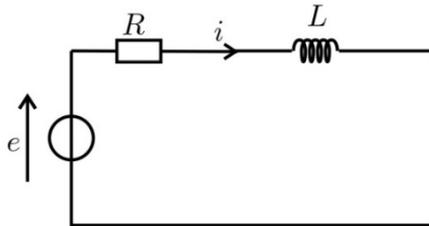


## EM7 – Equations de Maxwell

## A – Travaux dirigés

## EM71 - Alternateur d'une éolienne

1. On suppose que les conditions de l'ARQS magnétique sont vérifiées. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La loi de Faraday s'écrit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers les  $N$  spires est :

$$\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = NBs \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -NBs \sin(\omega t)$$

car la surface est orientée avec la règle de la main droite :  $d\vec{S} = dS \vec{n}$ .

La fem vaut donc :

$$e = NsB\omega \cos(\omega t)$$

La loi des mailles s'écrit :

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

avec  $\begin{cases} i = I_m \cos(\omega t + \phi) \\ \underline{i} = I_m \exp(j(\omega t + \phi)) \end{cases}$  et  $\begin{cases} e = NsB\omega \cos(\omega t) \\ \underline{e} = NsB\omega \exp(j(\omega t)) \end{cases}$

En notation complexe, on a :  $\underline{e} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i}$ , d'où :

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega} = \frac{NsB\omega \exp(j(\omega t))}{R + jL\omega}$$

On en déduit :  $\begin{cases} |\underline{i}| = I_m = \frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \\ \arg(\underline{i}) = \omega t + \phi = \omega t - \arg(R + jL\omega) \end{cases}$

D'où :

$$I_m = \frac{NsB\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} ; \tan \phi = -\frac{L\omega}{R} \text{ et } \cos \phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} > 0$$

$\phi$  est donc compris entre  $-\frac{\pi}{2}$  et 0.

2. Le moment magnétique de la bobine est  $\vec{M} = N I s \vec{n}$ .

Le moment du couple subi par la bobine est :  $\vec{\Gamma}' = \vec{M} \wedge \vec{B} = N I s \vec{n} \wedge B \vec{u}_x$

avec  $\vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$  en projection sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = N I s B \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -N I s B \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma}' = -N I_m s B \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Or  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ .

On a donc :

$$\vec{\Gamma}' = -\frac{N I_m s B}{2} [\cos(2\omega t + \phi) + \cos \phi] \vec{u}_z$$

La moyenne du moment du couple est :

$$\langle \vec{\Gamma}' \rangle = -\frac{N I_m s B}{2} \cos \phi \vec{u}_z$$

La projection du moment du couple est négative. C'est normal d'après la loi de Lenz qui est une loi de modération. La création d'un courant induit s'oppose par ses effets aux causes qui lui donnent naissance. La cause est la rotation de la bobine.

3. Soit  $P$  la puissance du couple moteur. On a :  $P = \Gamma \omega$ . La puissance est constante, donc

$$\Gamma = \frac{P}{\omega}$$

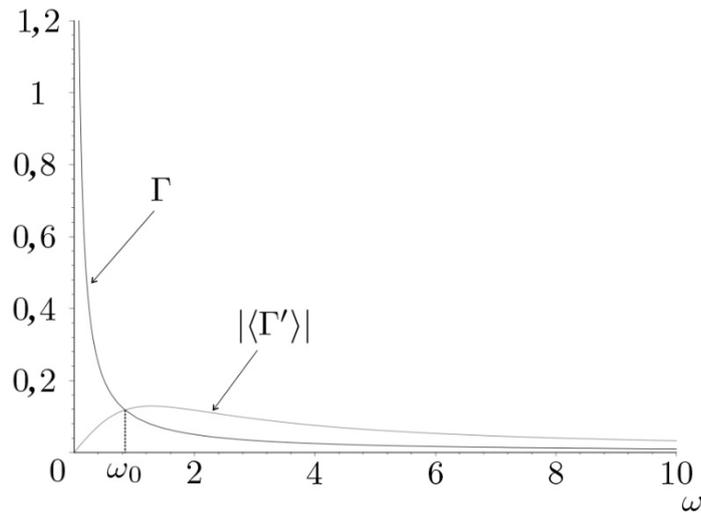
On a vu que :

$$\langle \Gamma' \rangle = -\frac{N I_m s B}{2} \cos \phi = -\frac{N s B}{2} \left( \frac{N s B \omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \right)$$

