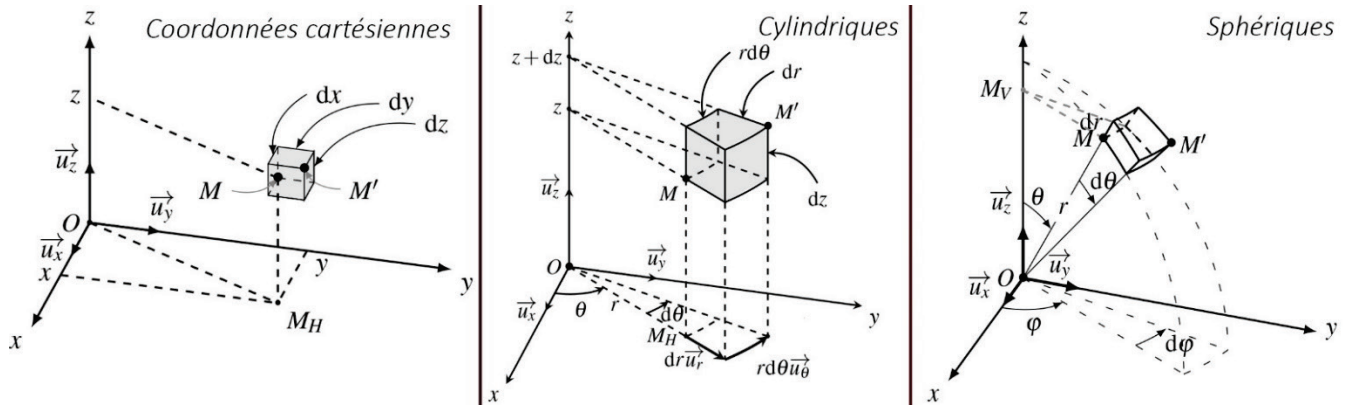


# MC1 – Mécanique en référentiel galiléen

## I – Cinématique

### I-1) Les différentes coordonnées



Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \\ \overline{OM} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \overline{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, & z \in \mathbb{R} \\ x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta, & z = z \\ \overline{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, & 0 \leq \theta \leq \pi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ x = r \sin \theta \cos \varphi, & y = r \sin \theta \sin \varphi, & z = r \cos \theta \\ \overline{OM} = r\vec{u}_r \end{cases}$

### I-2) Grandeurs géométriques élémentaires

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} d\overline{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z \\ d^2S = dx dy \text{ ou } dx dz \text{ ou } dy dz \\ d^3\tau = dx dy dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overline{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z \\ d^2S = dr dz \text{ ou } r d\theta dz \\ d^3\tau = r dr d\theta dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overline{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{u}_\varphi \\ d^2S = r dr d\theta \text{ ou } r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \text{ ou } r \sin \theta d\varphi dr \\ d^3\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \end{cases}$

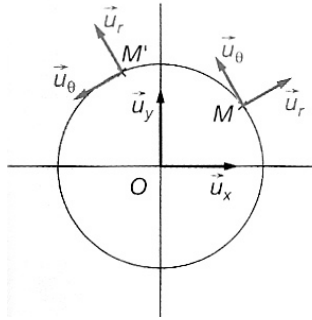
### I-3) Vitesse et accélération

#### a) Vitesse

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{v} &= \dot{r}\vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z + z \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{=\vec{0}} \end{aligned}$$

Contrairement au cas des coordonnées cartésiennes, les vecteurs de la base locale varient au cours du temps. Il est alors nécessaire d'évaluer leur dérivée temporelle.



On a :

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \\ \text{et } \vec{u}_\theta &= -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_r}{dt} &= -\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_y = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y) = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \text{et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} \cos \theta \vec{u}_x - \dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) = -\dot{\theta} \vec{u}_r\end{aligned}$$

On retiendra :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

En effet la dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à  $\theta$  est directement orthogonale à celui-ci.

D'où :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

b) Accélération

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{u}_\theta + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{u}_z\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{a} &= \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z \end{cases}$$

En coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{u}_\phi \\ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \end{cases}$$

## II – Les lois de Newton

### II-1) Première loi de Newton

Il existe une classe de référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

### II-2) Deuxième loi de Newton

Le principe fondamental de la dynamique ou seconde loi de Newton s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i$$

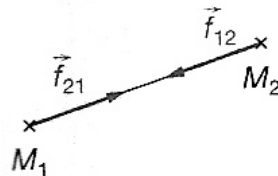
Si la masse du système est constante :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{f}_i$$

### II-3) Troisième loi de Newton

Si le milieu extérieur exerce la force  $\vec{f}_{ext \rightarrow M}$  sur M, alors M exerce la force  $\vec{f}_{M \rightarrow ext}$  sur le milieu extérieur telle que  $\vec{f}_{M \rightarrow ext} = -\vec{f}_{ext \rightarrow M}$ .

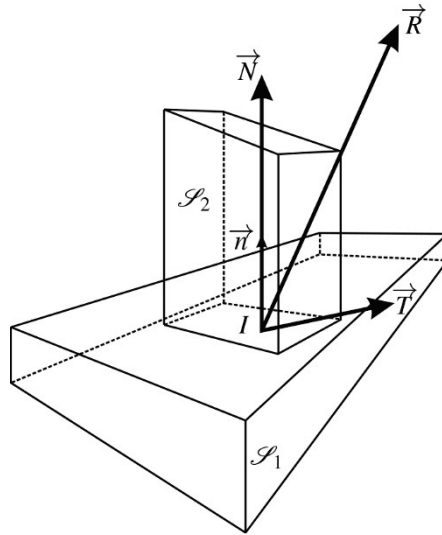
Dans le cas des points matériels, le problème présente une symétrie d'axe  $M_1M_2$ . Les forces sont opposées sur l'axe  $M_1M_2$ .



## III – Les lois de Coulomb

### III-1) Description des forces de contact

Quand un point matériel est au contact avec un support, ce dernier exerce une force sur le point matériel, appelée réaction du support et notée  $\vec{R}$ . On rappelle que cette force a pour origine la répulsion à faible distance des nuages électroniques des atomes du point matériel et du support. La réaction  $\vec{R}$  se décompose en une partie normale au support notée  $\vec{N}$  et une partie tangente au support notée  $\vec{T}$ , soit  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$



La partie tangentielle est liée aux frottements entre le support et le point matériel. Elle est souvent nommée force de frottement. Un contact sans frottement impose une réaction purement normale.

### III-2) Lois de Coulomb

#### a) Modèle des frottements secs

Le français Charles-Augustin Coulomb a énoncé les lois approchées suivantes, donnant une relation entre les composantes tangentielle et normale de la force de réaction.

S'il y a glissement,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  alors:

- Le vecteur  $\vec{T}$  est colinéaire à  $\vec{v}$  ;
- Le vecteur  $\vec{T}$  s'oppose au mouvement, ainsi  $\vec{T} \cdot \vec{v} \leq 0$  ;
- $\|\vec{T}\| = f_D \|\vec{N}\|$  où  $f_D$  coefficient de frottement dynamique

S'il n'y a pas glissement,  $\vec{v} = \vec{0}$  alors:

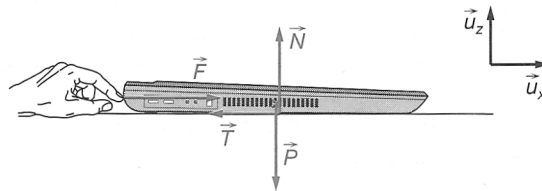
- $\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$  où  $f_s$  coefficient de frottement statique.
- On parle d'adhérence.

## b) Les coefficients de frottements

En général,  $f_D < f_s$  ; cependant, dans de nombreux modèles simplifiés, on écrit souvent  $f_D = f_s = f$ .

## c) Exemple.

Un ordinateur portable est posé sur une table et une personne le pousse vers la droite. L'ordinateur est supposé se comporter comme un point matériel.



