

EM1 – Synthèse

- *Densité volumique de charges et vecteur densité de courant*

Pour un milieu constitué de porteurs de charges mobiles, de charge q , de densité volumique $n(M,t)$ et de vitesse $\vec{v}(M,t)$.

On définit :

- La densité volumique de charges : $\rho(M,t) = n(M,t) \cdot q$;
- Le vecteur densité de courant : $\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$

L'intensité du courant correspond au flux de charge au travers d'une surface orientée (S) :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

- *Bilan local de charge*

Le bilan local de charges s'écrit :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(M,t) = 0$$

- *Régime stationnaire*

Le flux de charges se conserve en régime stationnaire le long d'un tube de champ de champ de \vec{j} .

- Forme locale de la conservation du flux : $\text{div } \vec{j} = 0$
- Forme globale de la conservation du flux : la loi des nœuds,

$$\sum_i \varepsilon_k i_k = 0$$

- *Modèle microscopique de la conduction dans les métaux*

On modélise les actions extérieures appliquées sur un porteur de charges du métal par :

- Une force électrique de Lorentz modélisant l'action du champ électrique extérieur \vec{E} de fréquence f ;
- Une force de friction phénoménologique $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}$ modélisant les chocs liés à l'agitation thermique.

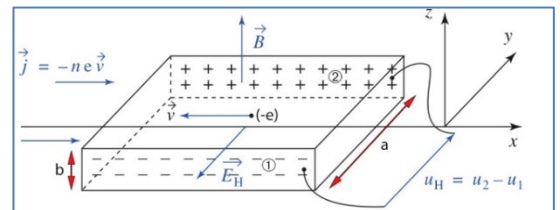
En appliquant la loi de la quantité de mouvement à un électron, on obtient :

- En régime quasistatique ($f \ll 10^{14} \text{ Hz}$) : $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$ où $\gamma_0 = \frac{nq^2}{\lambda} = \frac{nq^2 \tau}{m}$
- Sinon ($f \gg 10^{14} \text{ Hz}$) : $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E}$ où $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$

- *Effet Hall*

Lorsqu'un conducteur parcouru par un courant d'intensité I est placé en présence d'un champ magnétique transverse, il apparaît une différence de potentiel entre les deux plaques latérales du matériau appelée tension de Hall U_H . Pour un conducteur de géométrie rectangulaire :

$$U_H = R_H \frac{IB}{b} \text{ où } R_H = \frac{1}{ne}$$



- *Puissance électrique dissipée par effet Joule*

- La résistance d'une portion de conducteur filiforme, de longueur L , de section droite S est :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

- La puissance volumique cédée par le champ aux porteurs de charges de $d\tau$ s'écrit :

$$dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \text{ ou } \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

- Pour un conducteur filiforme de longueur L , de section droite S on retrouve : $P = RI^2$ où $R = \frac{L}{\gamma S}$

EM1 – SVF

- Montrer que le vecteur densité de courant de charges, en un point M de l'espace, vérifie : $\vec{j}(M,t) = \rho(M,t)\vec{v}(M,t)$
- Démontrer l'équation de conservation de la charge
- Montrer que la puissance volumique cédée par une onde électromagnétique vaut : $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$
- Montrer que la conductivité statique d'un conducteur vaut : $\gamma_0 = \frac{nq^2 \tau}{m}$ où τ est le temps moyen entre deux chocs.
- Montrer que le champ de Hall dans un ruban à effet Hall de section rectangulaire vaut $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Retrouver la loi des nœuds à partir de l'équation de conservation de la charge.

Exercices classiques à connaître :

- EM11 – Modèle de Drüde
- EM13 – Effet Hall

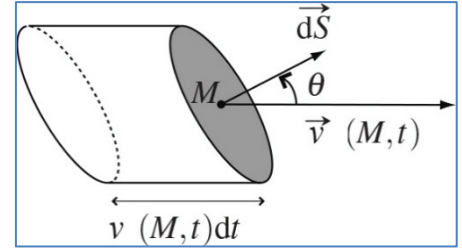
a) Montrer que le vecteur densité de courant de charges, en un point M de l'espace, vérifie : $\vec{j}(M, t) = \rho(M, t)\vec{v}(M, t)$

À l'instant t , les particules qui vont traverser S pendant l'intervalle de temps $[t, t + dt]$ sont situées dans le cylindre s'appuyant sur dS , de longueur vdt situé en amont de la surface.

Leur nombre est donc : $\delta N = n d\tau = n v dt dS \cos(\theta)$.

La charge est donc : $\delta q = q \delta N = nq v dt dS \cos(\theta)$.

Le débit de charges est : $di = \frac{\delta q}{dt} = nqv dS \cos(\theta) = nq\vec{v} \cdot \vec{dS}$



Or on définit le vecteur densité de courant par : $di = \vec{j} \cdot \vec{dS}$

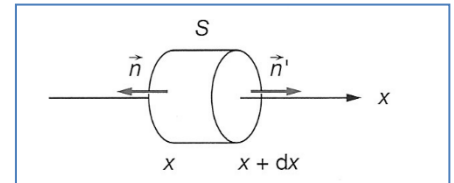
D'où :

$$\vec{j} = nq\vec{v} \Rightarrow \vec{j}(M, t) = \rho(M, t)\vec{v}(M, t) \text{ avec } i = \iint_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

b) Démontrer l'équation de conservation de la charge

On se place dans le cas d'un problème unidimensionnel, selon Ox. De ce fait, la densité volumique de charge s'écrit $\rho(x, t)$, la densité de courant $\vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$.

On raisonne sur un élément de longueur de conducteur de forme cylindrique, de section S , compris entre les abscisses x et $x + dx$.



- La variation de la charge au cours d'une durée élémentaire dt est donc :

$$dq = \delta q(t + dt) - \delta q(t) = \rho(x, t + dt)S dx - \rho(x, t)S dx$$

$$\Leftrightarrow dq = \frac{\partial \rho}{\partial t} S dx dt$$

- Durant dt , la quantité de charge qui entre par la face d'abscisse x est $\delta q = j(x, t)S dt$, tandis que celle qui sort par la face d'abscisse $x + dx$ est $\delta q' = j(x + dx, t)S dt$ d'où :

$$dq = \delta q_x - \delta q'_{x+dx} = S dt (j(x, t) - j(x + dx, t)) = - \frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

$$\Leftrightarrow dq = - \frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

D'où l'équation du bilan de charge électrique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} S dx dt = - \frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

qui se simplifie en :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

c) Montrer que la puissance volumique cédée par une onde électromagnétique vaut : $\frac{dP}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

On raisonne ici dans un élément de volume $d\tau$ contenant des particules chargées fixes par rapport au référentiel d'étude (quantité de charge $\rho_f d\tau$) et des particules mobiles à la vitesse \vec{v} (quantité de charge $\rho_m d\tau$).

Concernant les charges fixes, leur vitesse est nulle donc la force de Lorentz ne travaille pas : $dP = 0$, par conséquent :

$$dP = \vec{f}_v d\tau \cdot \vec{v} = (\rho_m \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow dP = \rho_m d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} \text{ car } \vec{j} \text{ colinéaire à } \vec{v}$$

$$\text{Or } \vec{j} = \rho_m \vec{v} \Rightarrow dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

d) Montrer que la conductivité statique d'un conducteur vaut : $\gamma_0 = \frac{nq^2\tau}{m}$ où τ est le temps moyen entre deux chocs.

On considère individuellement une particule mobile de charge q et masse m , qui se déplace sous l'effet du champ électrique \vec{E} constant. Si la force électrique était seule en jeu, la vitesse du porteur croîtrait aussi longtemps que le champ serait appliqué, ce qui n'est pas réaliste. On modélise donc l'interaction du porteur de charge avec le milieu par une force de frottement qui modélise les chocs subis par les électrons de la part des impuretés, imperfection du réseau cristallin

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} \text{ où } \tau \text{ représente le temps moyen entre deux chocs}$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$\frac{m d\vec{v}}{dt} = -\lambda \vec{v} + q \vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\lambda}{m} \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

Une constante de temps $\tau = \frac{m}{\lambda}$ apparaît, qui représente l'ordre de grandeur de la durée nécessaire à l'amortissement du régime transitoire.

$$\Rightarrow \vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \frac{q}{\lambda} \vec{E}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q}{\lambda} \vec{E}$$

En quelques fois la durée τ , la vitesse tend vers la limite :

$$\vec{v}_{lum} = \frac{q}{\lambda} \vec{E} = \mu \vec{E}$$

Le facteur de proportionnalité μ traduit la mobilité du porteur.