D'où

$$\langle \Gamma' \rangle = \frac{-N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}$$

Le graphe ci-dessous représente l'allure de  $\Gamma$  et de  $|\langle \Gamma' \rangle|$  en fonction de  $\omega$ . Le point de fonctionnement est l'intersection des deux courbes.



4. À  $t = 0$ , on débloque l'éolienne. La vitesse angulaire  $\omega$  augmente car  $J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma + \Gamma' > 0$ , le couple de frottement augmente et le couple moteur diminue. On atteint un régime permanent pour  $\omega = \omega_0$ . Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma + \Gamma'$$

On doit avoir :  $|\langle \Gamma' \rangle| = \Gamma$ , soit :

$$\frac{P}{\omega_0} = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2} \frac{\omega_0}{R^2 + L^2 \omega_0^2}$$

D'où  $2P (R^2 + L^2 \omega_0^2) = N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2$ . On a alors :

$$R^2 + L^2 \omega_0^2 = \frac{N^2 s^2 B^2 R \omega_0^2}{2P}$$

Soit :

$$\omega_0^2 = \frac{R^2}{\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2}$$

Pour que  $\omega_0$  soit défini, il faut que  $\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} - L^2 > 0$ , c'est-à-dire

$$\frac{N^2 s^2 B^2 R}{2P} > L^2, \text{ soit } P < \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}. \text{ On pose : } P_c = \frac{N^2 s^2 B^2 R}{2L^2}$$

On doit donc avoir :

$$P < P_c$$

Si la vitesse angulaire augmente légèrement, le couple moteur est inférieur au couple résistant en norme. On a donc un ralentissement de la bobine. Le régime est donc stable.

## EM72 – Courants de Foucault dans un cylindre

1. L'équation de Maxwell-Faraday  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  permet de calculer le champ électrique :

**Méthode 1 :**

On utilise le rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial B}{\partial t} = B_0 \omega \sin(\omega t)$$

On se place à un instant  $t$  quelconque. On peut écrire à  $t$  fixé :

$$\frac{d(r E_\theta)}{dr} = r B_0 \omega \sin(\omega t), \text{ soit } d(r E_\theta) = r B_0 \omega \sin(\omega t) dr.$$

On intègre :

$$r E_\theta = \frac{r^2}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) + C_1, \text{ d'où } E_\theta = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) + \frac{C_1}{r}.$$

Le champ est défini pour  $r = 0$ , donc  $C_1 = 0$ .

2. La puissance volumique dissipée par effet Joule est :

$$\frac{dP_J}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 = \gamma \left( \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2$$

On a donc :

$$dP_J = \gamma \left( \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \right)^2 dr r d\theta dz$$

On intègre sur tout le cylindre :  $r$  varie entre 0 et  $R$ ,  $z$  entre 0 et  $L$  et  $\theta$  entre 0 et  $2\pi$ .

On obtient :

$$P_J = \gamma \frac{R^4}{16} (B_0 \omega \sin(\omega t))^2 2\pi L$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle P_J \rangle = \gamma \frac{R^4}{16} B_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} 2\pi L = \frac{\gamma B_0^2}{16} \pi L (2\pi f)^2 \left( \frac{S_0}{\pi} \right)^2$$

puisque la moyenne de  $\sin^2(\omega t)$  sur une période vaut  $\frac{1}{2}$ .