Étudions successivement les deux cas :

i. *Non glissement*

Si, malgré les efforts de la personne, l'ordinateur ne glisse pas, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'ordinateur s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{0} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

Donc :

$$\vec{F} = -\vec{T} \text{ et } \vec{N} = -m\vec{g}$$

$$\text{Or : } \|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\| \Rightarrow F \leq f_s mg \Rightarrow F \leq f mg$$

où  $f$  est le coefficient de frottement.

ii. *Glissement*

Si l'ordinateur glisse, on obtient :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + (\vec{N} + \vec{T}) + \vec{F}$$

soit en projection sur l'horizontale et la verticale :

$$m\ddot{x} = F - T \text{ et } 0 = N - mg$$

$$\text{Or : } \|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\| = f \|\vec{N}\| = fmg$$

Donc :

$$m\ddot{x} = F - fmg > \text{ si } F > fmg$$

## IV – Théorèmes énergétiques

### IV-1) Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B} \text{ où } dE_c = \delta W$$

Soit :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{f} \\ \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \\ \Rightarrow m \frac{d\left(\frac{1}{2}v^2\right)}{dt} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \text{ car } dv^2 = 2\vec{v} \cdot d\vec{v} \\ \Rightarrow \frac{d(E_c)}{dt} &= P \text{ (Théorème de la puissance cinétique)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dE_c &= \delta W \\ \int_A^B d(E_c) &= \int_A^B P dt = \int_A^B \delta W \\ \Leftrightarrow \Delta E_c &= E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B} \end{aligned}$$

### IV-2) Énergie potentielle et forces conservatives

#### a) Définitions

On dit qu'une force est conservative si son travail  $W_{A \rightarrow B}$  entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B.

Ainsi on décompose les travaux (et les forces) en deux catégories :

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$$

Tel que :  $\delta W_c = -dE_p$  où  $E_p$  est appelée Energie potentielle

Une force est dite conservative si on peut trouver une fonction énergie potentielle  $E_p$  telle que

$$\delta W_c = \vec{f}_c \cdot \overrightarrow{dOM} = -dE_p$$

On peut donc écrire :

$$\vec{f}_c = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

b) Exemples de forces conservatives

- Poids d'un corps

Soit :  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  d'où :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ &\Leftrightarrow dE_p = mgdz \\ &\Rightarrow E_p = mgz + C \end{aligned}$$

Si l'axe est dirigé dans l'autre sens on aura :  $E_p = -mgz + C$

- Force newtonienne

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \text{ où } k = \frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0} = -Gmm_p \\ \Rightarrow dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + \dots) \\ &\Leftrightarrow dE_p = -\frac{k}{r^2} dr \end{aligned}$$



$$\Rightarrow E_p = \frac{k}{r} + C$$

Or  $E_p = 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$  :

$$\Rightarrow E_p = \frac{k}{r}$$

- Force élastique d'un ressort

Un ressort de raideur  $k$  ayant subi un allongement  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  exerce une force de rappel élastique dans la direction de l'allongement :  $\vec{f} = -k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\vec{u}_x$

Donc :

$$\begin{aligned} dE_p &= -\vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\vec{u}_x \cdot (dx\vec{u}_x + \dots) \\ &\Leftrightarrow dE_p = -k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)dx \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + C \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante.

On prend généralement comme référence des énergies potentielles  $E_p=0$  lorsque le ressort est à sa longueur à vide donc que  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = 0$ .

$$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2$$

c) Exemples de forces non conservatives

On considère une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{dOM} = -\lambda \vec{v} \cdot \vec{v} dt = -\lambda v^2 dt < 0$$

Donc  $W_{A \rightarrow B} < 0$  et même  $W_{A \rightarrow A} < 0$ .

## IV-3) Énergie mécanique

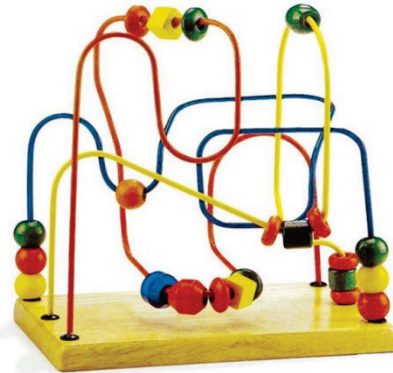
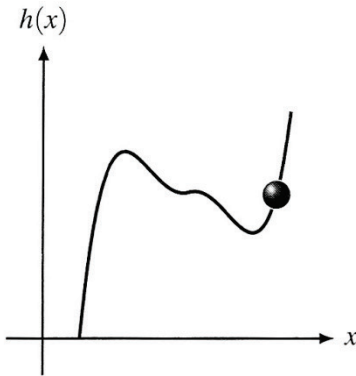
Soit :

$$\begin{aligned} dE_c &= \delta W = \delta W_c + \delta W_{Nc} = -dE_p + \delta W_{Nc} \\ \Rightarrow dE_p + dE_c &= \delta W_{Nc} \\ \Rightarrow dE_m &= \delta W_{Nc} \end{aligned}$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} dE_m &= \delta W_{Nc} \text{ où } E_m = E_p + E_c \\ \Rightarrow E_m &= \text{cste si } W_{Nc} = 0 \end{aligned}$$

## IV-4) Étude qualitative des mouvements et des équilibres



Jeu constitué d'une perle enfilée sur une tige rigide. Le profil d'altitude  $h(x)$  coïncide, à un facteur d'échelle près, au profil d'énergie potentielle.

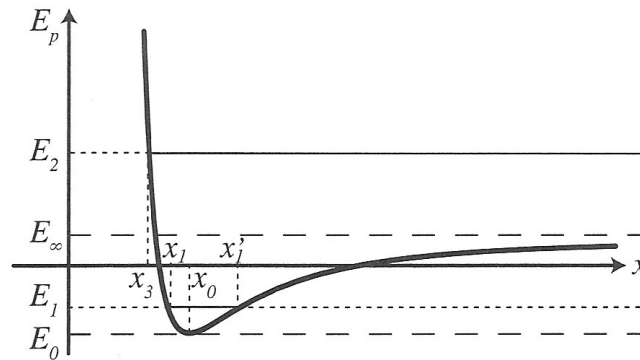
D'après le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie mécanique se conserve soit :

$$E_p + E_c = E_m = \text{cste}$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique est une quantité positive :

$$\begin{aligned} E_c &= E_m - E_p > 0 \\ \Rightarrow E_m &> E_p \end{aligned}$$

Ainsi on peut classer les différentes possibilités sur un graphe  $E_p(x)$ .



Analyse graphique des positions accessibles au mobile en fonction de son énergie mécanique.

- Etats impossibles :

Si  $E_m < E_0$ , alors  $E_m < E_p$  quelle que soit la position.

- Etats liés :

Si  $E_0 < E_m < E_\infty$  alors le point matériel ne peut évoluer qu'entre les positions  $x_1$  et  $x_1'$ . Il reste dans une zone bornée de l'espace et ne peut pas s'en aller à l'infini.

- Etats libres :

Si  $E_m > E_\infty$  alors le point matériel peut évoluer aux positions d'abscisses  $x$  vérifiant  $x \geq x_3$ . Le point matériel peut s'échapper à l'infini.

#### IV-5) Positions d'équilibre

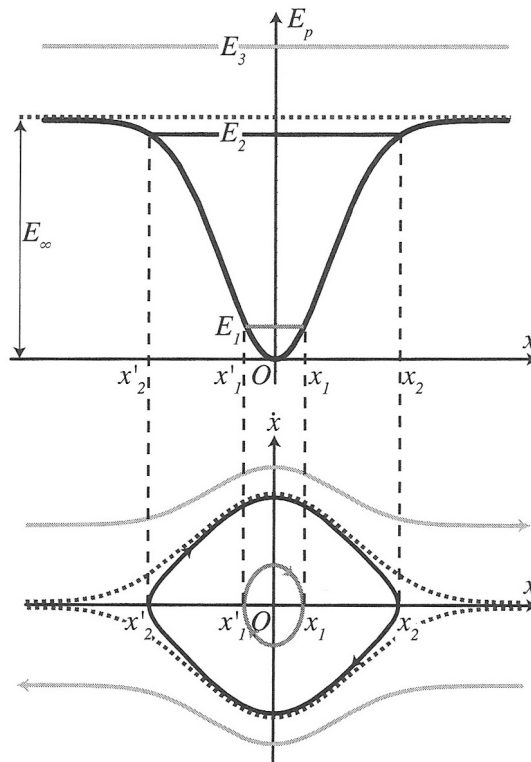
Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Son abscisse  $x_{eq}$  vérifie l'équation :

$$\left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x=x_e} = 0$$

La position d'équilibre  $x_{eq}$  est stable si l'énergie potentielle est minimale en  $x_{eq}$ . Cela se traduit généralement par :

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} > 0$$

## IV-6) Portraits de phase

a) Tracé à partir de  $E_p(x)$ 

Energie potentielle et portrait de phase. Exemple d'un puits de potentiel de profondeur  $E_0$ .

