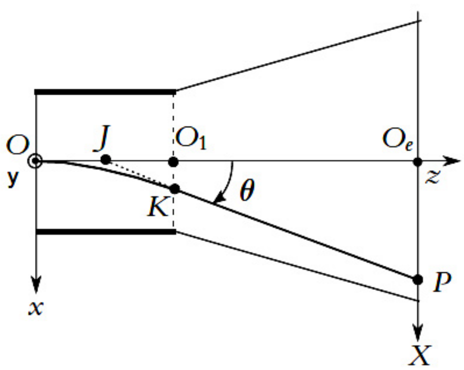
Il s'agit d'une parabole.

b) Le point de sortie correspond à $z_K = D$, soit dans l'équation précédente $x_K = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D^2}{2v_0^2}$. D'après les équations paramétriques obtenues à la question (a), l'instant de passage en K est $t_K = z_K/v_0$ soit D/v_0. les composantes de la vitesse en K sont obtenues en reportant t_K dans $\dot{x}$ et $\dot{z}$, soit :

$$\begin{cases} \dot{x}_K = \dfrac{e}{m}\dfrac{U}{d}\dfrac{D}{v_0} \\ \dot{z}_K = v_0 \end{cases}$$

c) En dehors des plaques, puisqu'on néglige l'effet du champ de pesanteur et que l'on suppose le champ électrique nul, aucune force ne s'exerce sur l'électron : sa trajectoire est donc rectiligne uniforme (principe d'inertie dans un référentiel galiléen). On obtient aussi ce résultat par intégration de $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$.

d) Dans le triangle O_eJP (figure S52.1), $X_P = O_eP = (JO_1 + L)\tan\theta$. Il faut donc exprimer $\tan\theta$ et JO_1 sachant que le segment JP est tangent à la parabole en K. On peut écrire :



$$\tan\theta = \frac{O_1K}{JO_1} = \frac{x_K}{JO_1} = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D^2}{2v_0^2}\frac{1}{JO_1}$$

et

$$\tan\theta = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)_K = \left(\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\right)_K = \frac{e}{m}\frac{U}{d}\frac{D}{v_0^2}$$

En combinant les deux équations, on trouve (c'est d'ailleurs une propriété de la parabole) que $JO_1 = D/2$ et donc :

$$X_P = \left(\frac{D}{2} + L\right)\frac{eD}{mdv_0^2}\,U$$

La déviation est proportionnelle à la tension U.

MC123 - Mouvement de gouttelettes chargées

1. On étudie la gouttelette assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire galiléen.

a. Cette gouttelette est soumise à : son poids, la poussée d'Archimède (opposée du poids du volume d'air déplacé) aux frottements. Le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) appliquée à une goutte donne :

$$m\vec{a} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_h \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a \vec{g} - k\vec{v}.$$

La vitesse limite est obtenue lorque l'accélération devient nulle :

$$\vec{v_0} = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{k}(\rho_h - \rho_a)\vec{g} \simeq \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{k}\rho_h \vec{g} \simeq \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{1}{\alpha}\rho_h \vec{g}$$

b. On peut réécrire le P.F.D avec $\vec{v_0}$:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = k(\vec{v_0} - \vec{v}) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v_0}}{\tau},$$

où l'on a défini le temps caractéristique $\tau = m/k$.
La solution de cette équation différentielle est :

$$\vec{v}(t) = \vec{A}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \vec{v_0}.$$

A $t = 0$ la vitesse est nulle donc $\vec{0} = \vec{A} + \vec{v_0}$. On en déduit l'expression finale de $\vec{v}$:

$$\vec{v}(t) = \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)\vec{v_0}.$$

c. Application numérique : avec l'expression de $\vec{v_0}$ on trouve $R = 1,13.10^{-6}$ m.