On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2 S_0^2$$

3. On pose  $K = \frac{\gamma B_0^2}{4} \pi L f^2$ , soit  $\langle P_J \rangle = K S_0^2$ .

Si au lieu d'un seul conducteur, on utilise  $N$  conducteurs cylindriques de section  $S'_0$ , la puissance dissipée par effet Joule est :

$$\langle P'_J \rangle = N (K (S'_0)^2)$$

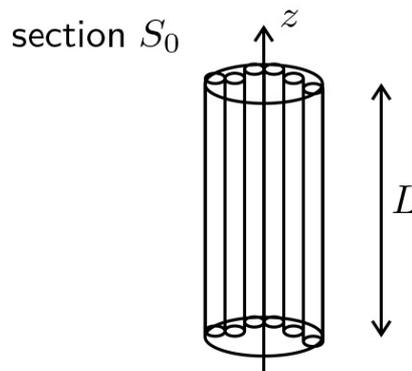
puisque la puissance totale est la somme des puissances moyennes dissipées dans chacun des conducteurs.

Comme  $S'_0 = \frac{S_0}{N}$ , on a :

$$\langle P'_J \rangle = N \left( K \frac{S_0^2}{N^2} \right) = \frac{\langle P_J \rangle}{N}$$

La puissance est divisée par  $N$ , d'où l'intérêt du feuilletage pour la réalisation des transformateurs.

On représente sur le schéma ci-contre quelques cylindres de surface  $S'_0$ .



# EM73 - Energie magnétique dans une bobine

1) Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur de la bobine :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{e}_z.$$

Il est nul en dehors de celle-ci.

2) L'énergie volumique associée au champ magnétique est  $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$ .

L'énergie associée vaut donc :

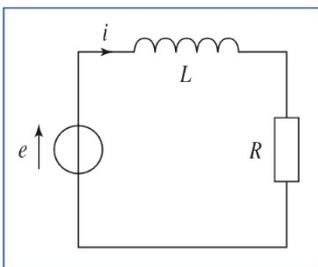
$$\mathcal{E}_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} l \pi a^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 l \pi a^2) I^2.$$

En identifiant ce résultat à l'expression usuelle  $\frac{1}{2} L I^2$  de l'énergie emmagasinée par la bobine, il vient  $L = \mu_0 n^2 l \pi a^2$  ;

L'application numérique donne  $L \approx 100$  mH .

Pour obtenir les inductances élevées, de l'ordre du Henry, il faut introduire un noyau de fer dans l'enroulement. La bobine perd alors généralement ses propriétés de composant linéaire. L'énergie stockée est assez faible :

$$\mathcal{E}_m \approx 50 \text{ mJ}.$$



3) L'équation d'évolution du courant dans le circuit est :

$$e = L \frac{dI}{dt} + R I,$$

soit compte tenu de conditions initiales  $I(t) = \frac{e}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ , où  $\tau = \frac{L}{R}$  est le temps caractéristique d'évolution du circuit.

4) Le champ magnétique engendré par la bobine est (en utilisant les coordonnées cylindriques) :

• à l'intérieur de la bobine (pour  $r < a$ ) :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \vec{B}_0 = \mu_0 n \frac{e}{R} \vec{e}_z ;$$

• à l'extérieur de la bobine (pour  $r > a$ ) :  $\vec{B} = \vec{0}$ .

(Pas d'effets de bord : les bords sont « rejetés » à l'infini dans l'approximation de solénoïde très long.)

Nous vérifions que le champ magnétique appartient, en tout point  $M$ , au plan contenant  $M$  et l'axe  $(Oz)$ , qui est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant du solénoïde. Le champ électrique est lui au point  $M$ , perpendiculaire à un tel plan ; il est donc de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E(r, t) \vec{e}_\theta.$$

On écrit la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, en choisissant comme contour un cercle de rayon  $r$  et d'axe  $(Oz)$ .

