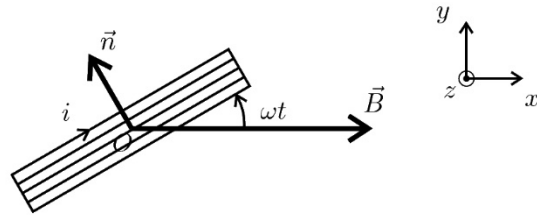


# EM7 – Equations de Maxwell

## A – Travaux dirigés

### EM71 - Alternateur d'une éolienne

Le disque éolien entraîne, par un système de démultiplication, une bobine plate en rotation autour de l'axe Oz. La bobine a une résistance r, une inductance L et elle est fermée sur une résistance R<sub>0</sub>. On pose R = r + R<sub>0</sub>. Elle comporte N spires de surface s et se déplace dans un champ magnétique constant  $\vec{B} = B \vec{u}_x$



1°) L'éolienne tourne à vitesse angulaire constante  $\omega$ . En régime sinusoïdal forcé, l'intensité i est de la forme :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ . Déterminer  $I_m$  et  $\phi$ .

2°) Quelle est la valeur moyenne du moment  $\vec{\Gamma}$  des forces de Laplace subies par la bobine ?

3°) Le moteur éolien a une puissance moyenne P. Représenter, sur un même diagramme, le moment  $\Gamma$  du couple moteur et  $\|\langle \vec{\Gamma} \rangle\|$ , en fonction de  $\omega$ .

4°) À t = 0, la vitesse angulaire est nulle et on débloque l'éolienne. Analyser qualitativement le régime transitoire. Déterminer la vitesse angulaire  $\omega_0$  en régime permanent et montrer que P doit rester inférieure à une puissance critique notée P<sub>c</sub>. Ce régime est-il stable ?

Rép : 1°)  $I_m = \frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$  et  $\tan \phi = -\frac{L\omega}{R}$  2°)  $\langle \vec{\Gamma} \rangle = -\frac{NI_m s B}{2} \cos \phi \vec{u}_z$  3°) ... 4°)  $P_c = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$  et  $P < P_c$  stable.

### EM72 – Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre conducteur d'axe Oz, de section  $S_0 = \pi R^2$ , de longueur L et de conductivité  $\gamma$  dans un champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bord. On donne en coordonnées cylindriques :

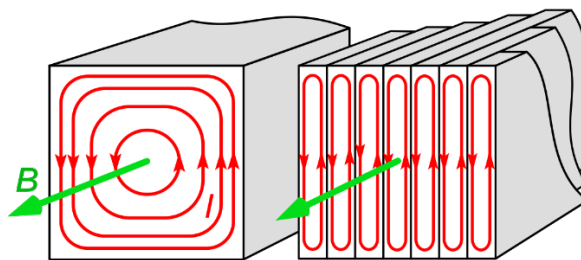
$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

1°) On admet que  $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$ . Montrer que :

$$\vec{E}(P) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_\theta$$

2°) Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

3°) Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L, de section  $S'_0 = \frac{S_0}{N}$  sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ? Expliquer l'intérêt du feuilletage : procédé qui consiste à diviser la section du noyau de fer en de multiples feuillets, pour la réalisation des transformateurs.



Rép : 1°) Equation de Maxwell-Faraday 2°)  $\langle P \rangle = \gamma \frac{B_0^4}{4} \pi L f^2 S_0^2$

3°)  $\langle P' \rangle = \frac{\langle P \rangle}{N}$ , la feuilletage réduit la perte par effet Joule.

### EM73 - Energie magnétique dans une bobine

Une bobine de longueur  $l$ , de rayon  $a$  et d'axe  $(Oz)$ , est constituée par un enroulement de  $n$  spires circulaires par unité de longueur. On utilisera pour l'étude qui suit l'approximation du solénoïde infini pour décrire cette bobine et l'on se placera dans le cadre de l'ARQP.

- 1°) Quel est, dans ces conditions, le champ magnétique engendré par la bobine lorsqu'elle est parcourue par  $I$  ?
- 2°) Quelle est l'énergie magnétique  $\epsilon_m$  associée à la bobine ? Quelle valeur du coefficient d'induction  $L$  de la bobine peut-on en déduire ? A.N :  $I=1A, l=10cm, a=10cm, n=5000/m$
- 3°) La bobine est mise en charge par un générateur de fem  $e$ , de résistance interne  $R$  élevée. Quelle est la loi d'évolution du courant dans le circuit, fermé à l'instant  $t=0$  ?
- 4°) Calculer les champs magnétiques et électriques engendrés par la bobine à l'instant  $t$  en tout point. Comparer les ordres de grandeur des densités volumiques d'énergies magnétique et électrique ( $R=10k\Omega$ ).

5°) Quelle est l'expression du flux du vecteur de Poynting :  $\vec{\Pi}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  à travers la surface délimitant le volume où la bobine crée un champ non négligeable (cylindre de rayon  $a$  et de longueur  $l$ ) ? Interpréter de résultat.