On considère un mobile  $M$  de masse  $m$  soumis à la seule force conservative  $\vec{F} = F_x(x)\vec{u}_x$  qui dérive de l'énergie potentielle  $E_p(x)$  tracée sur la figure. Comme la seule force qui travaille est conservative, le théorème de l'énergie cinétique implique que l'énergie mécanique du système est conservée.

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$$

$$v^2 = \frac{2E_c}{m} = \frac{2(E_m - E_p)}{m}$$

qui admet deux solutions de signes opposés :

$$v = \pm \sqrt{\frac{2(E_m - E_p)}{m}}$$

On peut alors tracer une trajectoire de phase point par point en fixant une valeur pour  $E_m$ , et en relevant la valeur de  $E_p(x)$  sur le profil d'énergie potentielle.

## b) Caractéristiques principales des portraits de phase

- Les trajectoires de phases sont parcourues de gauche à droite dans le demi-plan supérieur et de droite à gauche dans le demi-plan inférieur.
- Les mouvements périodiques correspondent à des trajectoires de phase fermées décrites dans le sens horaire.
- Une trajectoire de phase coupe généralement l'axe « x » selon la verticale.

En effet :

- Dans le demi-plan supérieur  $v > 0$  donc  $x$  est croissante et évolue de gauche à droite.
- $\tan \alpha = \frac{dv}{dx} = \frac{dv/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{v}}{v}$

Sur l'axe (Ox), la vitesse  $v$  est nulle. Dans le cas général, l'accélération  $a = \dot{v}$  est non nulle, donc  $\tan(\alpha) \rightarrow \infty$  et  $\alpha \rightarrow \pm\pi/2$

On peut noter que les positions d'équilibres pour lesquelles  $\dot{v} = 0$  sont des exceptions à cette règle.

# V – Force de Lorentz

## V-1) Aspects énergétiques

Une charge  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  placée en  $M$  à l'instant  $t$  subit la force électromagnétique, appelée force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

D'un point de vue énergétique, calculons la puissance de la force de Lorentz :

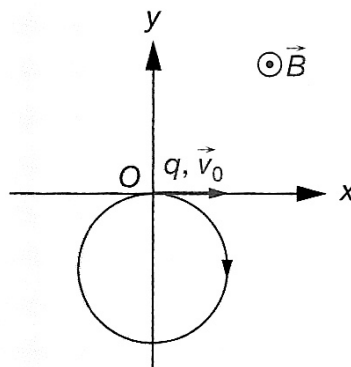
$$\begin{aligned} P &= \vec{f} \cdot \vec{v} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \\ &\Rightarrow P = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{f}_e \cdot \vec{v} = P_e \end{aligned}$$

Un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une charge, en revanche, l'action d'un champ magnétique sur une charge sera en général de courber la trajectoire de la charge sans lui fournir d'énergie.

## V-2) Mouvement cyclotron

### a) Résolution en coordonnées cartésiennes

Une particule de charge  $q$  et masse  $m$  placée dans un champ magnétique uniforme et statique  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$ . La particule est située initialement au point  $O$  et sa vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  est perpendiculaire au champ magnétique.



Le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_e = 0$$

montre que la norme de la vitesse de la particule reste constante au cours du mouvement.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la particule dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$m\vec{a} = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

En projection sur les trois axes cartésiens, on obtient :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} B_0 \dot{y} \\ -B_0 \dot{x} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (1)$$

$$\text{Or } \ddot{z} = 0 \Rightarrow z = v_{0z}t + z_0 = 0$$

$\Rightarrow$  la trajectoire est donc plane.

L'intégration des projections sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  donne :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + C_1 \\ m\dot{y} = -qB_0x + C_2 \end{cases}$$

Les conditions initiales  $\dot{x}(0) = v_0$  et  $\dot{y}(0) = 0$  donnent :

$$\begin{cases} m\dot{x} = qB_0y + mv_0 \\ m\dot{y} = -qB_0x \end{cases}$$

Donc (1) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB_0}{m} \dot{y} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} x \\ \ddot{y} = -\frac{qB_0}{m} \dot{x} = -\frac{q^2 B_0^2}{m^2} y - \frac{qB_0}{m} v_0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega_c^2 y = -\omega_c v_0 \end{cases} \quad \text{où } \omega_c = \frac{qB_0}{m} \text{ pulsation cyclotron}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega_c} \\ y(0) = 0 \Rightarrow A' = \frac{v_0}{\omega_c} \\ \dot{y}(0) = 0 \Rightarrow B' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \\ y = A' \cos(\omega_c t) + B' \sin(\omega_c t) - \frac{v_0}{\omega_c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$$

Si on pose  $R = \frac{v_0}{\omega_c}$  on a :

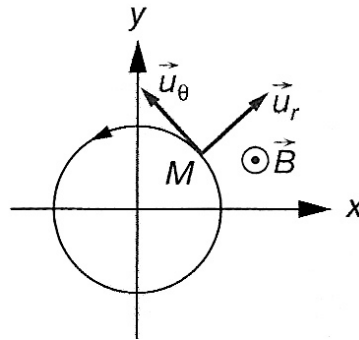
$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{(y + R)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Le mouvement « cyclotron » se caractérise par une trajectoire circulaire parcourue avec une vitesse angulaire  $\omega_c$  constante, de centre  $(x = 0, y = \pm R)$  et de rayon  $R = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{mv_0}{|q|B_0}$ .



## b) Résolution en coordonnées polaires

Admettons que la trajectoire soit un cercle perpendiculaire au champ magnétique.



Le vecteur accélération s'écrit en coordonnées polaires de centre O :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

La force de Lorentz est :

$$\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) = qR\dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B_0\vec{u}_z = qR\dot{\theta}B_0\vec{u}_r$$

Le principe fondamental de la dynamique donne alors :

$$\begin{cases} qR\dot{\theta}B_0 = -mR\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On déduit que le cercle est parcouru uniformément à la vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \frac{qB_0}{m}$

Or :

$$R = \frac{v_0}{\dot{\theta}} \Rightarrow R = \frac{mv_0}{qB_0}$$

## V-3) Synchrotron

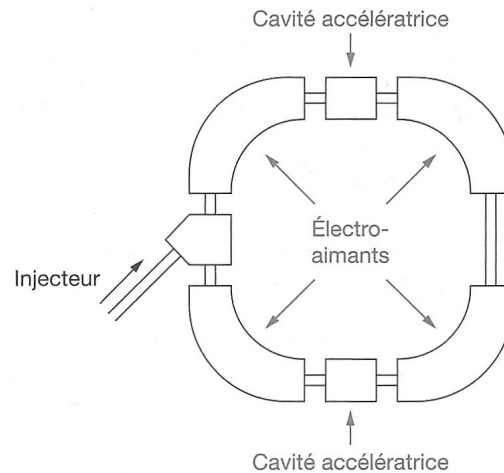
Un synchrotron est constitué d'un anneau comportant alternativement des zones où règne un champ magnétique  $\vec{B}$  et des zones dans lesquelles un champ électrique  $\vec{E}$  a été établi.