• Pour  $r \leq a$  :  $2\pi r E(r, t) = -\pi r^2 \left( B_0 \frac{1}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right).$

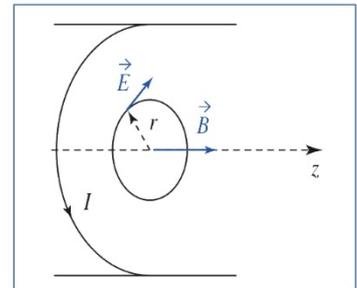
• Pour  $r \geq a$  :  $2\pi r E(r, t) = -\pi a^2 \left( B_0 \frac{1}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \right).$

Finalement, le champ électrique engendré par le solénoïde est :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} -\frac{r}{2} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r \leq a ; \\ -\frac{a^2}{2r} \mu_0 n \frac{dI(t)}{dt} \vec{e}_\theta & \text{si } r \geq a . \end{cases}$$

Les densités volumiques d'énergie magnétique et électrique valent respectivement, puisque  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$  :

$$\mathcal{E}_{B \text{ vol}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}$$



et 
$$\mathcal{E}_{E \text{ vol}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \begin{cases} \frac{r^2 \mu_0 n^2}{8c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 & \text{si } r \leq a ; \\ \frac{a^4 \mu_0 n^2}{8r^2 c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 & \text{si } r \geq a . \end{cases}$$

Si on compare ces deux densités en  $r = a$  (où  $\mathcal{E}_{E \text{ vol}}$  est maximale), il vient :

$$\frac{\mathcal{E}_{E \text{ vol}}}{\mathcal{E}_{B \text{ vol}}} = \frac{a^2}{4c^2} \left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \approx \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2.$$

En reprenant les valeurs numériques du 2) et  $R = 10$  k $\Omega$ , on trouve :

$$\frac{\mathcal{E}_{E \text{ vol}}}{\mathcal{E}_{B \text{ vol}}} = 1,7 \cdot 10^{-5}.$$

On constate ainsi que la densité volumique d'énergie électrique est tout à fait négligeable devant celle d'énergie magnétique : une bobine est dans l'A.R.Q.P. « purement magnétique »

5) Le vecteur de Poynting vaut, dans le solénoïde :

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\mu_0 n^2 I(t) \frac{dI(t)}{dt} \frac{r}{2} \vec{e}_r = \Pi(r, t) \cdot \vec{e}_r.$$

Son flux entrant à travers le cylindre, de longueur  $\ell$  et de rayon  $a$ , à l'intérieur duquel le champ magnétique n'est pas nul, vaut :

$$-2\pi a \ell \Pi(r = a, t) = +\mu_0 n^2 \pi a^2 \ell I(t) \frac{dI(t)}{dt}.$$

Ce résultat peut aussi s'écrire sous la forme :

$$L I(t) \frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{d\mathcal{E}_m}{dt}.$$

Il correspond à la variation de l'énergie emmagasinée sous forme magnétique par la bobine par unité de temps.

## B – Exercices supplémentaires

### EM74 – Décharge d'un conducteur dans l'air

1. La distribution de charges et de courants résultant de la décharge de la boule dans l'air est à symétrie sphérique. Le champ magnétique est donc nul puisque tous les plans qui contiennent le point  $M$  où on cherche de champ et le centre  $O$  de la sphère sont plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique étant orthogonal à tous ces plans, il est nul. Le champ électrique est de la forme  $\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_r$ . On calcule le champ électrique grâce au théorème de Gauss à travers la sphère de rayon  $r$ , à l'instant  $t$ . On obtient, pour  $r > R$  :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r.$$

2. Le vecteur densité volumique de courant dans l'air est  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ . L'équation de Maxwell-Ampère,  $\text{rot} \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , s'écrit ici :  $\vec{0} = \gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  soit, après simplification :

$$\gamma Q(t) + \epsilon_0 \frac{dQ}{dt} = 0.$$

La charge  $Q(t)$  est donc égale à :  $Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$  où  $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$ .