2. **a.** Le champ électrique $\vec{E}$ étant dirigé vers le bas, on l'écrit $\vec{E} = -E\vec{u_z}$ avec $E > 0$. Or, le champ électrique est suivant les potentiels décroissants, on en déduit que $V_1 > V_2$ et $U > 0$. Par ailleurs, $\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$ d'où on tire :

$$\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u_z}.$$

b. La force électrique s'exerçant sur la goutte est $\vec{F} = q\vec{E}$ avec $q < 0$. A l'équilibre, la force de frottement est nulle, donc la force électrique équilibre le poids et la poussée d'Archimède :

$$\vec{0} = q\vec{E} + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_a)\vec{g} \;\Rightarrow\; 0 = -q\frac{U}{d} - \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_a)g$$

d'où :

$$q = -\frac{d}{U}\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_h - \rho_a)g \;\Rightarrow\; q = -4,8.10^{-19}\ \text{C}.$$

MC124 - Effet Zeeman

1. Le PFD donne $\begin{cases} m\ddot{x} = -kx \\ m\ddot{y} = -ky \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$

2. On reconnaît des ED d'oscillateur harmonique d'où :

$$\begin{cases} x(t) = Acos(\omega_0 t + \phi) \\ y(t) = Bcos(\omega_0 t + \phi') \end{cases} \text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

   On reconnaît l'équation paramétrique d'une ellipse.

3. On rajoute la force de Lorentz dans la projection :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx - eB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = -ky + e\dot{x}B_0 \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

4. On pose $u = x + iy$
   D'où : $m\ddot{u} = -ku + eB_0(-\dot{y} + i\dot{x}) = -ku + ieB_0(\imath\dot{y} + \dot{x}) = -ku + ieB_0\dot{u}$

$$\Rightarrow m\ddot{u} - ieB_0\dot{u} + ku = 0$$

   Dont le discriminant s'écrit : $\Delta = -(eB_0)^2 - 4mk < 0$ et les racines sont :

$$r_{12} = \frac{ieB_0}{2m} \pm \frac{i}{2m}\sqrt{(eB_0)^2 + 4mk} = i\omega_{12}$$

   Les solutions sont du type :

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{\omega_2 t}$$

   Donc les solutions sont toujours oscillantes mais avec deux pulsations différentes.

5. La pulsation ω_0 est la pulsation « naturelle » de l'atome, donc des photons que l'atome peut absorber ou émettre. Dans un champ magnétique, cette pulsation se dédouble, avec un écart dépendant du champ magnétique appliqué (au niveau quantique, il y a subdivision des niveaux d'énergie de l'atome). L'étude de spectres d'émission permet ainsi de mesurer des champs magnétiques, par exemple solaire ou galactique.

MC125 – Chute d'un arbre

On étudie le mouvement de la tige en rotation autour de son point d'appui considéré comme un point fixe. La chute se fait dans un plan vertical (xOy) et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale (figure 19.15). L'arbre est soumis à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ qui s'applique en son centre de gravité situé au milieu de la tige et à la réaction du sol qui s'applique au point d'appui.

1. On applique le théorème du moment cinétique à l'arbre considéré comme un solide en rotation autour d'un axe fixe (Oz) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}J_{(Oz)}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_{(Oz)}\,(\text{forces})\,.$$

Le moment par rapport à (Oz) de la réaction du sol est nul car cette force s'applique sur l'axe de rotation. Le moment du poids est égal au produit de mg par le bras de levier $b = \frac{L}{2}\sin\theta$. Son signe est positif car le poids tend à faire tourner l'arbre dans le sens positif par rapport à l'axe de rotation. Le moment cinétique vaut $J_{(Oz)} = I\dot{\theta} = \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$.

On en déduit :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin\theta.$$

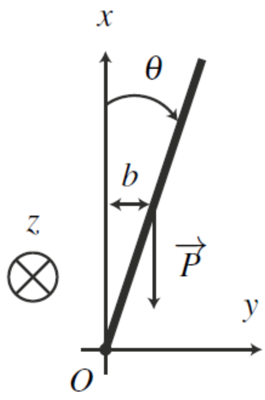


Figure 19.15

2. On cherche une intégrale première de cette équation en la multipliant par $\dot{\theta}$ et en intégrant une fois :

$$\frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}mL^2\frac{\dot{\theta}^2}{2} = mg\frac{L}{2}\left(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right)$$

en considérant que l'arbre fait initialement un angle θ_0 avec la verticale. Etant donné que $\theta > \theta_0$, $\cos(\theta_0) - \cos(\theta) > 0$ et comme $\dot{\theta} > 0$, on obtient :

3. On écrit $\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ et on sépare les variables pour obtenir $\sqrt{\frac{3g}{L}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos\theta}}$.