Le champ électrique sert à augmenter la vitesse des particules, alors que le champ magnétique courbe les trajectoires afin de les fermer sur elles-mêmes. Le rayon de la trajectoire restant constant,

l'expression du rayon :

$$R = \frac{mv}{|q|B_0}$$

impose une augmentation de la norme du champ magnétique au fur et à mesure que les particules ont une vitesse plus importante.



## VI – Théorème du moment cinétique

### VI-1) Moment cinétique

#### a) Par rapport à un point O

Le moment cinétique de M par rapport à un point O est le vecteur défini par le produit vectoriel :

$$\underbrace{\vec{L}_O}_{\text{kgm}^2\text{s}^{-1}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$$

#### b) Moment cinétique par rapport à un axe orienté $\Delta$

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est la projection orthogonale de  $\vec{L}_0$  sur l'axe  $\Delta$  :

$$L_\Delta = \vec{L}_0 \cdot \vec{u}_\Delta$$

## VI-2) Moment d'inertie

Lorsque l'axe  $\Delta$  est fixe, on peut le faire coïncider avec l'axe (Oz) et repérer M à l'aide de ses coordonnées cylindriques. On peut alors calculer  $L_z$  qui correspond à la composante selon  $\vec{u}_z$  du moment cinétique de M par rapport à 0 :

$$\begin{aligned}\vec{L}_0 &= (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z) \\ &= mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z + m(r\dot{z} - z\dot{r})\vec{u}_\theta - zr\dot{\theta}\vec{u}_r\end{aligned}$$

D'où :

$$L_z = mr^2\dot{\theta}$$

En coordonnées cylindriques d'axe (Oz), on définit le moment d'inertie d'un point M de coordonnées  $(r, \theta, z)$  par rapport à l'axe (Oz) :

$$J_z = mr^2 \Rightarrow L_z = J_z \dot{\theta} = J_z \omega$$

## VI-3) Moment cinétique d'un solide ou d'un système de points

a) Moment cinétique par rapport à  $\Delta$ 

On considère un système constitué de plusieurs points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  de moments cinétiques par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  :  $L_{\Delta i}$ . Le moment cinétique du système de points est :

$$L_\Delta = \sum_i L_{\Delta i}$$

D'où en coordonnées cylindriques en confondant  $\Delta$  avec (Oz) :

$$L_{zi} = m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = J_{zi} \dot{\theta}_i$$

où  $J_{zi} = m_i r_i^2$  est le moment d'inertie du point  $M_i$  par rapport à Oz et  $\dot{\theta}_i$  sa vitesse angulaire.

Donc :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i m_i r_i^2 \dot{\theta}_i = \sum_i J_{zi} \dot{\theta}_i$$

b) Moment d'inertie d'un solide

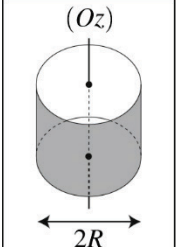
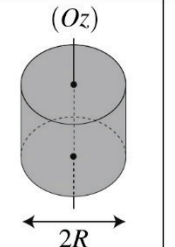
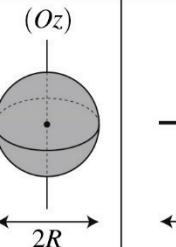

Chaque point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe possède la même vitesse angulaire. Le mouvement du solide est alors un cas particulier du mouvement d'un système de points dans lequel la vitesse angulaire de chacun des points du système est la même. D'où :

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \sum_i J_{zi} \dot{\theta} = J_z \dot{\theta}$$

Le moment d'inertie  $J_z$  du solide par rapport à l'axe (Oz) est défini par la somme des moments d'inertie par rapport à (Oz) de chacun des points le constituant :

$$J_z = \sum_i J_{zi}$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe est une caractéristique intrinsèque que l'on peut mesurer. Pour information, on donne les moments d'inertie par rapport à l'axe (Oz) dessiné sur les figures suivantes pour des solides homogènes de masse  $m$  :

cylindre vide de rayon $R$	cylindre plein de rayon $R$	boule de rayon $R$	barre de longueur $L$
$mR^2$	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
(Oz) 	(Oz) 	(Oz) 	(Oz) 

Plus une masse  $m$  est éloignée de l'axe de rotation ( $Oz$ ), plus sa contribution au moment d'inertie par rapport à ( $Oz$ ) est importante.

Exemple :

Les mesures astronomiques du moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe Nord-Sud montrent qu'il vaut  $0,33MR^2$ . Il est inférieur à celui d'une boule homogène de même masse et même rayon qui vaut  $0,4MR^2$ . On en déduit que la répartition des masses à l'intérieur de la Terre n'est pas homogène et que la couche profonde située près de son axe de rotation est plus dense que les couches superficielles. Cette couche profonde est le noyau. Connaissant sa taille, on peut estimer sa densité. Elle correspond à celle du fer à haute pression. C'est un des principaux arguments prouvant que le noyau est essentiellement composé de fer.

#### VI-4) Moment d'une force

##### a) Définitions

- Moment d'une force par rapport à un point  $O$

$$\overline{M}_O(\vec{F}) = \overline{M}_O = \overline{OM} \wedge \vec{F}$$

Sa norme se mesure en joule  $J = N.m$ .

- Moment d'une force par rapport à un axe orienté  $\Delta$

Le moment de la force  $\vec{F}$  par rapport à l'axe orienté  $\Delta$  est la projection orthogonale de  $\overline{M}_O$  sur  $\Delta$  :

$$M_\Delta = M_\Delta(\vec{F}) = \overline{M}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overline{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

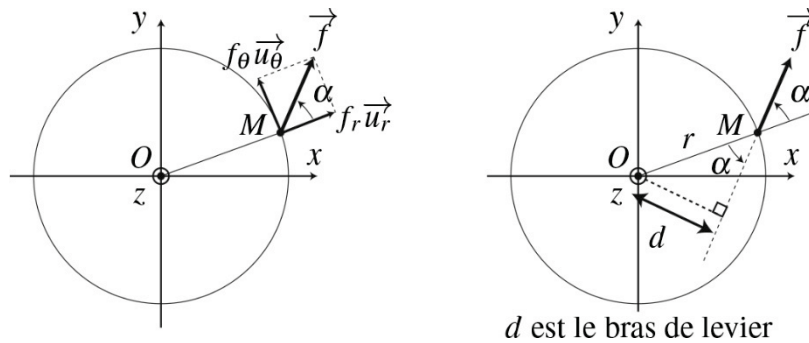
- Calcul en coordonnées cylindriques

Lorsque l'axe  $\Delta$  est fixe, on peut faire coïncider l'axe ( $0z$ ) avec  $\Delta$  et repérer  $M$  par ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \wedge m \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} -zF_\theta \\ zF_r - rF_z \\ rF_\theta \end{vmatrix}$$

Donc :  $M_z = m r F_\theta$

Étant donné que ni la composante selon  $\vec{u}_z$  du vecteur position ni celle de la force n'interviennent, on représente cette situation sur la figure en se restreignant au plan (Oyx), perpendiculaire à (Oz).



b) Bras de levier

On peut réécrire cette relation :

$$M_z = r F_\theta = r F \sin \alpha$$

On se reporte alors à la partie droite pour observer que :

$$r \sin \alpha = d$$

est la distance séparant la droite d'action de la force  $\vec{F}$  de l'axe (Oz). La distance  $d$  est appelée le bras de levier de la force  $\vec{F}$  et on a dans le cas général

$$|M_z| = fd$$

Le signe de  $M_z$  est :

- Positif lorsque  $\alpha \in ]0, \pi[$ . C'est le cas lorsque  $\vec{F}$  tend à faire bouger M vers les  $\theta$  croissants ;
- Négatif lorsque  $\alpha \in ]\pi, 2\pi[$  C'est le cas lorsque  $\vec{F}$  tend à faire bouger M vers les  $\theta$  décroissants.

## VI-5) - Loi du moment cinétique pour un point matériel

## a) Par rapport à un point fixe

Le point M est soumis à un ensemble de forces  $\vec{F}$ . On note O un point fixe et  $\Delta$  une droite orientée fixe contenant O. On choisit l'axe (Oz) de telle sorte que  $\Delta = (Oz)$ .