La boule se décharge d'autant plus vite que la conductivité est grande. Donc, plus l'air est humide, plus elle se déchargera vite (et plus il sera difficile de faire des expériences d'électrostatique).

3. L'énergie dissipée dans le milieu est d'une part égale à l'énergie cédée par le champ électromagnétique aux porteurs de charges, d'autre part égale à l'opposé de la variation d'énergie électromagnétique de l'espace privé de la boule entre les instants  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .

Énergie cédée par le champ à la matière :

$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P}(t) dt$  avec  $\mathcal{P}(t) = \iiint_{M \in (\mathbb{R}^3 - \text{boule})} \gamma E^2(M, t) d\tau_M$ . En découpant l'espace en pellicules sphériques de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$ , on obtient :

$$\mathcal{P}(t) = \int_R^\infty \frac{\gamma Q^2(t)}{4\pi\epsilon_0^2 r^2} dr = \frac{\gamma Q^2(t)}{4\pi\epsilon_0^2 R},$$

d'où

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{\gamma Q_0^2}{4\pi\epsilon_0^2 R} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{Q_0^2 \gamma \tau}{8\pi\epsilon_0^2 R} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Variation d'énergie électromagnétique :

À l'instant  $t$ , l'énergie électromagnétique de l'espace privé de la boule est :

$$U_{em}(t) = \iiint_{M \in (\mathbb{R}^3 - \text{boule})} \epsilon_0 \frac{E^2(M, t)}{2} d\tau_M = \frac{Q^2(t)}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

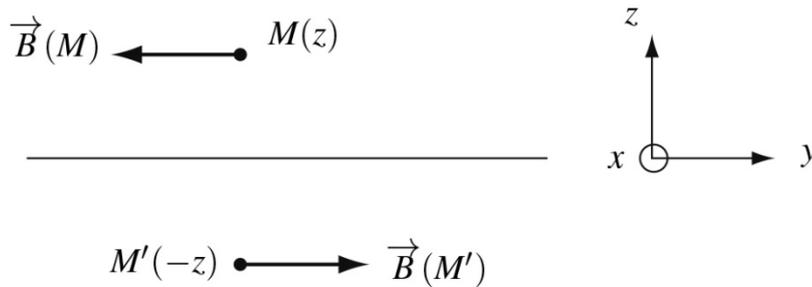
La variation d'énergie électromagnétique au cours de la décharge de la boule est :

$$\Delta U_{em} = U_{em}(\infty) - U_{em}(0) = 0 - \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

L'énergie totale dissipée dans le milieu est :  $\mathcal{E} = -\Delta U_{em}$ . On retrouve bien le résultat précédent.

# EM75 – Bilan d'énergie dans un conducteur ohmique

1. La distribution de courant est invariante par toute translation selon  $Ox$  et  $Oy$  donc le champ magnétique ne dépend que de  $z$ . Le plan  $Mxz$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique au point  $M$  est orthogonal à ce plan. On en déduit :  $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_y$ . De plus, le plan  $Oxy$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc plan d'antisymétrie pour  $\vec{B}$  ; le champ étant parallèle à ce plan, on a donc  $B(z) = -B(-z)$  (voir figure).



L'équation de Maxwell-Ampère en régime statique s'écrit :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Compte tenu de l'étude des symétries et des invariances effectuée précédemment, cette équation donne, à l'intérieur de la plaque :  $\frac{dB}{dz} = -\mu_0 j$ . Nous en déduisons par intégration et en tenant compte de l'imparité de  $B(z)$  :  $B(z) = -\mu_0 j z$  dans le conducteur.