4. Le temps de chute de l'arbre est alors le temps nécessaire pour que θ passe de $\theta_0 = 5° = 0{,}0873$ rad à $\theta_f = \frac{\pi}{2}$ soit :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1 \times \sqrt{\frac{30}{3\times 10}} = 5{,}1\ \mathrm{s}.$$

MC126 - Pendule sur plan incliné

1. Le point se déplace dans le plan $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ à distance L fixe de O donc la vitesse est $\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. Par définition du moment cinétique, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{\sigma}_0 = L\overrightarrow{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

2. a) Les trois forces s'exerçant sur le point M sont : le poids, la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et la réaction normale au plan incliné $\overrightarrow{R}_N$.

La force $\overrightarrow{T}$ est alignée avec le fil donc $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ si l'on note T la norme de $\overrightarrow{T}$. La force $\overrightarrow{R}_N$ est perpendiculaire au plan donc selon $\overrightarrow{u_z}$ soit $\overrightarrow{R}_N = R_N\overrightarrow{u_z}$. Le poids est vertical donc dans le plan xOz soit $m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$. Il faut ensuite projeter la composante dans le plan sur $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sachant que $\overrightarrow{u_x} = \cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Finalement on trouve :

$$m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\alpha\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} - \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$$

b) Le théorème du moment cinétique en O entraîne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}_0}{\mathrm{d}t} = mL^2\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}$$

Le moment de la force $\overrightarrow{T}$ par rapport à O est nul puisque $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$. Le moment de $\overrightarrow{R}_N$ est perpendiculaire à Oz. Il reste à calculer les composantes du moment du poids sur Oz :

$$\overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{g} = mgL(\cos\alpha\overrightarrow{u_\theta} - \sin\alpha\sin\theta)\overrightarrow{u_z}$$

Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\alpha\sin\theta \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{g\sin\alpha}{L}\sin\theta = 0$$

Pour les petites oscillations $\sin\theta \simeq \theta$ et si l'on pose $\omega_0^2 = \frac{g\sin\alpha}{L}$, on trouve l'équation de l'oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

c) La solution à l'équation précédente est $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$. À $t = 0$, $\theta = 0$ entraîne $\cos\varphi = 0$. On prend par exemple $\varphi = \pi/2$, alors $\theta = -\theta_0\sin\omega_0 t$. Le calcul de $\dot{\theta}$ donne $\dot{\theta} = -\omega_0\theta_0\cos\omega_0 t$. À $t = 0$, $\dot{\theta} = v_0/L$ d'où $\theta_0 = -v_0/(L\omega_0)$ et

$$\theta(t) = \frac{v_0}{L\omega_0}\sin\omega_0 t$$

L'angle maximal atteint est donc $\dfrac{v_0}{L\omega_0}$.

MC127 – Etude d'une poulie

1. Lorsque la poulie tourne d'un angle θ, on déroule une longueur de fil $\ell = R\theta$. Avec le choix des orientations de l'angle θ et de l'axe (Ax), on a donc $\dot{x} = R\dot{\theta}$.

2. On étudie le mouvement de la poulie dans le référentiel terrestre galiléen. Cette poulie est soumise à l'action de la liaison pivot d'axe (Oz), à la force exercée par l'opérateur et à la traction exercée par le fil. La poulie est à l'équilibre lorsque la somme des moments de toutes ces forces par rapport à l'axe de rotation (Oz) est nulle.
Le moment de l'action de la liaison pivot idéale est nul, reste celui des autres forces. Si l'on suppose le fil sans masse, il transmet intégralement le poids $m\overrightarrow{g}$ et l'applique en A avec un bras de levier R. L'opérateur exerce une force $\overrightarrow{F}$ verticale au point B diamétralement opposé à A avec un bras de levier R également. On trouve alors $FR = mgR$ soit $F = mg = 50$ N.

3. Une relation cinématique relie ces deux mouvements puisque la masse est attachée à un fil qui s'enroule autour de la poulie. D'après la question 1, on a :

$$R\dot{\theta} = \dot{x}.$$

On applique le principe fondamentale de la dynamique à la masse m soumise à son poids $m\overrightarrow{g}$ et à la tension du fil sur la masse : $\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{u_x}$. En projection sur la verticale, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - T_1.$$

On applique la loi du du moment cinétique à la poulie en rotation autour d'un axe fixe soumis à la tension du fil qui s'applique au point I : $\overrightarrow{T_2} = T_2\overrightarrow{u_x}$ dont le moment par rapport à l'axe de rotation vaut RT_2 :

$$I\ddot{\theta} = RT_2.$$

Si l'on suppose le fil sans masse, il transmet intégralement la tension et $T_1 = T_2 = T$.
En combinant ces équations et en utilisant l'expression de I fournie dans l'énoncé, on trouve :