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à O est égale à la somme des moments des forces calculés par rapport au même point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O_i}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \frac{d(\vec{OM} \wedge m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} + \vec{OM} \wedge m\vec{a} = \vec{OM} \wedge \sum \vec{f}_i \\ &= \sum_i \vec{OM} \wedge \vec{f}_i = \sum_i \vec{M}_{O_i} = \vec{M}_O \end{aligned}$$

En effet, le point O étant fixe,  $\frac{d(\vec{OM})}{dt} = \vec{v}$ .

## b) Par rapport à un axe fixe

La dérivée temporelle du moment cinétique de M par rapport à l'axe orienté fixe (Oz) est :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{z_i}$$

On démontre cette loi en remarquant que :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O \cdot \vec{u}_z)}{dt} = \frac{d(\vec{L}_O)}{dt} \cdot \vec{u}_z = \sum_i \vec{M}_{O_i} \cdot \vec{u}_z = \sum_i M_{zi}$$

En effet, l'axe (Oz) étant fixe, le vecteur  $\vec{u}_z$  est constant.

## VII – Solide en rotation

VII-1) Loi du moment cinétique pour un solide en rotation

Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_{zi}$$

Pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz), le moment d'inertie  $J_z$  est constant, alors :

$$\begin{aligned} J_z \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= \sum_i M_{zi} \\ \Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= \sum_i M_{zi} \end{aligned}$$

Le principe fondamental de la dynamique écrit pour un solide en translation rectiligne sur l'axe (0x) :

$$m\ddot{x} = \sum_i \vec{f}_{xi}$$

On remarque que :

- L'accélération linéaire  $\ddot{x}$  est remplacée par l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$
- Les forces projetées sur l'axe du mouvement par les moments des forces projetés sur l'axe de rotation
- La masse inerte  $m$  par le moment d'inertie.



## VII-2) Couples

## a) Couple de deux forces

Deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  opposées s'appliquant respectivement en  $A_1$  et  $A_2$  forment un couple de forces. Leur résultante est nulle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

Or :

$$M_z = -F_1 d_1 - F_2 d_2 \text{ avec } F_1 = F_2 = f$$

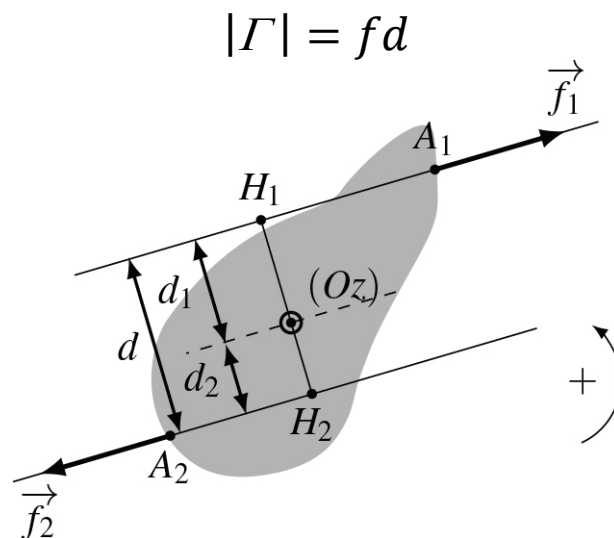
D'où :

$$|M_z| = f(d_1 + d_2) = fd$$

La distance  $d$  entre ces droites s'appelle le bras de levier du couple et le moment du couple de force par rapport à l'axe orienté  $(Oz)$  est égal au produit de la force par le bras de levier. :

$$|M_z| = fd_1 + fd_2 = fd$$

Par abus de langage, étant donné que la somme des deux forces est nulle et que seul le moment de ces forces est non nul, on le désigne souvent par couple :



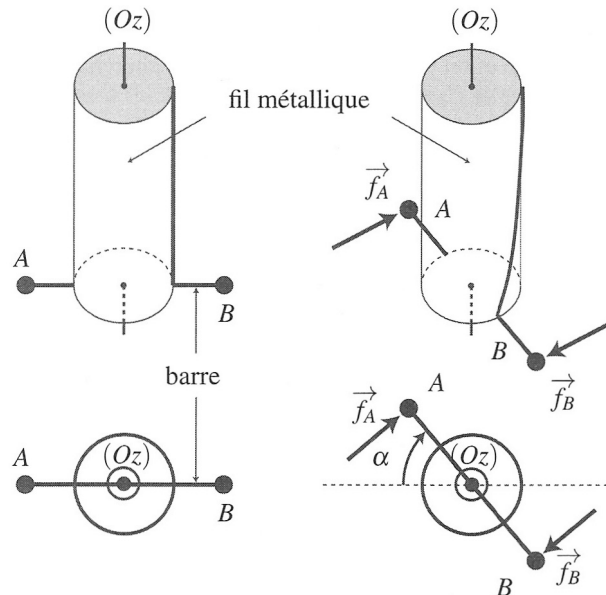
Un couple de deux forces telles que :  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

Peut s'exprimer sous la forme :  $\Gamma = \pm fd$

Il est algébrique et on peut trouver son signe en cherchant le sens dans lequel il tend à faire tourner  $M$  autour de l'axe orienté  $(Oz)$  : si ce sens est direct,  $\Gamma > 0$  sinon,  $\Gamma < 0$ .

## b) Couple de torsion

On considère un fil cylindrique métallique d'axe  $(Oz)$  dont la section supérieure est fixe et auquel on attache une barre  $AB$ . On applique un couple de forces de norme  $f$  aux extrémités  $A$  et  $B$  de la barre.



Couple de torsion d'un fil en perspective ou en vue du haut. À gauche, le fil de torsion est au repos. À droite, il est à l'équilibre sous l'action d'un couple. La section supérieure du fil est fixe.

Le moment par rapport à  $(Oz)$  de ce couple vaut :  $\Gamma_{1z} = f AB$  et conduit le fil à se tordre d'un angle  $\alpha$  appelé angle de torsion.

Dans le domaine d'élasticité du métal, le moment  $\Gamma$  du couple de torsion exercé par un fil métallique est proportionnel à l'angle de torsion  $\alpha$  :

$$\Gamma = -C\alpha \text{ où } C = \text{cste de torsion}$$

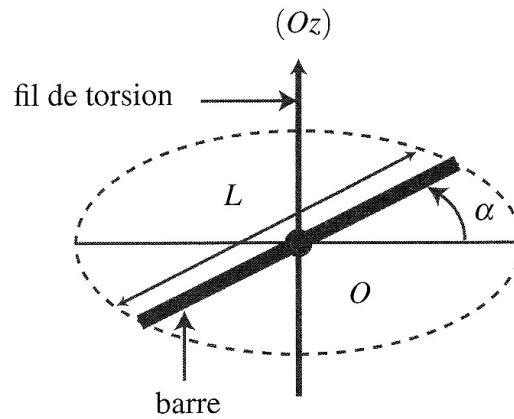
D'après la loi du moment cinétique appliquée à la barre à l'équilibre :

$$\Gamma_z = -\Gamma_{1z}$$

## VII-3) Pendule de torsion

On considère une barre solide horizontale de masse  $m$ , de longueur  $L$ , suspendue en son milieu  $O$  à un fil de torsion vertical de constante de torsion  $C$ . On étudie des mouvements dans lesquels le

fil reste vertical et la barre tourne autour du fil avec un mouvement oscillatoire, tout en restant dans un plan horizontal.



Pendule de torsion vu en perspective.

On applique à la barre la loi du moment cinétique par rapport à l'axe  $(Oz)$  fixe dans le référentiel  $R$  galiléen :

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \ddot{\alpha} = \Gamma = -C \alpha$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{C}{J_z}$$

Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont des fonctions sinusoïdales de pulsation  $\omega_0$ .