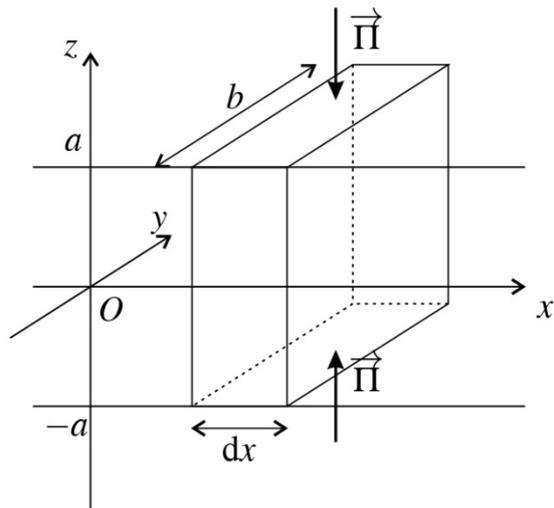
2. À l'intérieur du conducteur, d'après la loi d'Ohm :  $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$ . Nous en déduisons :

$$\vec{\Pi} = -\frac{j^2}{\gamma} z \vec{u}_z, \quad u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 j^2}{2\gamma^2} + \frac{\mu_0 j^2 z^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}.$$

3. La puissance sortant du volume de contrôle est égale au flux du vecteur de Poynting qui se réduit ici au flux à travers les faces supérieures et inférieures du parallélépipède :

$$\mathcal{P}_{\text{sortant}} = \Phi_{\Pi} = \left(-\frac{j^2 a}{\gamma} \vec{u}_z\right) \cdot (bdx \vec{u}_z) + \left(\frac{j^2 a}{\gamma} \vec{u}_z\right) \cdot (bdx \vec{u}_z) = -\frac{2j^2 abdx}{\gamma}.$$

L'énergie électromagnétique contenue dans le parallélépipède ne varie pas car on est en régime permanent :  $\frac{dU_{em}}{dt} = 0$ .



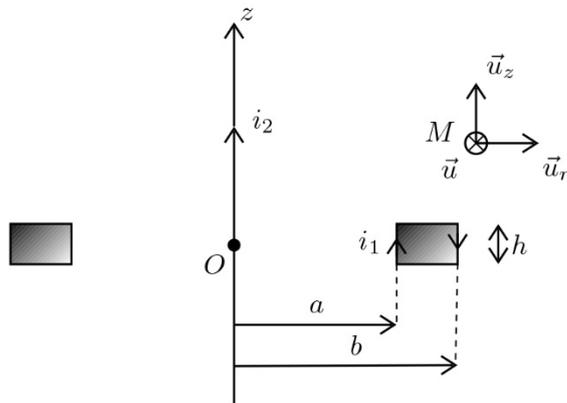
La puissance perdue par le champ électromagnétique est la puissance dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{P}_{\text{perdue}} = \mathcal{P}_J = \frac{j^2}{\gamma} \times 2abdx. \quad \text{Le bilan est exact : } \frac{dU_{em}}{dt} + \Phi_{\Pi} = -\mathcal{P}_{\text{perdue}}.$$

## EM76 – Pince ampèremétrique

1. Le plan  $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie des sources du champ, donc  $\vec{B}_1(M) \perp P$ , c'est-à-dire  $\vec{B}_1(M) // \vec{u}_\theta$ .

La distribution est invariante par rotation d'angle  $\theta$ , donc  $\vec{B}_1$  aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de  $\theta$ .



D'où :

$$\vec{B}_1(M) = B_1(r, z) \vec{u}_\theta$$

On suppose que les conditions de l'ARQS magnétique sont vérifiées : on peut appliquer le théorème d'Ampère à un cercle orienté dans le sens trigonométrique d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  passant par  $M$  :

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = B_1(r) 2\pi r = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

- Si  $M$  est à l'intérieur du tore :  $I_{\text{enlacé}} = N i_1$  en appliquant la règle de la main droite. On en déduit :

$$\vec{B}_{1 \text{ int}} = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- Si  $M$  est à l'extérieur du tore :  $I_{\text{enlacé}} = 0$ . On a donc :

$$\vec{B}_{1 \text{ ext}} = \vec{0}$$

Le flux à travers une spire est :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{spire}} &= \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{spire}} \vec{B}_1 \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 N i_1}{2\pi} h \int_{r=a}^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 N i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

La spire est orientée avec la règle de la main droite.