Rép : 1°)  $\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{u}_z$     2°)  $L = \mu_0 n^2 I \pi a^2 \sim 100mH$     3°)  $I(t) = \frac{e}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$     4°)  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2$     5°)  $\phi = LI(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d\epsilon_m}{dt}$

## B – Exercices supplémentaires

### EM74 – Décharge d'un conducteur dans l'air

Une boule conductrice, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , porte initialement la charge  $Q_0$  uniformément répartie. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité  $\gamma$ . À l'instant  $t$ , la boule porte la charge  $Q(t)$ . On cherche le champ électromagnétique  $(\vec{E}(M, t), \vec{B}(M, t))$  en un point  $M$  de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre  $O$ .

- 1°) Déterminer les champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  à l'extérieur de la boule.
- 2°) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $Q(t)$ . La résoudre. Commenter.
- 3°) Calculer l'énergie cédée par le champ à la matière ainsi que la variation d'énergie électromagnétique. Conclure.

Rép : 1°)  $\vec{B}_{ext} = \vec{0}$  et  $\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$     2°)  $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$     3°)  $\epsilon = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R} = -\Delta U_{em}$

### EM75 – Bilan d'énergie dans un milieu ohmique

L'espace compris entre les plans  $z = -\frac{a}{2}$  et  $z = +\frac{a}{2}$  est rempli d'un milieu conducteur ohmique, de conductivité  $\gamma$ , parcouru par une densité volumique de courant uniforme et constante  $\vec{j}(M) = j \vec{u}_x$

- 1°) Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par cette distribution en un point  $M$ . En déduire  $\vec{B}(M)$  à l'intérieur du milieu conducteur en intégrant l'une des équations de Maxwell.
- 2°) Exprimer le vecteur de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique, la puissance volumique dissipée dans le conducteur.

3°) Faire un bilan d'énergie électromagnétique pour le volume parallélépipédique  $[x, x + dx] \times [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}] \times [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ .

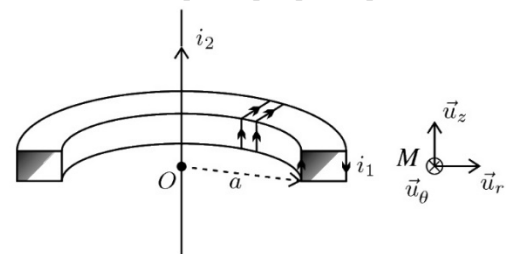
Rép : 1°)  $B = -\mu_0 j z$     2°)  $\vec{\Pi} = -\frac{j^2}{\gamma} z \vec{u}_z$     3°)  $\frac{dU_{em}}{dt} + \phi_{II} = -P_{perdue}$

### EM76 – Pince ampéramétrique

Une bobine torique est constituée de  $N$  spires jointives enroulées sur un tore, de section rectangulaire, de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , de hauteur  $h$ . On suppose que  $N \gg 1$ .

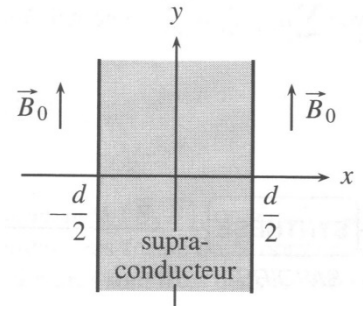
- 1°) Calculer le flux du champ magnétique créé par la bobine torique à travers les  $N$  spires. En déduire son inductance propre  $L_1$ .
- 2°) Le tore (circuit 1) enlace un fil infini (circuit 2) d'axe  $Oz$  et est parcouru par un courant  $i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \phi)$ . Calculer le flux du champ magnétique créé par le circuit 2 à travers les  $N$  spires du tore. En déduire l'inductance mutuelle  $M$  entre les deux circuits.
- 3°) On court-circuite le circuit torique et on néglige sa résistance. On se place en régime sinusoïdal forcé. Déterminer la valeur efficace du courant  $i_1$ . Quel est l'avantage de la mesure du courant induit ?

Rép : 1°)  $L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$     2°)  $M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$     3°)  $I_{1,eff} = \frac{M}{L} I_{2,eff} = \frac{I_{2,eff}}{N}$



### EM77 - Supraconducteur

Un supraconducteur a, entre autres, les caractéristiques suivantes : sa résistivité tombe à zéro et il expulse partiellement tout champ magnétique. La loi d'Ohm est alors remplacée par la loi de London :  $\overrightarrow{rot} \vec{j} = -\frac{\vec{B}}{\mu_0 l^2}$



On étudie une lame supraconductrice à faces parallèles illimitées, d'épaisseur d, plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme et constant  $\vec{B}_0$ , parallèle à ses faces.