On peut également établir une intégrale première du mouvement à partir de l'équation précédente. Pour cela, on la multiplie par  $\dot{\alpha}$ :

$$J_z \ddot{\alpha} \dot{\alpha} + C \alpha \dot{\alpha} = J_z \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \right) + C \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha^2}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + C \frac{\alpha^2}{2} = \text{cste} = E_m$$

- Le terme  $J_z \frac{\dot{\alpha}^2}{2}$  correspond à l'énergie cinétique de la barre en rotation autour de  $(Oz)$ .
- Le terme  $C \frac{\alpha^2}{2}$  est l'énergie potentielle élastique stockée dans le

fil de torsion.

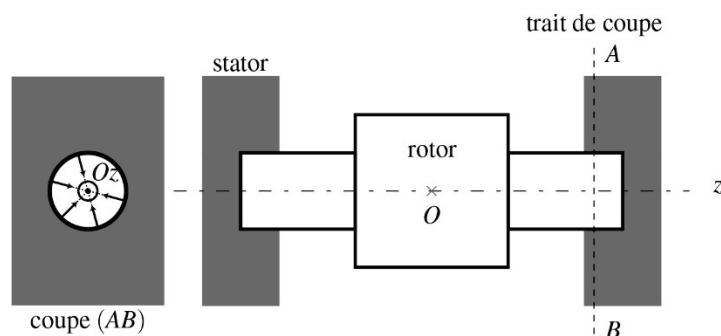
## VII-4) Pendule pesant

### a) Liaison pivot d'axe (Oz)

Une liaison pivot d'axe (Oz) restreint les possibilités de mouvement du rotor à une rotation d'axe (Oz) par rapport au stator.

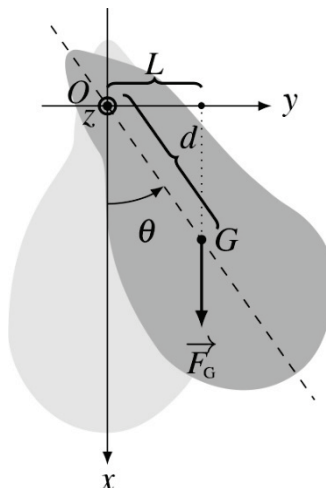
L'action de liaison d'une liaison pivot idéale d'axe (Oz) a un moment par rapport à l'axe (Oz) égal à 0 :

$$M_z(\text{pivot}) = 0$$



Le contact entre les deux cylindres conduit à l'existence de frottements que l'on peut réduire fortement en utilisant des roulements à billes ou à aiguilles.

### b) Equation du mouvement



Le solide est soumis à :

- L'action exercée par la liaison pivot. On suppose cette liaison pivot idéale, ce qui implique que son moment par rapport à l'axe (Oz) est nul ;
- Son poids vertical descendant qui s'applique au centre de gravité G tel que :

$$M_z = -mgdsin\theta$$

On applique au solide la loi du moment cinétique par rapport à l'axe orienté (Oz) fixe dans le référentiel terrestre R supposé galiléen :

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= J_z \ddot{\theta} = M_z = -mgdsin\theta \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgdsin\theta}{J_z} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0 \text{ où } \omega_0^2 = \frac{mgd}{J_z} \end{aligned}$$

Il s'agit de la même équation que celle que l'on a obtenue lors de l'étude du pendule simple.

c) Aspects énergétiques

$$\text{Soit : } J_z \ddot{\theta} + mgdsin\theta = 0$$

$$\Rightarrow J_z \dot{\theta} \ddot{\theta} + mgd\dot{\theta} sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2 - mgd cos\theta \right) = 0$$

Donc :

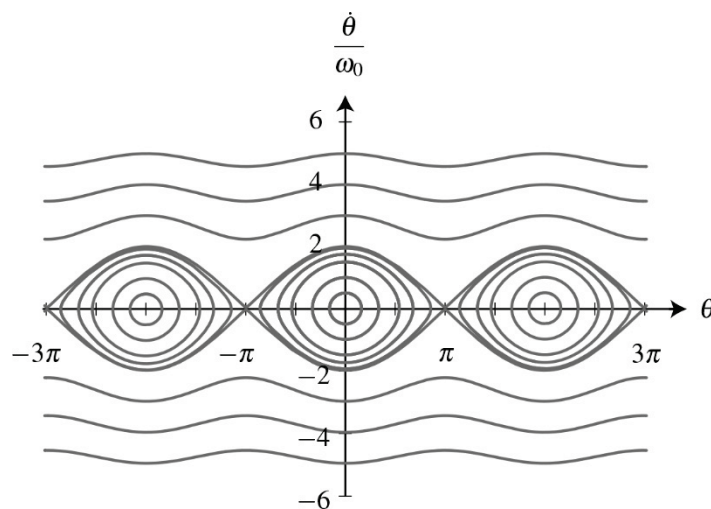
$$\underbrace{\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2}_{E_c} - \underbrace{mgd cos\theta}_{E_p} = E_m = cste$$

## d) Portrait de phase

On peut utiliser l'intégrale première du mouvement pour expliciter la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  en fonction de l'angle  $\theta$  et de l'énergie mécanique  $E_m$ . On trouve :

$$\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} = \mp \sqrt{2 \left( \frac{E_m}{mgd} + \cos \theta \right)}$$

On trace alors  $\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\frac{E_m}{mgd}$  pour obtenir le portrait de phase du pendule pesant.



- Les mouvements de faible amplitude sont pendulaires. Lorsque l'amplitude est faible, les trajectoires de phase sont elliptiques (et même circulaires avec des échelles des abscisses et des ordonnées adaptées), ce qui est la signature des oscillateurs harmoniques ;
- Lorsque l'amplitude devient importante, la trajectoire de phase se déforme mais reste fermée.
- Pour des énergies plus importantes, le mouvement est révolutif. L'angle  $\theta$  n'est plus borné.

## VII-5) Énergie d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

## a) Énergie cinétique d'un solide en rotation

On modélise le solide par un ensemble de points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$  repérés en coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$ . On a vu que le moment d'inertie du solide par rapport à  $(Oz)$  vaut alors :

$$J_z = \sum_i m_i r_i^2$$

L'énergie cinétique du solide est obtenue par sommation de l'énergie cinétique de chacun des points qui le constituent :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_i J_{zi} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i r_i^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

Un solide de moment d'inertie  $J_z$  en rotation autour d'un axe fixe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  possède l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2$$

## b) Puissance d'une force appliquée sur un solide en rotation

On considère une force  $\vec{F}_i$  qui s'applique au point  $M_i$  d'un solide en rotation autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ . La puissance de la force  $\vec{F}_i$  est égale au produit scalaire de la force par la vitesse du point  $M_i$  sur laquelle elle s'applique d'où :

$$P(\vec{F}_i) = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot r_i \dot{\theta} \vec{u}_\theta = F_i r_i \dot{\theta} = M_{zi} \dot{\theta}$$

La puissance de la force  $\vec{F}_i$  appliquée en un point  $M_i$  d'un solide en rotation autour d'un axe fixe  $(Oz)$ , est égale à :

$$P(\vec{F}_i) = M_{zi} \dot{\theta}$$

## VII-6) Loi de l'énergie cinétique pour un solide indéformable

La loi du moment cinétique pour un solide en rotation autour de l'axe (Oz) fixe implique :

$$\begin{aligned}
 J_z \ddot{\theta} &= \sum_i M_z(\vec{f}_i) \\
 \Rightarrow J_z \ddot{\theta} \dot{\theta} &= \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta} \\
 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2} J_z \dot{\theta}^2\right)}{dt} &= \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta} \\
 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} &= \sum_i P(\vec{f}_i)
 \end{aligned}$$

Dans le référentiel R galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe, est égale à la puissance de l'ensemble des forces extérieures  $\vec{F}_i$  qu'on lui applique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i) = \sum_i M_z(\vec{f}_i) \dot{\theta}$$

## VIII – Mouvement à forces centrales

## VIII-1) Forces centrales

## a) Définition

Soit O un point fixe de l'espace. Un point matériel M est dit soumis à une force centrale conservative s'il subit une force du type :

$$\vec{f} = f(r) \vec{u}_r \text{ avec } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$



## b) Conséquences

## - Conservation du moment cinétique

Un point matériel soumis à une force centrale possède forcément un moment cinétique constant. En effet :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = r\vec{u}_r \wedge f\vec{u}_r = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0 = \text{cste}$$

## - Mouvement plan

L'axe  $\vec{u}_z$ , est pris selon la direction fixe  $\vec{L}_0$ . D'après les propriétés du produit vectoriel,

$$\vec{OM} \cdot \vec{L}_0 = \vec{OM} \cdot (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{OM} \cdot \vec{u}_z = 0$$

Ainsi, le vecteur position reste toujours orthogonal à  $\vec{u}_z$  : la trajectoire est plane, contenue dans le plan  $z = 0$ .