Le flux à travers les  $N$  spires de la bobine torique vaut :

$$\Phi_P = N \Phi_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 N^2 i_1 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Ce flux est appelé flux propre. On peut l'identifier à  $\Phi_P = L_1 i_1$ , d'où :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

2. On appelle  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  le flux extérieur, c'est à dire le flux du champ magnétique  $\vec{B}_2$  créé par le circuit 2 à travers le circuit 1 :

$$\Phi_{\text{ext}} = \Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{\text{spires de } C_1} \int \int_{M \in \text{spire}} \vec{B}_2 \cdot \vec{dS}_1$$

On va calculer le champ magnétique créé par le circuit 2 :

- Le plan  $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour les courants, sources du champ, donc  $\vec{B}_2(M) \perp P$ , c'est-à-dire  $\vec{B}_2(M) // \vec{u}_\theta$ .
- La distribution  $D$  est invariante par rotation d'angle  $\theta$  et par translation d'axe  $Oz$ , donc  $\vec{B}_2$  aussi. On a donc :

$$\vec{B}_2 = B_2(r) \vec{u}_\theta$$

- On applique le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère est un cercle orienté suivant  $\vec{u}_\theta$  passant par  $M$  et de rayon  $r$  :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}_2 \cdot \vec{dl} = \oint_{\Gamma} B_2(r) \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = B_2(r) 2\pi r = \oplus \mu_0 i_2$$

On a donc :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Le flux de  $\vec{B}_2$  à travers une spire du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1(1\text{spire})} = \iint_S \vec{B}_2 \cdot \vec{dS} = \iint_S \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot dr dz \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

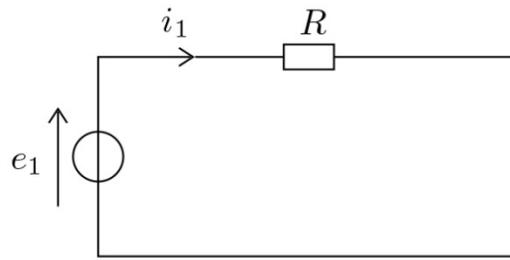
Le flux de  $\vec{B}_2$  à travers les  $N$  spires du tore est :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = N \Phi_{2 \rightarrow 1(1\text{spire})} = \frac{\mu_0 N i_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

On pose  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$ , d'où :

$$M = \frac{\mu_0 N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

3. L'équation électrique s'obtient avec le schéma électrique équivalent en rajoutant la fem d'induction en convention générateur.



La force électromotrice d'induction est :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$$

Le flux du champ magnétique à travers le circuit 1 est :

$$\Phi_1 = \Phi_P + \Phi_{\text{ext}} = L_1 i_1 + M i_2$$

Une erreur fréquente est de ne pas tenir compte du flux propre. Ici, le flux propre dépend de  $N^2$  alors que le flux extérieur dépend de  $N$ . Comme  $N$  est très grand, il n'y a aucune raison de le négliger.

La loi des mailles s'écrit :

$$e_1 = R i_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

Comme la résistance est négligeable d'après l'énoncé, on a :

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = 0$$

En utilisant la notation complexe, on a :  $jL\omega i_1 = -jM\omega i_2$ .