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{1}{1+0,5\dfrac{m_p}{m}} \quad ; \quad \ddot{x} = g\frac{1}{1+0,5\dfrac{m_p}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = mg - m\ddot{x} = mg\left(\frac{0,5\dfrac{m_p}{m}}{1+0,5\dfrac{m_p}{m}}\right).$$

Le mouvement de la masse m est uniformément accéléré avec une accélération inférieure à g, qui tend vers g si la poulie est de masse négligeable et vers 0 si la poulie est très massive comparativement à m.

MC128 - Trajectoire quasi-circulaire d'un satellite - Freinage par l'atmosphère

On étudie le satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, le satellite n'est soumis qu'à la force de gravitation colinéaire à son vecteur position.

1. La résultante des forces étant colinéaire avec le vecteur position, son moment par rapport à la Terre est nul et on en déduit par le théorème du moment cinétique que ce dernier est constant au cours du temps.

2. Si la valeur du moment cinétique est nulle, le mouvement est rectiligne. Sinon le mouvement a lieu dans le plan passant par O, centre de la Terre, et perpendiculaire au moment cinétique.

3. Dans ce plan, on utilise les coordonnées polaires et on explicite l'expression du moment cinétique soit $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$. On peut définir la constante des aires par $C = r^2\dot{\theta}$.

4. Le mouvement est circulaire si r est une constante. Comme la constante C est une constante, on en déduit que si r est constant, $\dot{\theta}$ est également constant. Par conséquent, le mouvement est uniforme.

5. La vitesse s'exprime en coordonnées polaires par $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ dans le cas d'un mouvement circulaire. La projection du principe fondamental de la dynamique sur $\overrightarrow{u_r}$ donne $-mr\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM_Tm}{r^2}$ soit $C = r\dot{\theta}^2 = \dfrac{GM_T}{r^2}$. On en déduit $v^2 = r^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{GM_T}{r}$.

6. L'énergie cinétique peut s'exprimer par $Ec = \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \dfrac{GmM_T}{2r}$.

7. Quant à l'énergie potentielle, elle vaut $Ep = -\dfrac{GmM_T}{r} = -2Ec$.

8. On en déduit l'énergie mécanique $Em = Ec + Ep = -Ec = \dfrac{Ep}{2} = -\dfrac{GmM_T}{2r}$.

9. On effectue un développement limité de l'énergie potentielle

$$Ep(r + \Delta r) = -\frac{GmM_T}{r}\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^{-1} = -\frac{GmM_T}{r}\left(1 - \frac{\Delta r}{r}\right)$$

On en déduit $\Delta Ep = \dfrac{GM_Tm\Delta r}{r^2}$.

10. Comme $Em = \dfrac{Ep}{2}$ reste valable sur la trajectoire qui est supposée quasi - circulaire, on en déduit $\Delta Em = \dfrac{GM_Tm\Delta r}{2r^2}$.

11. Le travail de la force de frottement s'écrit $W_f = -\alpha m v\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v}\,T_0 = -\alpha m v^3 T_0$ car v est constante.

12. L'application du théorème de l'énergie mécanique donne $\dfrac{\mathrm{d}Em}{\mathrm{d}t} = W_f$ soit en utilisant les résultats précédents et l'expression de la période de révolution $T_0 = \dfrac{2\pi r}{v}$, on obtient $\Delta r = -4\pi\alpha r^2$.

13. Le satellite se rapproche de la Terre sous le freinage de la force de frottement.

14. L'expression de la vitesse conduit à $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r}} = \dfrac{2\pi r}{T_0}$. On en déduit la troisième loi de Kepler $\dfrac{T_0^2}{r^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}$.