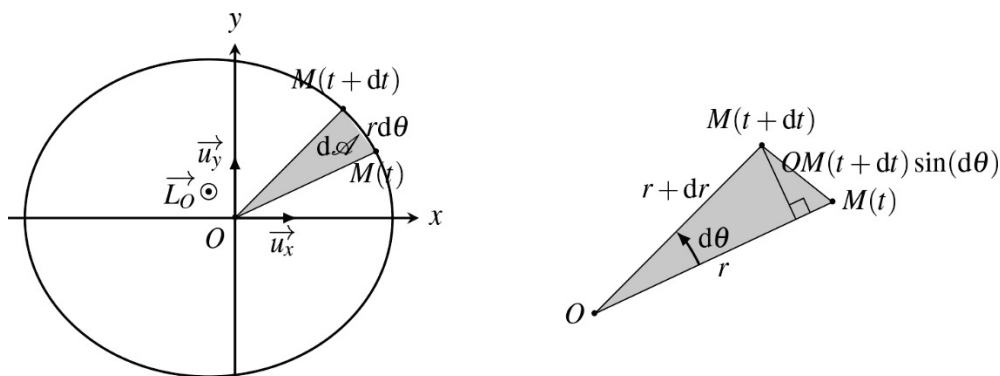
## - Loi des aires

Calculons  $\vec{L}_0$  :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = r\vec{u}_r \wedge m(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

On introduit la constante des aires qu'on note C tel que :

$$\vec{L}_0 = mC\vec{u}_z \text{ où } C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$$



Cette constante peut s'interpréter en termes de vitesse aréolaire. On appelle vitesse aréolaire  $V$  la vitesse à laquelle le rayon vecteur balaie l'aire  $dA$  définie par la trajectoire dans le plan du mouvement.

Or :

$$dA = \int_0^r r dr d\theta = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Donc :

$$V = \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cste}$$

La loi des aires représente la deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur repérant le mobile balaie pendant des durées égales des aires égales.

La conservation du moment cinétique entraîne que :

- Le mouvement est plan
- La loi des aires :  $\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \text{cste}$

### c) Énergie potentielle

Une telle force est forcément conservative. En effet, lorsque le point matériel se déplace de  $d\overrightarrow{OM}$  :

$$dE_p = f(r)\overrightarrow{u}_r \cdot (dr\overrightarrow{u}_r + r d\theta\overrightarrow{u}_\theta) = -f(r)dr$$

$$\text{Donc : } E_p = - \int f(r)dr$$

### VIII-2) Energie potentielle effective

Dans un champ à force centrale conservative, l'énergie potentielle ne dépend que de la variable radiale.

Écrivons l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  d'un point matériel de masse  $m$  mobile dans le champ de force central ;  $E_m$  est une constante du mouvement :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \end{aligned}$$

$$\text{où : } E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + E_p(r)$$

Tout se passe alors comme si un point de masse  $m$  se déplaçait le long d'un axe fixe, de coordonnée correspondante  $r$ , dans une nouvelle énergie potentielle. Celle-ci est appelée énergie potentielle effective :  $E_{p,eff}(r)$

Son énergie cinétique effective est alors naturellement :

$$E_{c,eff} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

Les zones accessibles au point matériel sont celles pour lesquelles  $E_{p,eff} < E_m$ .

### VIII-3) Champs newtoniens gravitationnels

#### a) Analyse qualitative

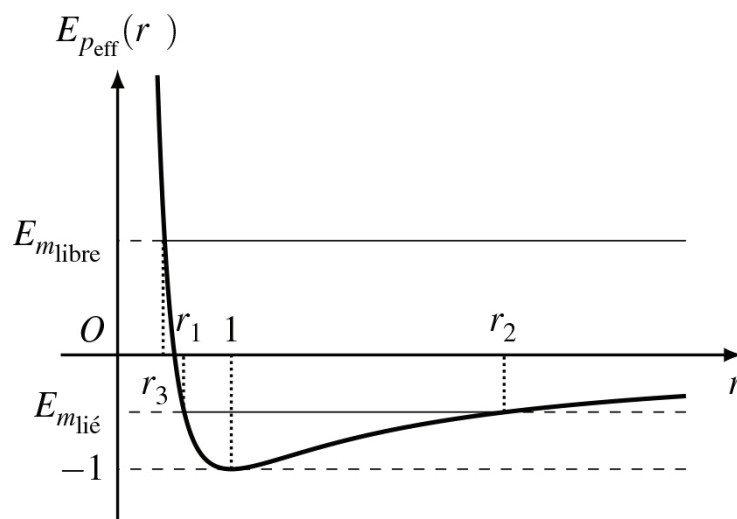
L'énergie potentielle est :

$$\vec{f} = \frac{k}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow E_p = \frac{k}{r} \text{ où } k = -Gmm' = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$$

On a :

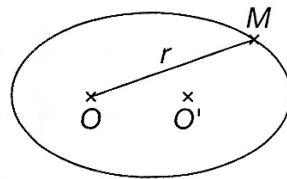
$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

$$\text{où : } E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r}$$



Les zones accessibles pour une énergie mécanique  $E_m$ , donnée sont celles pour lesquelles  $E_{p,eff}(r) \leq E_m$ . On distingue alors trois cas sur la figure :

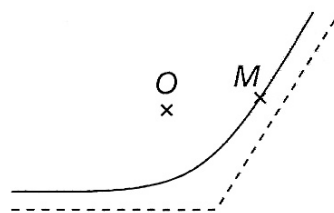
- $E_m < 0$  : la masse  $m$  est mobile dans la zone  $r_1 < r < r_2$  et reste à proximité du centre attracteur  $O$  : c'est un état lié. On admettra que de telles trajectoires sont des ellipses dont l'un des foyers est  $O$ .



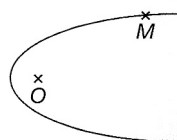
- $E_m > 0$ : la masse  $m$  a accès à la zone  $r \in (r_{min}, \infty)$  c'est clairement un état de diffusion. En fait, la masse réussit à s'arracher à l'attraction du centre  $O$ . Notamment, la norme de la vitesse de la masse est  $v_\infty$ , telle que :

$$E_m = E_c = \frac{1}{2} m v_\infty^2$$

Dans ce cas, on admet que la trajectoire est une branche d'hyperbole.



- $E_m = 0$  : il s'agit d'un cas un peu formel qui n'a que peu de chances de se produire vu que l'énergie mécanique doit être exactement nulle. La masse  $m$  pouvant aller jusqu'à l'infini, il s'agit d'un état de diffusion. Géométriquement, on admet qu'il s'agit d'une parabole.



Suivant le signe de l'énergie mécanique  $E_m$ , la trajectoire est :

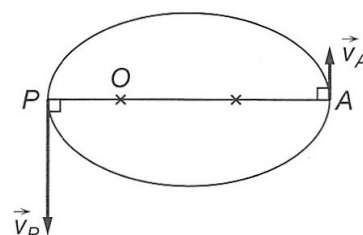
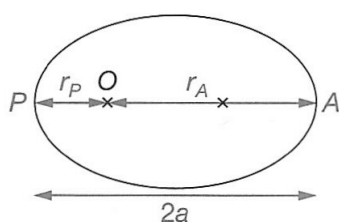
- Elliptique si  $E_m < 0$  ;
- Hyperbolique si  $E_m > 0$  ;
- Parabolique si  $E_m = 0$ .