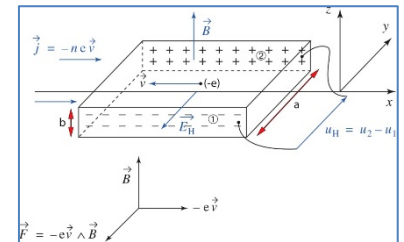
La densité de courant tient compte de l'assemblée des porteurs de charge, elle s'exprime en régime stationnaire par $\vec{j} = nq\vec{v}$ et tend donc vers une valeur proportionnelle au champ électrique :

$$\vec{j} = nq\vec{v}_{lum} = nq \frac{q}{\lambda} \vec{E} = \frac{nq^2}{\lambda} \vec{E} = \frac{nq^2 \tau}{m} \vec{E} \Rightarrow \gamma_0 = \frac{nq^2 \tau}{m}$$

Pour le Cuivre : $\gamma_0 = 6.10^7 Sm^{-1} \Rightarrow \tau = 2.5 \cdot 10^{-14} s$

e) Montrer que le champ de Hall dans un ruban à effet Hall de section rectangulaire vaut $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

L'effet Hall a été découvert par Edwin Herbert Hall (1855-1938) en 1879, lors de sa thèse de doctorat. On étudie ici le modèle classique qui permet d'expliquer cet effet. On considère un ruban conducteur, de section rectangulaire de largeur a et d'épaisseur b (dans la direction perpendiculaire au schéma). Un courant d'intensité I le parcourt et on soumet l'ensemble à un champ magnétique perpendiculaire au ruban.



On suppose que les porteurs de charges sont des électrons : ils sont animés d'un mouvement rectiligne de vitesse \vec{v} dans le sens opposé à I par définition du sens conventionnel du courant.

Quand on applique le champ magnétique, les électrons subissent la force d'origine magnétique qui dévie leur trajectoire. Les électrons ont donc tendance à s'accumuler sur la face 1 de la plaque de métal créant une accumulation de charges négatives de ce côté et une accumulation de charges positives de l'autre. Il y a apparition d'un champ électrique \vec{E}_H liée à ce déséquilibre.

Les électrons subissent alors l'action conjuguée de deux forces :

- L'une magnétique : $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$
- L'autre électrique : $\vec{F}_H = -e \vec{E}_H$

Tant que le module de F_H est inférieur au module F_m , la force résultante est dans le sens de la force magnétique et les électrons sont toujours déviés dans le même sens que précédemment ce qui va donc augmenter E_H . Le système va donc tendre vers un régime permanent tel que : $\vec{F}_m + \vec{F}_H + \vec{F}_0 + \vec{F}_v = \vec{0}$

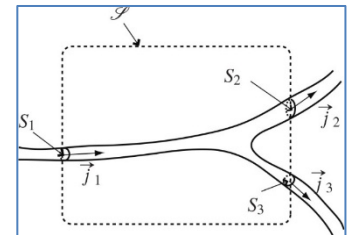
Ainsi sur (Oy) on obtient : $\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

f) Retrouver la loi des nœuds à partir de l'équation de conservation de la charge.

En régime stationnaire $div \vec{j} = 0$ d'où : $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

On considère un conducteur parcouru par un courant de densité volumique \vec{j} , présentant un nœud, par conséquent :

$$\iint_{S_1} \vec{j}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_3 \cdot d\vec{S}_3 = 0$$



En tenant compte du fait que la normale à $d\vec{S}_1$ n'est pas dans le même sens que les deux autres on obtient : $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$ ce qui est bien la loi des nœuds, vue en première année.

EM2 – Synthèse

- *Équations locales de l'électrostatique*

En régime stationnaire, les équations de Maxwell se découpent et le champ de densité volumique de charge $\rho(P)$ apparaît comme l'unique source du champ électrostatique $\vec{E}(M)$, solution des équations locales de l'électrostatique :

$$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ (Maxwell – Gauss) et } \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \text{ (Maxwell – Farady en statique)}$$

Le caractère linéaire de ces équations garantit la validité d'un principe de superposition autorisant le découpage des sources en sources plus simples pour le calcul du champ.

- Potentiel électrostatique

Une propriété d'analyse vectorielle montre que l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0}$ est équivalente à l'existence du potentiel électrostatique V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

L'énergie potentielle d'une charge q dans un champ \vec{E} s'écrit donc $E_p = qV$.

- Loi de Coulomb

L'existence du potentiel électrostatique peut aussi être démontrée en postulant la loi de Coulomb, c'est-à-dire l'expression de la force d'interaction entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 séparées d'une distance r :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

Une charge ponctuelle q crée un champ et du potentiel électrostatique en M tel que :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \text{ et } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- Propriétés de symétrie

La distribution de charge étant à l'origine du champ électrostatique, ce dernier restitue les propriétés de symétrie de $\rho(P)$. En particulier, si certaines transformations laissent $\rho(P)$ invariante, alors elles laissent aussi le champ invariant. De plus :

- si $M \in (\Pi_s)$ plan de symétrie de la distribution de charge, $\vec{E}(M) \in (\Pi_s)$;
- si $M \in (\Pi_a)$ plan d'antisymétrie de la distribution de charge, $\vec{E}(M) \perp (\Pi_a)$
- si $M' = \text{sym}_{\Pi_s}(M) \Rightarrow \vec{E}(M') = \text{sym}_{\Pi_s} \vec{E}(M)$
- si $M' = \text{sym}_{\Pi_a}(M) \Rightarrow \vec{E}(M') = -\text{sym}_{\Pi_a} \vec{E}(M)$

- Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss constitue la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss et un outil puissant de calcul de champ créé par une distribution continue de haute symétrie. Pour toute surface fermée (Σ) orientée par sa normale sortante,

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Où Q_{int} est la charge contenue à l'intérieur de (Σ). L'efficacité du théorème repose sur le choix d'une surface fermée adaptée aux symétries de la distribution.

- Propriétés topographiques

Les lignes de champ :

- Font apparaître les invariances et les symétries de la distribution ;
- Ne peuvent pas être fermées : elles commencent et se terminent sur une charge ou à l'infini, ce qui permet de repérer d'éventuelles charges ponctuelles ;
- Sont radiales et fuyantes (respectivement rentrantes) au voisinage des charges positives (respectivement négatives) ;
- Sont orthogonales aux lignes équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

La norme du champ \vec{E} décroît lorsque les tubes de champ s'évasent. La moyenne de la norme du champ électrostatique sur une portion de ligne de champ de longueur l comprise entre deux équipotentielles V_1 et V_2 s'écrit $E = \frac{V_1 - V_2}{l}$.

EM2 – SVF

- a) Justifier que les lignes de champ de \vec{E} sont : toujours ouvertes, perpendiculaires aux équipotentielles et dirigées vers les potentiels décroissants.

Exercices classiques à connaître :

- ...

- a) Justifier que les lignes de champ de \vec{E} sont : toujours ouvertes, perpendiculaires aux équipotentielles et dirigées vers les potentiels décroissants.

- D'après le théorème de Stokes :

$$\overline{\text{rot}}\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Envisageons une ligne de champ de \vec{E} alors $\vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$ ainsi si on somme sur une ligne de champ fermée on obtient :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} > 0$$

C'est contradictoire donc il n'existe pas de lignes de champ fermées pour \vec{E} .

- Soient M et M' deux points voisins sur la surface équipotentielle de potentiel V_0 , comme le montre la figure, ils sont au même potentiel et très proches l'un de l'autre.

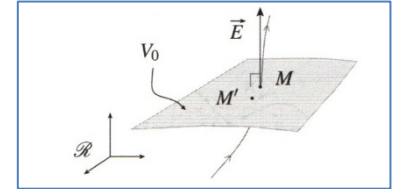
En effectuant le passage à la limite $\overline{MM'} = d\overline{OM}$, on peut écrire :

$$V(M') - V(M) \sim dV_0 = 0 \Rightarrow dV_0 = \overline{\text{grad}} V_0 \cdot d\overline{OM} = -\vec{E} \cdot \overline{MM'} = 0$$

et donc finalement :

$$\vec{E} \cdot \overline{MM'} = 0$$

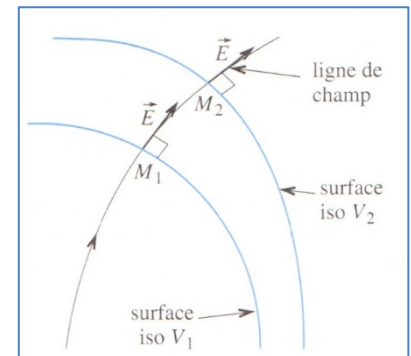
On en déduit que le champ électrique est perpendiculaire en tout point à la surface équipotentielle.



- Le lien entre le champ électrique et le potentiel, $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V$, montre que le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants. On suppose $V_1 > V_2$:

$$dV = V_2 - V_1 = \overline{\text{grad}} V \cdot \overline{M_1 M_2} = -\vec{E} \cdot \overline{M_1 M_2} < 0$$

$\Rightarrow \vec{E}$ est donc de même sens que $\overline{M_1 M_2}$ avec $V_1(M_1) > V_2(M_2)$. Il pointe donc vers les potentiels décroissants.