15. Avec les hypothèses proposées dans l'énoncé, on a $T_0\mathrm{d}r = -4\pi\alpha r^2\mathrm{d}t$. En utilisant la troisième loi de Kepler, on a $\mathrm{d}r = -2\alpha\sqrt{GM_T r}\mathrm{d}t$. En intégrant entre r_0 et r pour une origine des temps en r_0, on en déduit

$$\sqrt{r} = \sqrt{r_0} - \alpha\sqrt{GM_T}t \quad \text{soit} \quad K = -\alpha\sqrt{GM_T}.$$

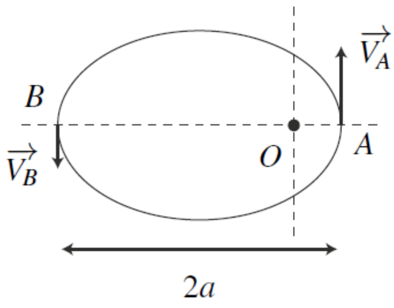
MC129 – Périgée

1. Voir ci-contre.

2. $a = \dfrac{d_P + d_A}{2} = 18{,}1.10^3$ km (voir ci-contre).

3. $E_m = -\dfrac{\mathcal{G} m M_T}{2a} = -\dfrac{\mathcal{G} m M_T}{d_P + d_A} = -1{,}2.10^{10}$ J.

On déduit la période de la troisième loi de Kepler en utilisant un satellite géostationnaire qui effectue une révolution en $T_{\text{geo}} = 1$ jour à l'altitude $z_{\text{geo}} = 36.10^3$ km donc pour lequel $a_{\text{geo}} = 42{,}4.10^3$ km pour déterminer la valeur de la constante :

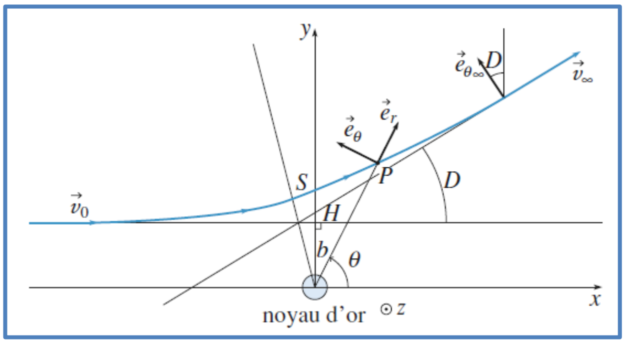


$$T^2/a^3 = T_{\text{geo}}^2/a_{\text{geo}}^3 \quad \Rightarrow \quad T = T_{\text{geo}} \left(\frac{a}{a_{\text{geo}}} \right)^{\frac{3}{2}} = 0{,}278 \text{ jour} = 6{,}7 \text{ h.}$$

4. Au points A et P et seulement en ces points, on a $\overrightarrow{v_A} \perp \overrightarrow{OA}$ (respectivement $\overrightarrow{v_P} \perp \overrightarrow{OP}$) et $L_T(A) = m d_A v_A$ (resp. $L_T(P) = m d_P v_P$).

5. Le mouvement est à force centrale de centre O, le moment cinétique en O est une constante du mouvement d'où $d_A v_A = d_P v_P$ puis $v_P = v_A \dfrac{d_A}{d_P} = 3{,}5.10^2 \times \dfrac{35{,}9}{0{,}2} = 6{,}3.10^4$ m·s^{-1}.

MC130 – Diffusion de Rutherford



1 • La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule α s'écrit $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r$.

En remarquant que $\vec{e}_r = -\dfrac{1}{\dot{\theta}}\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}$, on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-k}{mr^2\dot{\theta}}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}.$$

On reconnaît au dénominateur le moment cinétique de la particule $L = mr^2\dot{\theta} = -mbv_0$ (c'est une constante du mouvement, on le calcule au départ **en faisant très attention à l'orientation des vecteurs**). D'après le schéma de l'énoncé, θ diminue au cours du mouvement, il est donc normal de trouver $L < 0$.

En intégrant l'équation ci-dessus entre le départ et un point où la particule est de nouveau très éloignée du noyau, on obtient :

$$\vec{v}_\infty - \vec{v}_0 = \frac{k}{mv_0 b}\left(\vec{e}_{\theta_\infty} - \vec{e}_{\theta_0}\right).$$

2 • À l'infini (des deux côtés), l'énergie potentielle d'interaction entre la particule α et le noyau est nulle, l'énergie est uniquement sous forme cinétique, on en déduit (grâce à la conservation de l'énergie) que $\|\vec{v}_\infty\| = v_0$.