- 1°) Par quel vecteur  $\vec{B}$  est-il porté dans la plaque ? De quelle(s) variable(s) dépend-il ?
- 2°) Quelle est l'équation sur  $\vec{B}$  dans la lame ? On utilisera la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot} \vec{B}) = \overrightarrow{grad} (div \vec{B}) - \Delta \vec{B}$$

3°) Calculer  $\vec{B}$  dans la lame supraconductrice (privilégier l'écriture de la solution avec des fonctions trigonométriques hyperboliques). On se place à une échelle telle que tous les courants sont volumiques, le champ magnétique est alors continu à l'interface entre le supraconducteur et le vide.

4°) Représenter l'allure des courbes représentatives du champ magnétique et de la densité de courant selon que d » ou non. Sur quelle distance le champ magnétique et le courant sont-ils non nuls dans la plaque ?

Rép : 1°)  $\vec{B} = B(x) \vec{u}_y$     2°)  $\Delta \vec{B} = \frac{\vec{B}}{l^2}$     3°)  $\vec{B} = \vec{B}_0 \frac{\cosh(\frac{x}{l})}{\cosh(\frac{d}{2l})}$     4°)....

### EM78 – Plaque de Cuivre

Soit un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et deux plans (P) et (P') parallèles au plan (xOy), et de cotes respectives suivant zz' égales à +a/2 et -a/2. Ces plans délimitent une plaque de cuivre homogène, d'épaisseur a, de perméabilité  $\mu_0$ , de permittivité  $\epsilon_0$  et de conductivité  $\gamma$ . Une densité volumique de courant continu et constant  $\vec{j} = j \vec{u}_x$  ( $j > 0$ ) parcourt ce conducteur de dimension infinie suivant  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ . La densité superficielle de courant est nulle.

1°) Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$ , créé par cette distribution, en un point M quelconque (intérieur ou extérieur à la plaque). On n'oubliera pas d'étudier la parité du champ magnétique.

2°) En déduire  $\vec{B}(M)$  par le théorème d'Ampère.

3°) Retrouver directement  $\vec{B}(M)$  par les équations de Maxwell (à partir des composantes du rotationnel).

Rép : 1°)  $B(z) = -B(-z)$     2°) et 3°)  $\vec{B}(z > \frac{a}{2}) = -\frac{\mu_0 j a}{2} \vec{u}_y, \vec{B}(z < -\frac{a}{2}) = \frac{\mu_0 j a}{2} \vec{u}_y$  et  $\vec{B}(-\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}) = -\mu_0 j z \vec{u}_y$

### EM79 – Condensateur plan dans l'ARQS électrique

Un condensateur plan est formé de deux disques conducteurs parfaits identiques de rayon a et d'axe commun (Oz). Les deux armatures en forme de disque sont séparées d'une distance e. Comme  $e < a$ , on néglige les effets de bords, on admet alors que le champ électrique est uniforme dans tout le volume compris entre les armatures :  $\vec{E} = E(t) \vec{u}_z$ . On étudie dans cet exercice la décharge du condensateur à travers une résistance, de sorte que :

$$E(t) = E_0 e^{-t/\tau}$$

1°) Par analogie avec l'ARQS magnétique, définir l'ARQS électrique, et donner les équations de Maxwell que vérifie le champ électromagnétique entre les deux armatures du condensateur.

2°) En électrostatique, il a été établi qu'un condensateur plan de capacité C, identique à celui considéré ici, soumis à la tension U, crée un champ électrique  $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  entre ses plaques, le champ électrique étant nul partout ailleurs. Avec  $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$  et  $Q = CU$ . Que vaut la charge Q(t) du condensateur considéré ? On fera un schéma du montage, en faisant figurer la différence de potentiel U (t) et la charge Q(t).

3°) Déterminer le champ magnétique dans le condensateur. On justifiera qu'il est de la forme :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$$

4°) Calculer les contributions électrique et magnétique  $\epsilon_e$  et  $\epsilon_m$  à l'énergie électromagnétique, ainsi que leur rapport que l'on exprimera en fonction de a et de  $\lambda = ct$ . Montrer qu'en régime suffisamment lentement variable, le condensateur peut être considéré comme un objet purement électrique.

On verra que les exercices de ce chapitre sont intimement liés aux exercices de la partie sur les ondes. On va utiliser des expressions de cette partie pour la dernière question. On donne les expressions de la densité volumique d'énergie électrique  $w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ , de la densité volumique d'énergie magnétique  $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ , ainsi que du vecteur de Poynting  $\vec{P}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ .

5°) Calculer le vecteur de Poynting en un point intérieur au condensateur, exprimer son flux à travers la surface S du cylindre qui délimite le condensateur, conclure.

Rép : 1°)  $\overrightarrow{rot} \vec{E} = \vec{0}$  et  $rot \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$     2°)  $Q(t) = \pi a^2 \epsilon_0 E(t)$     3°)  $\vec{B}(r, z, t) = -\frac{\mu_0 \epsilon_0 r E_0}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta$     4°)  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = \frac{8c^2 \tau^2}{a^2}$     5°)  $\vec{P}_{em} = \frac{E_0^2 r}{2\pi \mu_0 c^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \vec{u}_r$