EM3 – Synthèse

- Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss constitue la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss et un outil puissant de calcul de champ créé par une distribution continue de haute symétrie. Pour toute surface fermée (Σ) orientée par sa normale sortante,

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Où Q_{int} est la charge contenue à l'intérieur de (Σ). L'efficacité du théorème repose sur le choix d'une surface fermée adaptée aux symétries de la distribution.

- Condensateur plan

Un condensateur plan dont les armatures de surface S sont séparées par une épaisseur e de vide peut être modélisé par la superposition de deux plans infinis uniformément chargés. Le champ est uniforme entre les armatures et nul en dehors. $q = CU$, où $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ est la capacité du condensateur.

- Energie de cohésion

L'énergie de cohésion du noyau atomique, due à l'interaction forte, est de l'ordre du MeV. Cet ordre de grandeur peut être retrouvé en cherchant l'énergie de constitution du noyau, c'est-à-dire le travail nécessaire pour vaincre la répulsion électrostatique en empilant des couches chargées concentriques dont l'ensemble modélise les protons du noyau.

EM3 – SVF

- Calculer le champ \vec{E} puis le potentiel V , créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne chargé uniformément.
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un cylindre infiniment long chargé uniformément en volume.
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un cylindre infiniment long chargé uniformément en surface.

- Calculer le champ \vec{E} puis V , créé en tout point de l'espace par une sphère chargée uniformément en volume.
- Calculer l'énergie de constitution du noyau.
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par une sphère chargée uniformément en surface
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par une surface plane d'épaisseur e infiniment longue chargée uniformément en surface.
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un plan infiniment long chargé uniformément en surface.
- Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un condensateur plan uniformément en surface.

Exercices classiques à connaître :

- EM33 – Champ dans une cavité sphérique.
- EM35 – Champ créé par une boule.
- EM36 – Recherche d'une distribution de charges.

a) Calculer le champ \vec{E} puis le potentiel V créé en tout point de l'espace par un fil rectiligne chargé uniformément.

La distribution de charges, source du champ électrostatique est un fil infini chargé uniformément. On note λ la densité linéique de charge.

- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation.

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace sont (r, θ, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, donc le champ électrique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et translation selon (Oz) , donc le champ électrique ne dépend que de r en valeur :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

De même le potentiel V ne dépend que de r , $V(M) = V(r)$.

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

On construit la surface de Gauss en limitant le cylindre d'axe (Oz) à un tronçon de hauteur h , sa surface latérale Σ_{lat} réunie avec les deux surfaces transversales Σ_{tran} qui sont les disques de rayon r d'axe (Oz) constituent une surface fermée, qui convient comme surface de Gauss Σ . Le flux de \vec{E} sortant des surface transversales est nul puisque leur normale est selon \vec{u}_z ; et le champ est partout radial.

Le théorème de Gauss mène à :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_{tran}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \\ \Leftrightarrow \vec{E}(M) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{aligned}$$

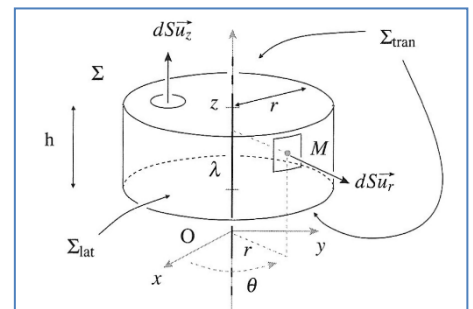
- Calcul du potentiel électrostatique

On calcule le potentiel électrostatique $V(r)$ en intégrant :

$$dV = -E dr \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + K$$

K est la constante d'intégration. Finalement :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ avec } V(r_0) = 0$$



b) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un cylindre infiniment long chargé uniformément en volume.

- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation.

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace sont (r, θ, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, donc le champ électrique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et translation selon (Oz), donc le champ électrique ne dépend que de r en valeur :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

On construit la surface de Gauss en limitant le cylindre d'axe (Oz) à un tronçon de hauteur h, sa surface latérale Σ_{lat} réunie avec les deux surfaces transversales Σ_{tran} qui sont les disques de rayon r d'axe (Oz) constituent une surface fermée, qui convient comme surface de Gauss Σ . Le flux de \vec{E} sortant des surface transversales est nul puisque leur normale est selon \vec{u}_z ; et le champ est partout radial.

Le théorème de Gauss mène à :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_{tran}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Or:

$$\begin{cases} \text{si } r < a : Q_{int} = \iiint_{V_{Gauss}} \rho_0 d\tau = \rho_0 \pi r^2 h \\ \text{si } r > a : Q_{int} = \iiint_{V_{Gauss}} \rho_0 d\tau = \iiint_{V_{Distri}} \rho_0 d\tau = \rho_0 \pi a^2 h \end{cases}$$

Par conséquent:

$$\begin{cases} \vec{E}(r < a) = \frac{\rho_0 \pi r^2 h}{2\pi r h \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r > a) = \frac{\rho_0 \pi a^2 h}{2\pi r h \epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{cases}$$

c) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un cylindre infiniment long chargé uniformément en surface.

- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation.

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace sont (r, θ, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, donc le champ électrique en M s'écrit : $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et translation selon (Oz), donc le champ électrique ne dépend que de r en valeur :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

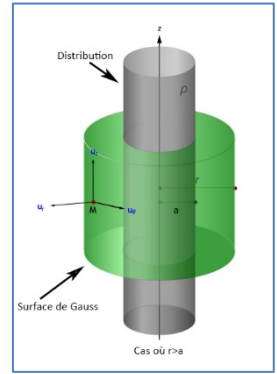
On construit la surface de Gauss en limitant le cylindre d'axe (Oz) à un tronçon de hauteur h, sa surface latérale Σ_{lat} réunie avec les deux surfaces transversales Σ_{tran} qui sont les disques de rayon r d'axe (Oz) constituent une surface fermée, qui convient comme surface de Gauss Σ . Le flux de \vec{E} sortant des surface transversales est nul puisque leur normale est selon \vec{u}_z ; et le champ est partout radial.

Le théorème de Gauss mène à :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_{tran}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \text{si } r < a : Q_{int} = 0 \\ \text{si } r > a : Q_{int} = Q_0 = \sigma 2\pi a h \end{cases}$$

Par conséquent:



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < a) = \vec{0} \\ \vec{E}(r > a) = \frac{Q_0}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{\sigma 2\pi a h}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

d) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par une sphère chargée uniformément en volume.

La distribution de charge envisagée dans cet exemple est une boule de rayon R, de charge Q homogène, centrée en 0 origine du repère.

- Choix d'un repérage adapté

Le repérage sphérique est le mieux adapté à la situation. La distribution de charge est caractérisée par la charge volumique $\rho(r)$ tel que : $\rho(r > R) = 0$ et $\rho(r < R) = \rho_0$.

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans qui contiennent 0 et M sont plans de symétrie de la distribution de charge. On en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

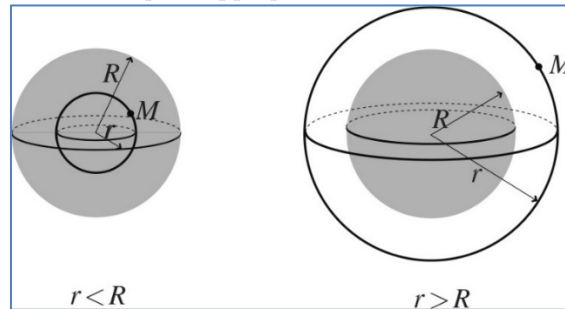
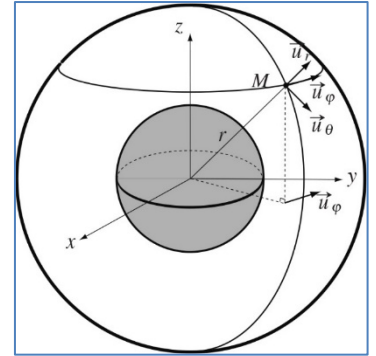
- Étude des invariances

La distribution de charge est invariante par rotation autour de tous les axes qui passent par 0, on en déduit que :

$$E(M) = E(r).$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

Sur la sphère de centre 0 et rayon r, le champ de gravitation prend en tout point la même valeur. On choisit comme surface de Gauss donc la sphère Σ de volume V pour appliquer le théorème de Gauss.



D'après le théorème de Gauss :

$$\iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Or } \left\{ \begin{array}{l} Q_{int}(r > R) = Q \\ Q_{int}(r < R) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

On remarque que la boule vue de l'extérieur est équivalente à une charge ponctuelle située au centre.

Or : $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -E dr$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \\ V(r < R) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \end{array} \right.$$

Par convention : A=0 et, on calcule B par continuité de V :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{QR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \Leftrightarrow B = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} V(r > a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r < a) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right) \end{array} \right.$$

e) Calculer l'énergie de constitution du noyau.