## b) Trajectoires elliptiques

### i. Propriétés

La première loi de Kepler énonce que les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Détaillons quelques caractéristiques des orbites elliptiques, seuls états liés d'un champ newtonien :

- La distance au centre attracteur varie entre deux valeurs limites : maximale  $r_A$  atteinte au point A et minimale  $r_P$  atteinte au point P. Les points A et P se nomment respectivement apogée et périégée pour un satellite en orbite autour de la Terre, et aphélie et périhélie pour une planète autour du Soleil ; On nomme demi-grand axe noté  $a$  la demi-distance entre A et P :  $2a = AP$ ;
- Les deux points A et P de l'ellipse sont caractérisés par le fait que la norme de la vitesse  $v$  est respectivement minimale et maximale. Ce sont par ailleurs les seuls points de l'ellipse où la vitesse est orthoradiale, c'est-à-dire perpendiculaire au rayon vecteur.



ii. *Énergie mécanique d'une orbite elliptique*

Pour un point matériel en orbite elliptique autour d'une masse  $m'$  immobile en O, l'énergie mécanique  $E_m$ , est une constante du mouvement :

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gmm'}{r}$$

En l'évaluant aux points d'approche et d'éloignement maximaux notés précédemment A et P, la vitesse se réécrit :

$$v_a = v_p = r\dot{\theta} = \frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{r^2} - \frac{Gmm'}{r} \text{ aux points A et P}$$

$$\Rightarrow r^2 - \frac{1}{2} \frac{mC^2}{E_m} r + \frac{Gmm'}{E_m} = 0$$

Il est clair par construction que cette équation possède exactement deux racines positives,  $r_A$  et  $r_p$  :

$$r = -\frac{1}{2} \frac{Gmm'}{E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

Ainsi, le demi-grand axe a vérifie :

$$r_A + r_p = 2a = -\frac{Gmm'}{E_m}$$

Au final, on obtient l'expression de l'énergie mécanique pour une orbite elliptique :

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2a} = -\frac{|k|}{2a}$$

## c) Trajectoire circulaire

i. *Energie mécanique*

$$E_m = -\frac{Gmm'}{2r} = -\frac{|k|}{2r}$$

ii. *Première vitesse cosmique*

Le cas le plus simple de trajectoire liée est la trajectoire circulaire. Son rayon est noté  $r$ . Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse donne:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= -\frac{Gmm'}{r^2}\vec{u}_r \\ \Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \\ \Rightarrow m(-r\dot{\theta}^2) &= -\frac{Gmm'}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r^3}} \end{aligned}$$

Au final, la vitesse sur l'orbite circulaire de rayon  $r$  s'écrit :

$$v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{Gm'}{r}}$$

où  $m'$  est la masse du centre attracteur.

C'est ce que l'on nomme la première vitesse cosmique. C'est la vitesse minimale à communiquer à un objet pour le satelliser.

iii. *Troisième loi de Kepler*

La période du mouvement d'une masse  $m$  autour d'un astre immobile de masse  $m'$  est donnée par :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler : pour des astres orbitant autour d'un corps donné, le rapport du carré de la période sur le

cube du rayon de la trajectoire a toujours la même valeur, liée à la masse du corps attracteur.

Il est à noter que la troisième loi de Kepler reste valide pour les trajectoires elliptiques, à condition de remplacer le rayon par le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse :

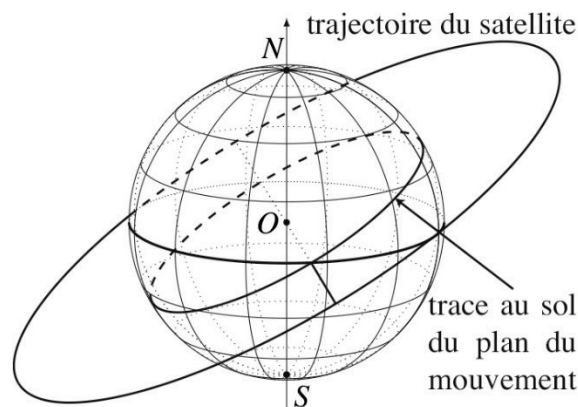
Troisième loi de Képler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm'}{4\pi^2}$$

#### iv. *Satellite géostationnaire*

Certains satellites de communication doivent toujours être positionnés au même endroit du ciel à partir d'un point terrestre (par exemple, certaines antennes paraboliques de télévision par satellite pointent vers un satellite donné et sont réglées une seule fois) : de tels satellites sont dits géostationnaires.

L'étude du mouvement du satellite est effectuée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, on a montré que l'orbite est située dans un plan qui contient le centre d'attraction de la force gravitationnelle. Le plan du mouvement contient donc nécessairement le centre de la Terre.



La figure montre la trajectoire d'un satellite dont le plan orbital est incliné par rapport au plan équatorial terrestre, ainsi que



l'intersection du plan du mouvement avec la sphère terrestre. Avec cette inclinaison, le satellite est situé tantôt au dessus de l'hémisphère nord et tantôt au dessus de l'hémisphère sud. Il n'est pas immobile pour un observateur terrestre qui va, au minimum, observer un mouvement apparent d'oscillations nord-sud. Le seul moyen d'éviter ce mouvement est d'annuler l'inclinaison de l'orbite.

Le plan de l'orbite d'un satellite géostationnaire coïncide nécessairement avec le plan équatorial de la Terre.

Cette situation correspond à une orbite circulaire de période  $T$  24 h. D'après l'expression de la vitesse circulaire on a :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{Gm'}} \Rightarrow r = \left( \frac{Gm'T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42000 \text{ km}$$

soit une altitude :  $h = 36000 \text{ km}$

#### VIII-4) Vitesse de libération

Au fur et à mesure qu'un objet est lancé à partir de la surface d'une planète avec une vitesse de norme de plus en plus importante, cet objet atteint des altitudes de plus en plus élevées (il s'agit ici d'une expérience de pensée vu que tous les frottements dus à l'air sont négligés). Il est intéressant de connaître la vitesse limite, pour laquelle l'objet partira au loin sans revenir, c'est ce que l'on nomme la vitesse de libération ou deuxième vitesse cosmique.

D'après la discussion précédente concernant la nature des trajectoires, le critère est très simple : l'objet doit posséder une énergie mécanique  $E_m$  positive.

Comme  $E_m$  est constante, on l'évalue au moment du lancer :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{Gmm'}{r^2} = E_m \geq 0$$

où  $R$  est le rayon de l'astre attracteur (et  $m'$  sa masse). Donc :

$$v_0 > \sqrt{\frac{2Gm'}{R}} \Leftrightarrow v_0 > v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2Gm'}{R}}$$

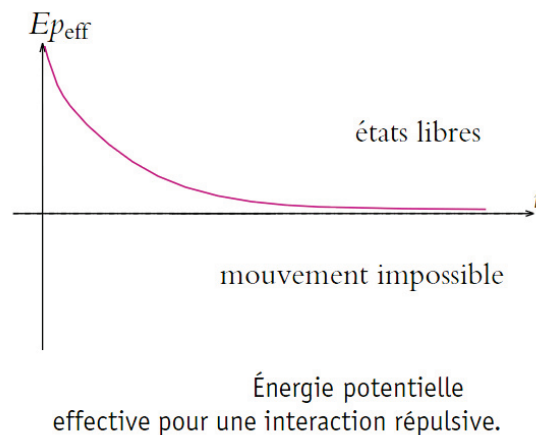
Numériquement, la vitesse de libération à la surface de la Terre est d'environ  $11,2 \text{ km.s}^{-1}$  et seulement de  $2,3 \text{ km.s}^{-1}$  à la surface de la Lune, qui est bien plus légère que la Terre.

### VIII-5) Champs newtoniens coulombiens

Dans ce cas,  $k > 0$  et :

$$E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \frac{k}{r} > 0$$

On a donc une fonction décroissante telle que :



On en déduit qu'il n'y a que des états libres possibles dans le cas d'un potentiel newtonien répulsif : ce sont des trajectoires hyperboliques.