On projette alors l'équation précédente sur les axes (Ox) ou (Oy) en remarquant que $\vec{e}_{\theta_0} = -\vec{e}_y$ et que l'angle entre (Oy) et $\vec{e}_{\theta_\infty}$ est égal à D , on obtient :

$$\begin{cases} v_0\cos D - v_0 = -\dfrac{k}{mv_0 b}\sin D & \text{(sur } (Ox)) \\ v_0 \sin D = \dfrac{k}{mv_0 b}(\cos D + 1) & \text{(sur } (Oy)). \end{cases}$$

On vérifie que ces deux équations sont équivalentes.

La première équation (par exemple) devient :

$$2v_0\sin^2\frac{D}{2} = \frac{k}{mv_0 b}2\sin\frac{D}{2}\cos\frac{D}{2},$$

d'où : $$\tan\frac{D}{2} = \frac{k}{mv_0^2 b}.$$

3 • L'énergie de la particule, constante, est :

$$\mathscr{E}_M = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}$$
$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mb^2v_0^2}{2r^2} + \frac{k}{r}.$$

Lorsque la distance est minimale, il vient :

$$mb^2v_0^2 + 2kr_{\min} - mv_0^2 r^2_{\min} = 0.$$

La racine positive de cette équation de degré 2 est :

$$r_{\min} = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$r_{\min} = b\left(\tan\frac{D}{2} + \frac{1}{\cos\frac{D}{2}}\right).$$

MC131 – Satellite en orbite

1. Soit :

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{GmM_T}{r_1^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}$$

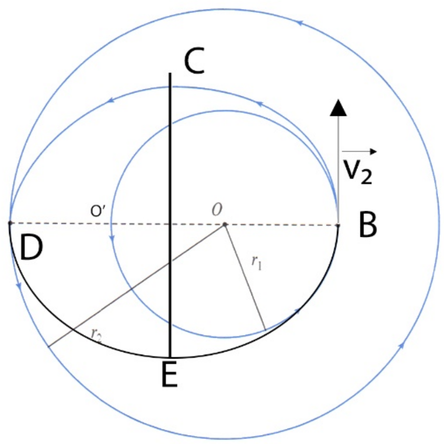
2. Soit :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{r_1} = \frac{1}{2}m\frac{GM_T}{r_1} - \frac{GmM_T}{r_1}$$
$$\Leftrightarrow E_m = -\frac{GmM_T}{2\,r_1}$$

3. Soit :

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r_1^2}{GM_T} r_1$$
$$\Rightarrow \frac{r_1^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

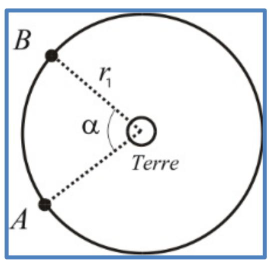
4. Vu que B ne change pas de direction, on se retrouve dans la situation suivante où le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v_2}$. Les seuls points possibles sont B,C,D et E.



Cependant O doit-être un foyer de l'ellipse et par conséquent seul B et D sont possibles avec sur le schéma mais les rôles sont inversables suivant la position du centre de la terre en O ou O'.

$$\begin{cases} B : périgée \\ D : apogée \end{cases}$$

5. Pour que les deux objets se rencontrent il faut que le temps mis pour revenir au périgée soit le même pour les deux objets :



$$\begin{cases} A\ parcourt\ l'angle\ 2\pi - \alpha\ en\ T' \\ B\ parcourt\ l'angle\ 2\pi\ en\ T'' = T' \end{cases}$$

Or :

$$\frac{r_1^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} = \beta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T^2 = r_1^3 \beta \\ \dfrac{T'}{2\pi - \alpha} = \dfrac{T}{2\pi} \\ T"^2 = \dfrac{(r_1 + r_2)^3}{2^3} \beta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} T' = T\left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right) = r_1^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} \left(1 - \dfrac{\alpha}{2\pi}\right) \\ T'' = \dfrac{r_1^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \dfrac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \beta^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

D'où :

$$T'' = T' \Rightarrow \left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right) \Rightarrow 1 + \frac{r_2}{r_1} = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = \gamma$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ alors $\frac{r_2}{r_1} = 0{,}89$

De plus le rayon r_2 est tel que :

$$E_m = -\frac{GmM_T}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{GmM_T}{r_1}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 2GM_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2}\right) = 2v_1^2 \left(1 - \frac{r_1}{r_1 + r_2}\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1 \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} = v_1 \sqrt{\frac{2\gamma}{1 + \gamma}} = 0{,}969\ v_1$$

Normal, B diminue son altitude il doit freiner pour passer sur une orbite plus basse que A pour le rattraper.