L'énergie de constitution de cette sphère est définie comme le travail qu'il faut fournir, de manière quasistatique, pour la construire en prenant les charges à l'infini. On va considérer qu'on construit la sphère très lentement et on supposera à chaque instant le système à l'équilibre sous l'action de l'opérateur qui construit la sphère et de l'interaction électrostatique avec la portion de sphère déjà créée.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dF}_{op} + \overrightarrow{dF}_{elec} &= \vec{0} \Rightarrow \delta^2 W_{op} = -\delta^2 W_{elec} = d^2 E_p \\ &\Rightarrow \delta W_{op} = dE_p(\text{final}) - dE_p(\text{initial}) \end{aligned}$$

La sphère de rayon r a déjà été construite, elle porte la charge $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, l'opérateur va amener la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ (couronne sphérique concentrique) de l'infini à r .

$$\begin{aligned} \delta W_{op} &= dE_p(\text{final}) - dE_p(\text{initial}) \\ &\Rightarrow \delta W_{op} = dq(V(r) - V(\infty)) \\ \Rightarrow \delta W_{op} &= dq \left(\rho \frac{4}{4\pi\epsilon_0 r} - 0 \right) = \rho 4\pi r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \\ &\Rightarrow \delta W_{op} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} r^4 \end{aligned}$$

Pour obtenir la sphère de rayon R , on intègre cette expression pour r variant de 0 à R , il vient :

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\epsilon_0} \frac{R^5}{5}$$

$$\text{Or : } Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho^2 = \frac{9}{16\pi^2 R^6} Q^2$$

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \times \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \times \frac{R^5}{5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}$$

L'énergie électrostatique de constitution d'un noyau atomique est égale à :

$$E_{noyau} = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} > 0$$

f) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par une sphère chargée uniformément en surface

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans qui contiennent 0 et M sont plans de symétrie de la distribution de masse. On en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

- Étude des invariances

La distribution de charge est invariante par rotation autour de tous les axes qui passent par 0, on en déduit que :

$$E(M) = E(r).$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

Sur la sphère de centre 0 et rayon r , le champ de gravitation prend en tout point la même valeur. On choisit comme surface de Gauss donc la sphère Σ de volume V pour appliquer le théorème de Gauss.

D'après le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \text{Or } \begin{cases} Q_{int}(r > R) &= Q \\ Q_{int}(r < R) &= 0 \end{cases} \\ \text{d'où } \begin{cases} \vec{E}(r > R) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma_0 \times 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma_0 R^2}{\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r < R) &= 0 \vec{u}_r \end{cases} \end{aligned}$$

g) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par une surface plane d'épaisseur e infiniment longue chargée uniformément en surface.

- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cartésien est le mieux adapté. Les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace sont (x, y, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans contenant la droite (M, \vec{u}_z) sont des plans de symétrie de la distribution de charge, donc le champ électrique en M est dirigé selon \vec{u}_z et s'écrit : $\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_z$

- Étude des invariances

La distribution de charges est invariante par toute translation selon (Ox) et selon (Oy), donc la valeur du champ

électrique ne dépend que de z : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

On construit la surface de Gauss en réunissant une portion Σ_1 de Σ' d'aire S , autour du point M , avec la surface Σ_2 , d'aire S , autour du point M' symétrique de M par rapport à la distribution de charges, car le champ électrique est le symétrique du champ en M , et on ferme la surface par la surface latérale.

Le flux du champ électrique à travers Σ_{lat} est nul, car le champ électrique est perpendiculaire à la normale à la surface en tout point.

On applique le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \iint_{\Sigma_{lat}} E(z)\vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_1} E(z)\vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} E(-z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z)$$

$$= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow 2E(z)S_0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \text{Si } |z| > \frac{e}{2}: Q_{int} = \rho e S_0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \text{sign}(z)\vec{u}_z \\ \text{Si } |z| < \frac{e}{2}: Q_{int} = \rho(2z)S_0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

h) Calculer le champ \vec{E} et le potentiel V avec $V(0)=0$, créé en tout point de l'espace par un plan infiniment long chargé uniformément en surface.

La distribution de charges source du champ électrostatique est le plan $(0,x,y)$ chargé uniformément avec une densité surfacique de charges σ .

Les symétries et invariances restent inchangées, on applique le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow 2E(z)S_0 = \frac{\sigma S_0}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z$$

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) = -\frac{dV}{dz}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + A' \\ V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z + A'' \end{cases}$$

La continuité de V en $z=0$ impose $A' = A'' = 0$, D'où :

$$\begin{cases} V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \\ V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z \end{cases}$$

i) Calculer le champ \vec{E} créé en tout point de l'espace par un condensateur plan.

Pour faire cette étude, on modélise le condensateur comme un ensemble de deux plans A et B distants de e et portant respectivement les densités surfaciques de charges $\sigma = \frac{Q}{S}$ pour A et $-\sigma$ pour B. Cette modélisation revient à négliger les effets de bord.

- Symétries et invariances :

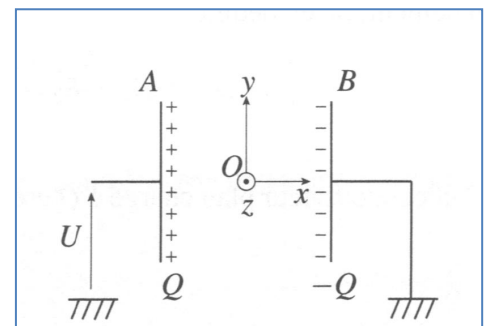
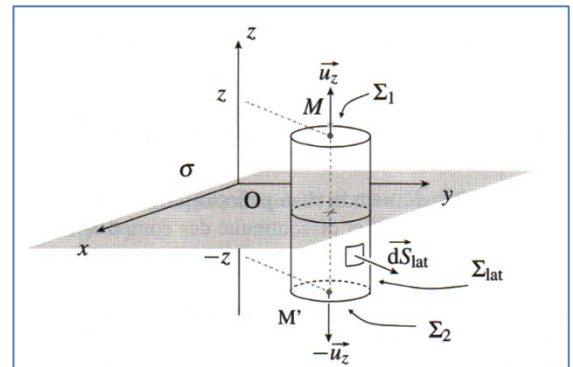
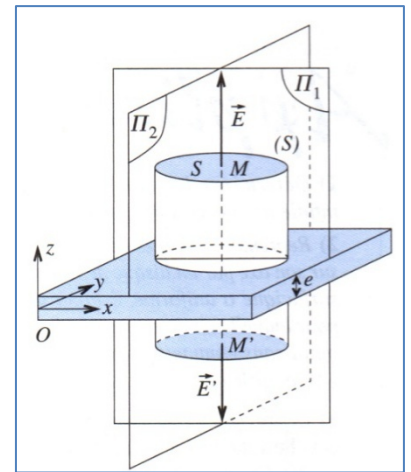
Les plans $\Pi(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $\Pi'(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie pour la distribution de charge du condensateur d'extension finie ; si on néglige les effets de bords. On en déduit qu'en tout point M où le champ est défini, le champ est porté par \vec{u}_x :

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_x$$

De plus, en considérant les armatures comme des plans infinis, la distribution de charge est invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z , on en déduit :

$$\vec{E}(M) = E(x)\vec{u}_x$$

- Calcul de \vec{E}



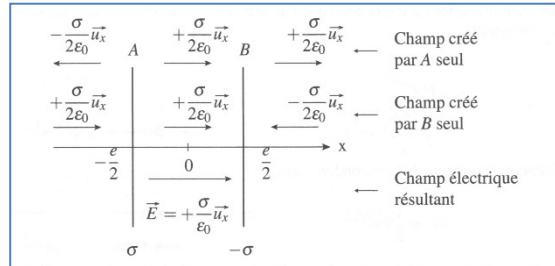
En dehors des armatures, l'espace entre les armatures est vide de charge, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0$$

On en déduit que dans chacune des trois zones : $x < -\frac{e}{2}$, $-\frac{e}{2} < x < \frac{e}{2}$ et $x > \frac{e}{2}$ le champ électrique est uniforme et vaut respectivement : E_- , E_0 , E_+ .

Pour déterminer E_- , E_0 , E_+ , on applique un raisonnement par superposition, en utilisant les résultats établis sur le plan chargé uniformément. Ainsi chaque plan A et B, contribue de la façon suivante :

$$A \begin{cases} \vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x > -\frac{e}{2} \\ \vec{E}_A = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x < -\frac{e}{2} \end{cases} \quad B \begin{cases} \vec{E}_B = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x > \frac{e}{2} \\ \vec{E}_B = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x < \frac{e}{2} \end{cases}$$



On construit le champ total par superposition et on obtient : $E_- = E_+ = 0$ et $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ d'où la conclusion :

Un condensateur plan chargé à Q crée :

- A l'intérieur des armatures, un champ électrique uniforme $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{Q \rightarrow -Q}$
- A l'extérieur des armatures un champ nul.

EM4 – Synthèse

- Moment dipolaire

Le moment dipolaire électrique d'un dipôle est le vecteur, dirigé de N vers P : $\vec{p} = q \overline{NP}$

- Approximation dipolaire

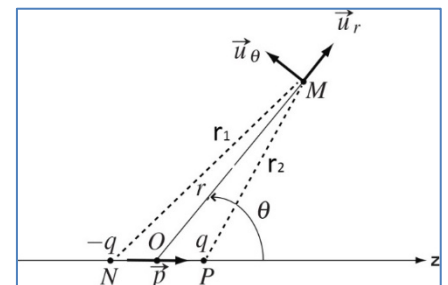
Dans le cas de l'approximation dipolaire $r \gg a$, on démontre que :

$$V(M) = \frac{qac \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et } \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p})$$

- Actions sur un dipôle

En présence d'un champ extérieur, le dipôle a tendance à s'aligner avec le champ extérieur et à se diriger vers les zones de fort champ. Ces actions s'écrivent :

$$\vec{F} = \operatorname{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}), \vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}, E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \text{ où } \vec{E} = \vec{E}_{ext}$$



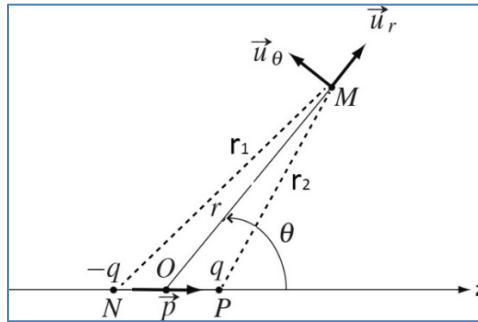
EM4 – SVF

- Calcul du potentiel créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire
- Calcul du champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire.
- Retrouver les expressions des actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique dans un champ extérieur variant faiblement au niveau du dipôle.

Exercices classiques à connaître :

- EM41 – Champ et potentiel créés par deux fils infinis.

a) Calcul du potentiel créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire



Approximation dipolaire : On calcule le potentiel dans le cas où $r \gg a$ où $a = NP$

Soit :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} r_2^2 = (\overline{PO} + \overline{OM})^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\overline{PO} \cdot \overline{OM} \\ r_1^2 = (\overline{NO} + \overline{OM})^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\overline{NO} \cdot \overline{OM} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_2^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\overline{OP} \cdot \overline{OM} = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos\theta \\ r_1^2 = \frac{a^2}{4} + r^2 + 2\frac{a}{2}r \cos\theta = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos\theta \end{cases}$$

Par un développement limité en a/r , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) \\ \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r} \cos\theta \right)^{-1/2} \sim \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right) \end{cases}$$

D'où :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta - 1 + \frac{1}{2} \frac{a}{r} \cos\theta \right)$$

$$\Leftrightarrow V(M) = \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) Calcul du champ électrostatique créé par un dipôle électrostatique dans le cadre de l'approximation dipolaire.

Soit : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = 2 \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{q a \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q a \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos\theta \vec{u}_r + p \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{u}_r = p \cos\theta \\ \vec{p} \cdot \vec{u}_\theta = -p \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2p \cos\theta \vec{u}_r = 2(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r \\ p \sin\theta \vec{u}_\theta = -(\vec{p} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - ((\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r + (\vec{p} \cdot \vec{u}_\theta) \vec{u}_\theta)]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{p}]$$

c) Retrouver les expressions des actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique dans un champ extérieur variant faiblement au niveau du dipôle.

- Force

$$\text{Soit : } \vec{F} = q (\vec{E}(P) - \vec{E}(N))$$

Calculons F_x dans le cas où le champ varie faiblement au niveau du dipôle :

$$\text{D'où } \begin{cases} E_x(P) = E_x(A) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ E_x(N) = E_x(A) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\Delta y}{2} \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_x}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_x = q \left(\Delta x \frac{\partial E_x}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial E_x}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x(A)$$

On généralise : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}(A)$ où $\vec{E} = \vec{E}_{ext}$ ainsi :

- Si le champ est uniforme : $\vec{F} = \vec{0}$
- Si le dipôle est rigide on peut écrire : $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})_A$

- Couple

Supposons le champ extérieur faiblement variable au niveau du dipôle : $\vec{E}(P) \sim \vec{E}(A)$ et $\vec{E}(N) \sim \vec{E}(A)$ afin de simplifier le calcul, alors le moment exercé en O point quelconque est :

$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OP} \wedge q\vec{E}(P) + \overrightarrow{ON} \wedge (-q\vec{E}(N)) = q(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) \wedge \vec{E}(A)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\Gamma} = q\overrightarrow{NP} \wedge \vec{E}(A) = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

- Energie potentielle

$$\text{Soit : } E_p = qV(P) - qV(N) = q \int_N^P dV = q \int_N^P \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow E_p = \int_N^P -q\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Supposons une nouvelle fois \vec{E} faiblement variable à l'échelle du dipôle d'où : $E_p = -q\vec{E}(A) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) = -q\overrightarrow{NP} \cdot \vec{E}(A)$

L'énergie potentielle d'un dipôle électrostatique situé en A dans un champ extérieur est :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(A) \text{ où } \vec{E} = \vec{E}_{ext}$$

EM5 – Synthèse

- Equations locales de la magnétostatique

En régime stationnaire, les équations de Maxwell se découpent et le champ de densité de courant $\vec{j}(P)$ apparaît comme l'unique source du champ magnétostatique $\vec{B}(M)$, solution des équations locales de la magnétostatique :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ (Maxwell - Thomson) et } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ (Maxwell - Ampère)}$$

Le caractère linéaire de ces équations garantit la validité d'un principe de superposition autorisant le découpage des sources en sources plus simples pour le calcul du champ.

- Forme intégrale des équations locales

Sous forme intégrale, l'équation de Maxwell-Thomson se traduit par le caractère conservatif du flux magnétique : pour toute surface (S) fermée :

$$\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

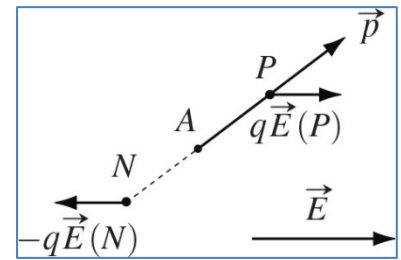
L'équation de Maxwell-Ampère se traduit quant à elle par le théorème d'Ampère : pour tout contour (C) et toute surface (S) s'appuyant sur (C) et orientée corrélativement,

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$$

- Propriétés de symétrie

La distribution de courant étant à l'origine du champ magnétostatique, ce dernier restitue les invariances de $\vec{j}(P)$.

- Le champ magnétique créé par une distribution de courants permanents est antisymétrique par rapport à un plan de symétrie de la distribution de courants.
- Si le point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en M a une direction perpendiculaire à ce plan.
- Le champ magnétique créé par une distribution de courants permanents est symétrique par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de courants.
- Si le point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, alors le champ magnétique en M



a une direction incluse ce plan.

- Propriétés topographiques

Les lignes de champ magnétostatique :

- Font apparaître les invariances de la distribution ;
- Restituent avec un changement de signe les propriétés de symétrie ou d'antisymétrie de la distribution de courant;
- Sont fermées et enlacent les sources de courant.

En particulier, le théorème d'Ampère montre que les lignes de champ orientées enlacent des courants positifs. Le champ magnétostatique étant à flux conservatif, sa norme décroît lorsque les tubes de champ s'évasent.

- Exemples de champs magnétostatiques

Le champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini parcouru par un courant i s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le champ magnétostatique créé par un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur s'écrit :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n i \vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

- Dipôle magnétostatique
- Un dipôle magnétostatique est une distribution de courant stationnaire d'extension finie au voisinage d'un point A . En particulier, pour une boucle de courant plane de surface S parcourue par un courant i , on définit le moment magnétique :

$$\vec{M} = iS \vec{n}$$

Avec \vec{n} vecteur unitaire normal à la boucle et i dans le sens direct autour de \vec{n} .

- Dans un modèle planétaire d'atome, les électrons peuvent être assimilés à des boucles de courant dont le moment magnétique est relié au moment cinétique orbital par :

$$\vec{M} = \gamma \vec{L}_0 \text{ où } \gamma = -\frac{e}{2m} \text{ est le rapport gyromagnétique de l'électron}$$

Le moment cinétique orbital atomique étant de l'ordre de \hbar , le magnéton de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \sim 10^{-23} \text{ Am}^2$ représente l'ordre de grandeur d'un moment magnétique atomique.

- Champ créé par un dipôle magnétostatique

Par analogie avec le dipôle électrostatique, dans l'approximation dipolaire, on admet que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r) \vec{u}_r - \vec{M})$$

- Actions mécaniques subies par un dipôle magnétostatique

Un dipôle magnétostatique plongé dans un champ extérieur quelconque subit des actions analogues à celles que subit un dipôle électrostatique dans un champ électrostatique extérieur :

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{M} \cdot \vec{B}), \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}, E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B} \text{ où } \vec{B} = \vec{B}_{ext}$$

EM5 – SVF

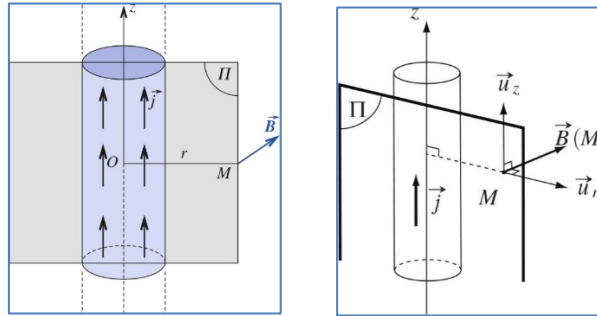
- Calculer le champ \vec{B} créé par une distribution cylindre uniforme en volume.
- Calculer le champ \vec{B} créé par un fil infini.
- Calculer le champ \vec{B} créé par un solénoïde infini.
- Calculer l'inductance propre d'un solénoïde infini.
- Calculer le moment magnétique du système électron-proton et donner l'unité du moment magnétique en physique atomistique.
- Donner les analogies et différences entre les deux dipôles.
- Calculer la déviation des particules d'Argent dans le cas de l'expérience de Stern/Gerlach en fonction de constantes et de $\frac{\partial B}{\partial z}, l$ (longueur de l'aimant), D (distance écran – centre aimant) et T la température.

Exercices classiques à connaître :

- EM52 – Bobine torique.
- EM53 – Câble coaxial
- EM56 – Modèle de fils
- EM58 – Effet Hall

a) Calculer le champ \vec{B} créé par une distribution cylindre uniforme en volume.

Un câble cylindrique, d'axe Oz et de rayon a, est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti. On étudie le champ magnétique créé par le câble à une distance r petite devant la longueur du câble, on le supposera donc infini



On modélise alors la distribution de courant par le vecteur densité de courant électrique \vec{j} , uniforme en tout point du fil, qui vaut :

$$I = j \pi a^2 \Rightarrow \vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$$

- Symétries et des antisymétries

Le plan $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie donc : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$

- Invariances :

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit :

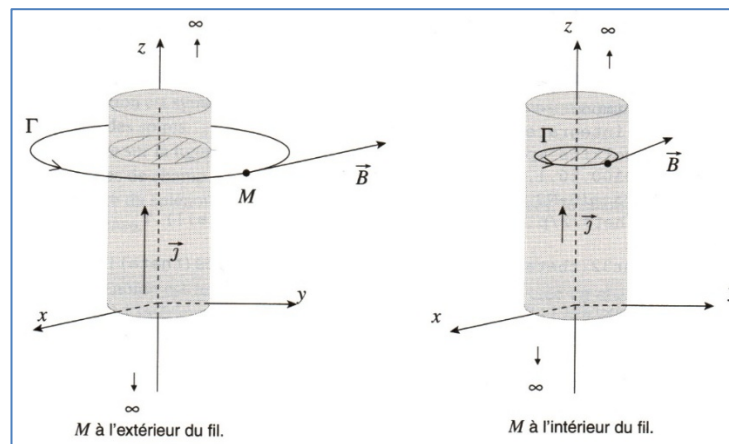
$$B(M) = B(r)$$

- Choix d'un contour d'Ampère

On choisit un cercle « d'axe Oz » passant par M de rayon r d'où :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int}$$

Il faut distinguer les deux cas qui correspondent à M à l'extérieur du fil et M à l'intérieur, comme le montrent les figures suivantes :



- Lorsque M est à l'extérieur, le courant enlacé est le courant total, I alors :

$$\Rightarrow \vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Lorsque M est à l'intérieur, le courant enlacé est :

$$I_{int} = j \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

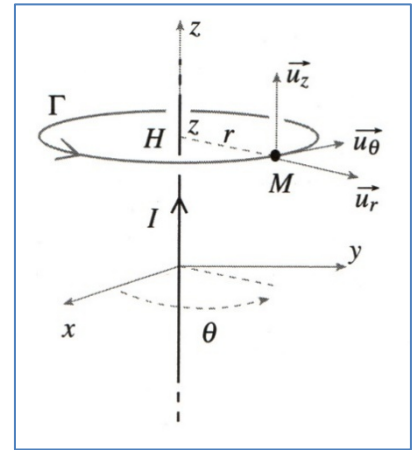
b) Calculer le champ \vec{B} créé par un fil infini.

- Le plan $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie donc : $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{u}_\theta$
- La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit : $B(M) = B(r)$
- Choix d'un contour d'Ampère : on choisit un cercle « d'axe Oz » passant par M de rayon r d'où :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int}$$

On choisit donc le contour Γ , orienté dans le même sens que \vec{u}_θ pour appliquer le théorème d'Ampère :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_C B(r) \cdot r d\theta = \mu_0 I_{int} \Leftrightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int} \text{ où } I_{int} = I \\ &\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$



c) Calculer le champ \vec{B} créé par un solénoïde infini.

Le solénoïde infini est un dispositif idéalisé qui présente des propriétés de symétries intéressantes, on admet qu'il impose un champ magnétique nul à l'extérieur : $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$. Un solénoïde infini parcouru par un courant I crée un champ magnétique nul à l'extérieur de celui-ci.

- Étude des symétries et des antisymétries

Le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et qui passe par le point M est plan de symétrie pour la distribution de courants.

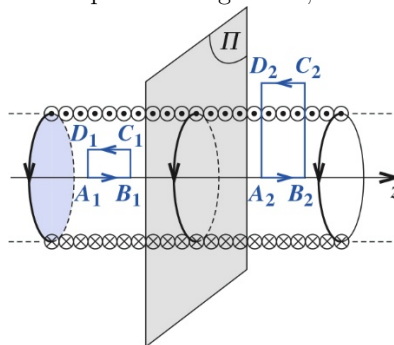
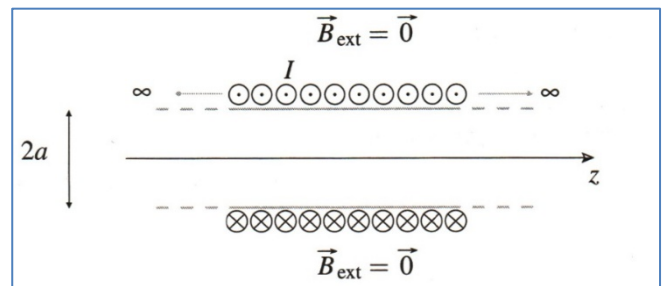
$$\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_z$$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit : $B(M) = B(r)$

- Choix d'un contour d'Ampère

On choisit successivement deux contours d'Ampère rectangulaires, comme le montre la figure suivante :



Les deux contours ont l'axe Oz en commun, mais l'un des deux se referme à l'intérieur du solénoïde, l'autre à l'extérieur.

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'intérieur :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= 0 \Leftrightarrow B_{axe} l - B(r < a) l = 0 \\ &\Leftrightarrow B(r < a) = B_{axe} \end{aligned}$$

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'extérieur :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 N I \Leftrightarrow B_{axe} l - B(r > a) l = \mu_0 n I l \\ &\Leftrightarrow B(r > a) = B_{axe} - \mu_0 n I = cste = 0 \\ &\Leftrightarrow B_{axe} = \mu_0 n I \\ &\Rightarrow \vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z \end{aligned}$$

d) Calculer l'inductance propre d'un solénoïde infini.

Dans le cas d'une spire du solénoïde infini on a :

$$\phi_1 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \iint_{\text{spire}} dS = B\pi a^2$$

⇒ Dans le cas du solénoïde infini on a :

$$\begin{aligned} \phi &= N\phi_1 = N \times \mu_0 n l \times \pi a^2 \\ \Leftrightarrow \phi &= \mu_0 N^2 \pi \frac{a^2}{l} I = LI \\ \Rightarrow L &= \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{l} \end{aligned}$$

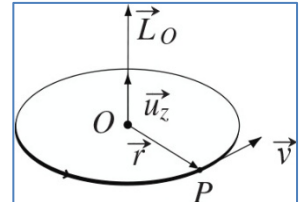
e) Calculer le moment magnétique du système électron-proton et donner l'unité du moment magnétique en physique atomistique.

Intéressons-nous au modèle planétaire de l'atome. On considère que l'électron génère une boucle de courant circulaire parcourue par un courant $I = \frac{q}{T}$ où q est la charge de l'électron et

T la période de son mouvement d'où :

$$\begin{cases} \vec{M} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \pi r^2 \vec{u}_z \\ \vec{L}_o = OM \wedge m\vec{v} = mrv \vec{u}_z \\ T = \frac{2\pi r}{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{M} = \frac{q}{2\pi r} \pi r^2 v \vec{u}_z = \frac{qvr}{2} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{q}{2m} L_z \vec{u}_z$$



On pose $\vec{M} = \gamma \vec{L}$ où γ est appelé rapport gyromagnétique. Pour le mouvement orbital de l'électron autour du noyau :

$$\gamma = \frac{-e}{2m}$$

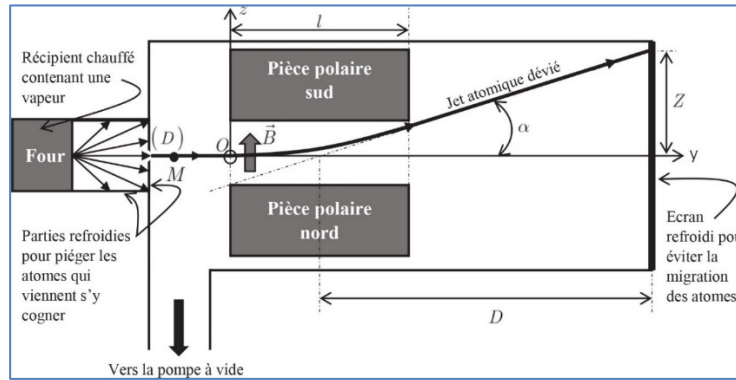
On pose : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{Am}^2$ l'unité de moment magnétique atomistique vu que $L_z = \pm n\hbar \Rightarrow \vec{M} = \pm n\mu_B \vec{u}_z$

f) Donnez les analogies et différences entre les deux dipôles

	dipôle \vec{E}	dipôle \vec{B}
Moment	$\vec{p} = q \vec{NP}$	$\vec{J} \cdot \vec{z}$
Potentiel ($r \gg a$)	$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	Hors-Programme
Champ créé ($r \gg a$)	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p})$	$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{J} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{J})$
Lignes de champ (et équipotentielles)		
Force subie dans un champ extérieur	$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{ext}$ $= \vec{0}$ si $\vec{E}_{ext} = \text{cste}$	$\vec{F} = (\vec{J} \cdot \text{grad}) \vec{B}_{ext}$ $= \vec{0}$ si $\vec{B}_{ext} = \text{cste}$
Couple subi dans un champ extérieur	$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$	$\vec{\Gamma} = \vec{J} \wedge \vec{B}_{ext}$
Energie potentielle du dipôle	$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$	$E_p = -\vec{J} \cdot \vec{B}_{ext}$

Le couple tend à aligner le dipôle avec le champ extérieur et une résultante entraîne le dipôle vers les zones de fort champ (si le champ est non-uniforme).

- g) Calculer la déviation des particules d'Argent dans le cas de l'expérience de Stern/Gerlach en fonction de constantes et de $\frac{\partial B}{\partial z}$, l (longueur de l'aimant), D (distance écran – centre aimant) et T la température.



Appliquons le PFD à la particule d'Argent dans le référentiel galiléen :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \\ m\ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} t \\ v_x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{t^2}{2} \\ x = ut \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{x}{u}\right)^2$$

Donc en sortie d'aimant :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_l = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} l \text{ avec } Z = (\tan \alpha) X \\ &\Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} l D \\ &\text{Or } u^2 = 3k_B T \\ &\Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{3k_B T} \frac{\partial B}{\partial z} l D \end{aligned}$$

EM6 – Synthèse

- Loi de Faraday

Soit un circuit électrique filiforme orienté arbitrairement par le sens conventionnel de i . Soit \vec{S} le vecteur surface de ce circuit, orienté par i et la règle de la main droite. Le circuit est le siège d'une force électromotrice induite e , orientée conventionnellement dans le même sens que i (convention générateur) et telle que : $e = -\frac{d\phi}{dt}$ où e s'exprime en Volts.

- Loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

- Transformateur

Pour un transformateur, en régime alternatif :

La relation des tensions s'écrit : $\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1} = m$. La relation des courants s'écrit, en charge : $\left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m}$

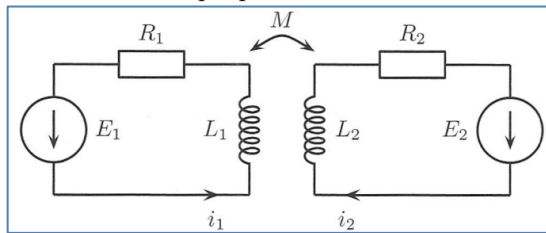
- Couplage électromécanique

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par les actions de Laplace induites est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la fem induite :

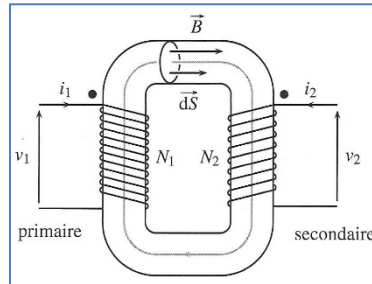
$$P_{\text{fournie par } e} = -P_{\text{fournie par } \vec{F}_{la}}$$

EM6 – SVF

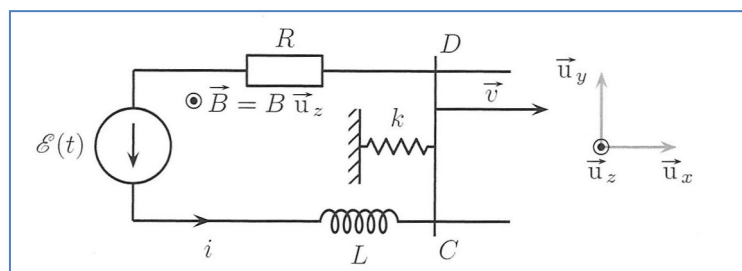
- a) Exprimer le bilan énergétique sur un circuit couplé par inductance mutuelle en donnant l'expression de $E_1 i_1 + E_2 i_2$



- b) Démontrer le rapport des tensions et des courants pour un transformateur.



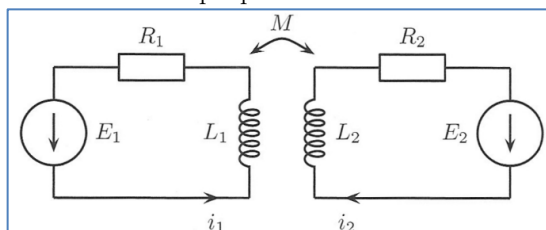
- a) Effectuer un bilan énergétique dans le cadre du haut-parleur simplifié à l'aide du schéma suivant afin de retrouver l'équation suivante : $\varepsilon i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + R i^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2$. On notera $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ la force de frottement fluide exercée par l'air sur la membrane du haut-parleur.



Exercices classiques à connaître :

- EM61 – Balance de Cotton
- EM62 – Pendule conducteur
- EM63 – Freinage électromagnétique
- EM65 – Circuits électriques couplés
- EM68 – Deux tiges

- a) Exprimer le bilan énergétique sur un circuit couplé par inductance mutuelle en donnant l'expression de $E_1 i_1 + E_2 i_2$



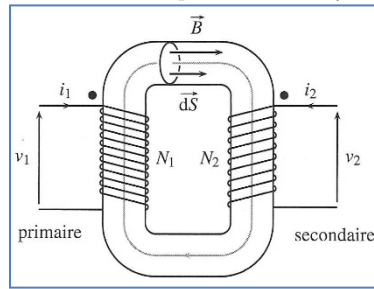
Les équations électrocinétiques obtenues par application de la loi des mailles à chaque circuit s'écrivent :

$$\begin{cases} E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

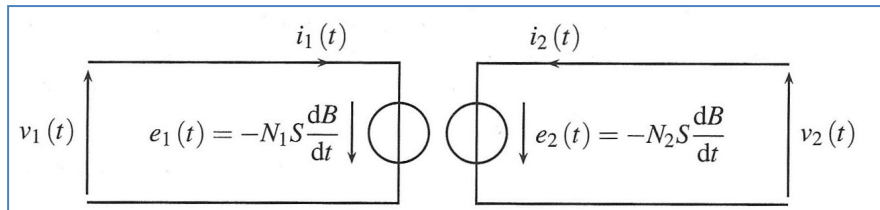
$$\Rightarrow \underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{Puissance fournie}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{dissipation joule}} + \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)}_{\text{Emagnetique}}$$

b) Démontrer le rapport des tensions et des courants pour un transformateur.



- Relation en tension

Le champ magnétique étant parfaitement canalisé dans le tore, son flux Φ a la même valeur à travers toute section du tore : Φ s'appelle le flux commun.



$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = N_1 \Phi \\ \Phi_2 = N_2 \Phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\frac{N_1 d\Phi_1}{dt} \\ e_2 = -\frac{N_2 d\Phi_2}{dt} \end{cases}$$

Or :

$$U_1 = -e_1 \text{ et } U_2 = -e_2.$$

D'où :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

- Relation en courant

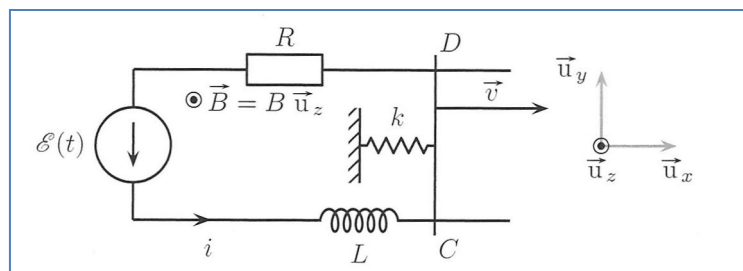
L'application du théorème d'Ampère sur une ligne de champ mène à :

$$Bl = \mu_0 \mu_r (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$

Attendu que pour un bon milieu « ferromagnétique » doux, $\mu_r = 10^5$, on a :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 \sim 0 \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$$

c) Effectuer un bilan énergétique dans le cadre du haut-parleur simplifié à l'aide du schéma suivant afin de retrouver l'équation suivante : $\epsilon i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) + Ri^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2$. On notera $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ la force de frottement fluide exercée par l'air sur la membrane du haut-parleur.



- Equation électrique

On note a la longueur du rectangle formé par le circuit lorsque l'ensemble est à l'équilibre mécanique (ressort ni tendu ni comprimé). On note x l'écart algébrique de position de la barre par rapport à cet état d'équilibre. L'aire du rectangle

est donc $(a + x).l$ et son vecteur surface associé est, d'après l'orientation choisie pour i :

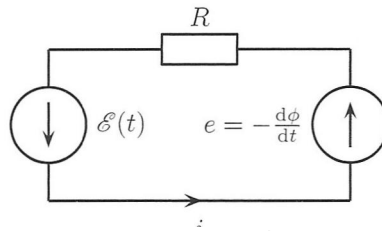
$$\vec{S} = (a + x).l\vec{u}_z$$

En tenant compte en plus du flux propre, le flux magnétique total à travers le circuit est :

$$\Phi = (a + x).lB + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - Blv$$



L'équation électrique de la barre est : $\varepsilon + e = Ri \Leftrightarrow \varepsilon - Blv - L\frac{di}{dt} = Ri$

- Equation mécanique

La barre est soumise :

- o Aux actions de Laplace $F_{la} = ilB\vec{u}_x$,
- o A l'action de rappel du ressort $F_{ressort} = -kx\vec{u}_x$,
- o Aux forces de frottements fluides exercées par l'air sur la membrane : $\vec{F}_{frott} = -\alpha v\vec{u}_x$
- o Ainsi qu'à son poids : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- o Et à la réaction normale des rails $\vec{N} = N\vec{u}_z$

En projection sur \vec{u}_x , la loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit :

$$ilB - kx - \alpha v = m\frac{dv}{dt}$$

- Bilan énergétique

Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\varepsilon i - Blvi - L\frac{di}{dt}i = Ri^2$$

$$\text{et } ilBv - kxv - \alpha v^2 = m\frac{dv}{dt}v$$

On réorganise les termes et on fait apparaître des dérivées remarquables :

$$\varepsilon i - Blvi = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

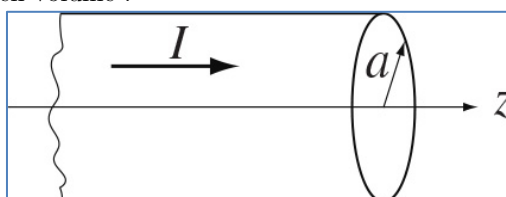
$$ilBv = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \alpha v^2$$

On combine les deux équations de manière à faire disparaître le terme $blvi$ ces deux termes :

$$\underbrace{\varepsilon i}_{\substack{P \text{ fournie} \\ \text{par } e}} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)}_{E_{mag} + E_c + E_{p,élastique}} + \underbrace{Ri^2 + \alpha v^2}_{\substack{P \text{ pour vaincre} \\ \text{les frottements}}}$$

EM7 – SVF

- a) À l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique, retrouvez l'équation de Poynting : $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{T}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$
- b) À partir des équations de Maxwell, donner l'expression du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie électromagnétique dans le cadre de la jauge de Poynting.
- c) Vérifier l'équation de Poynting un cylindre conducteur, de conductivité électrique γ , de rayon a , parcouru par le courant I uniformément réparti en volume :



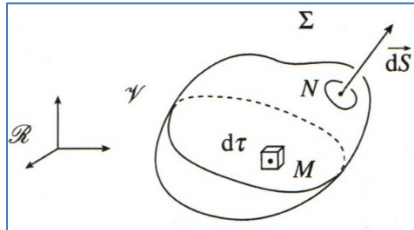
- d) Donnez les équations de Maxwell dans le vide, puis démontrer l'équation de propagation dans le vide.

Exercices classiques à connaître :

- EM71 – Alternateur dans un cylindre
- EM72 – Courants de Foucault dans un cylindre
- EM73 – Energie magnétique dans une bobine
- EM76 – Pince ampèremétrique
- EM78 – Plaque de cuivre

a) À l'aide d'un bilan d'énergie électromagnétique, retrouvez l'équation de Poynting : $\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{T}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

Pour effectuer le bilan d'énergie électromagnétique, on raisonne sur un volume V de l'espace, fixe dans le référentiel dans lequel est défini le champ électromagnétique étudié.



L'énergie contenue dans V varie pendant la durée dt d'une quantité : $U_{em}(t + dt) - U_{em}(t) = -P_{ray} dt - P_{port} dt$

Cette énergie varie, car une partie a été rayonnée pendant la durée dt et une autre, a été cédée aux porteurs de charge.

Le signe «-» traduit le fait que l'énergie est cédée (perdue) par le système.

Soit :

$$\begin{aligned} \iiint_V (u_{em}(M, t + dt) - u_{em}(M, t)) d\tau &= - \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt \\ \Leftrightarrow \iiint_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dt d\tau &= - \iiint_V \text{div}(\vec{T}) d\tau dt - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt \\ \Rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{T}) + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau dt &= 0 \text{ vraie pour tout } V. \\ \Rightarrow \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{T}) + \vec{j} \cdot \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

b) À partir des équations de Maxwell, donner l'expression du vecteur de Poynting et de la densité d'énergie électromagnétique dans le cadre de la jauge de Poynting.

$$MG : \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \bullet \quad MT : \text{div} \vec{B} = 0 \quad \bullet \quad MF : \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \bullet \quad MA : \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On exprime alors le vecteur \vec{j} , que l'on multiplie scalairement par \vec{E} :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\text{rot} \vec{B}) \cdot \vec{E}$$

Or : $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (-\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B})$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \left(-\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} \right)$$

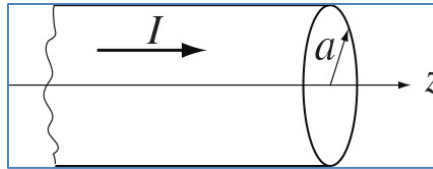
$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\text{Or : } \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - \text{div}(\vec{T})$$

Par identification on obtient la jauge de Poynting :

- Densité d'énergie électromagnétique : $u_{em} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Vecteur de Poynting : $\vec{T} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

- c) Vérifier l'équation de Poynting un cylindre conducteur, de conductivité électrique γ , de rayon a , parcouru par le courant I uniformément réparti en volume :



$$\text{Soit : } \vec{j}(r < a) = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(r < a) = \frac{j}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{u}_z$$

$$\text{Et : } \vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \vec{u}_\theta$$

Or :

$$\begin{aligned} U_{em} &= \iiint_{M \in \text{Cyl}} \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \Leftrightarrow U_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{I}{\gamma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{Cyl}} \left(\frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \right)^2 2\pi r h dr \\ &\Leftrightarrow U_{em} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{I}{\gamma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \frac{\pi h}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2 \pi a^2} \right)^2 \frac{a^4}{4} \\ &\Leftrightarrow U_{em} = \frac{\varepsilon_0 I^2 h}{2 \gamma^2 \pi a^2} + \frac{\mu_0 I^2 h}{16 \pi} = cste \Rightarrow \frac{dU_{em}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Calculons la puissance rayonnée par le volume, le vecteur de Poynting s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = - \left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{r}{2\gamma} \vec{u}_r \\ \Rightarrow P_{ray} &= \iint_{S_{lat}} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = - \left(\frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{a}{2\gamma} 2\pi a h \\ &\Rightarrow P_{ray} = - \frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2} \end{aligned}$$

Calculons la puissance cédée aux porteurs :

$$\begin{aligned} P_{port} &= \iiint_{\text{volume}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \gamma E^2 \pi a^2 h \\ \Leftrightarrow P_{port} &= \gamma \left(\frac{I}{\gamma \pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h = \frac{I^2 h}{\gamma \pi a^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\underbrace{\frac{dU_{em}}{dt}}_{=0} + P_{port} + P_{ray} = 0$$

- d) Donnez les équations de Maxwell dans le vide, puis démontrer l'équation de propagation dans le vide.

Equations de Maxwell, en régimes variables dans le vide :

- Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$ (M.G)
- Maxwell-Flux ou Thomson : $\text{div } \vec{B} = 0$ (M.φ)
- Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (M.F)
- Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (M.A)

$$\text{Soit : } \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = - \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

Les opérateurs rotationnel et dérivation par rapport au temps portent sur des variables indépendantes donc ils commutent.

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = - \left(\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} \right) = - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Or : } \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) = - \overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\Rightarrow - \overrightarrow{\Delta} \vec{E} = - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ avec } c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$