On en déduit une relation faisant intervenir les intensités efficaces :

$$L\omega I_{1\text{eff}} = M\omega I_{2\text{eff}}.$$

Comme  $\frac{L}{M} = N$ , on a :

$$I_{1\text{eff}} = \frac{M}{L} I_{2\text{eff}} = \frac{I_{2\text{eff}}}{N}$$

Une pince ampèremétrique permet donc de mesurer des courants forts (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers d'ampères).

## EM77 – Supraconducteur

1. On cherche  $\vec{B}$  au point  $M$ . Le champ extérieur  $\vec{B}_0$ , source du champ  $\vec{B}$  dans la plaque est orthogonal au plan  $Mxz$ . C'est un plan de symétrie. Donc  $\vec{B}$  lui est orthogonal :  $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_y$ .

Invariance par translation suivant  $y$  et  $z$  :  $B(M) = B(x)$ .

Finalement :  $\vec{B} = B(x)\vec{u}_y$ .

2. Pour trouver l'équation sur  $\vec{B}$ , il faut prendre le  $\overrightarrow{\text{rot}}$  de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0\vec{j}) + \epsilon_0\mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

En régime stationnaire,  $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0$ . Donc :

$$\underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B}}_0 = \mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = \mu_0\left(-\frac{\vec{B}}{\mu_0\ell^2}\right) \Rightarrow \Delta\vec{B} = \frac{\vec{B}}{\ell^2}.$$

3. On projette sur  $y$  pour obtenir l'équation différentielle sur  $B(x)$  :  $\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{B(x)}{\ell^2} = 0$ , dont la solution est  $B(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\ell}\right) + \beta \sinh\left(\frac{x}{\ell}\right)$ .

Attendu que  $\vec{B}$  est continu à l'interface :

$$\begin{cases} B\left(-\frac{d}{2}\right) = B_0 \\ B\left(\frac{d}{2}\right) = B_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cosh\left(-\frac{d}{2\ell}\right) + \beta \sinh\left(-\frac{d}{2\ell}\right) = B_0 \\ \alpha \cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right) + \beta \sinh\left(\frac{d}{2\ell}\right) = B_0 \end{cases}$$

Comme  $\cosh(a) = \cosh(-a)$  et  $\sinh(a) = -\sinh(-a)$  :  $\alpha = \frac{B_0}{\cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right)}$  et  $\beta = 0$ . Ainsi :

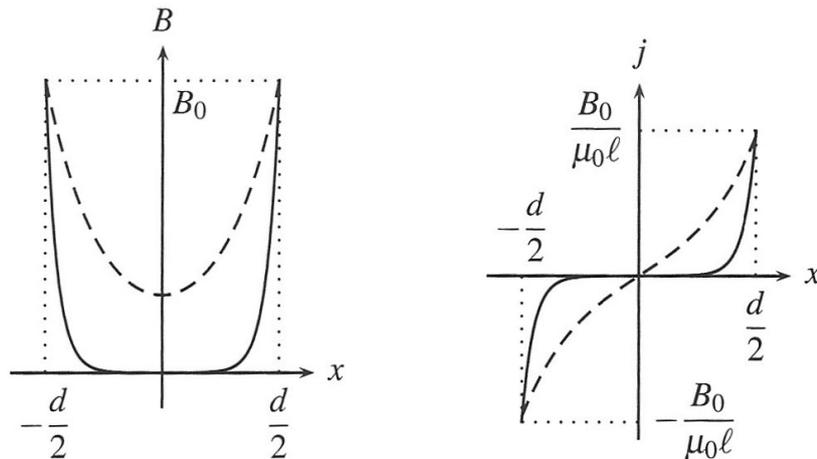
$$\vec{B} = \vec{B}_0 \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right)}.$$

Quant à  $\vec{j}$ , avec l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire :  $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$ , qu'on

développe en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{dB}{dx} \end{pmatrix} = \frac{B_0}{\mu_0 \ell} \frac{\sinh\left(\frac{x}{\ell}\right)}{\cosh\left(\frac{d}{2\ell}\right)} \vec{u}_z.$$

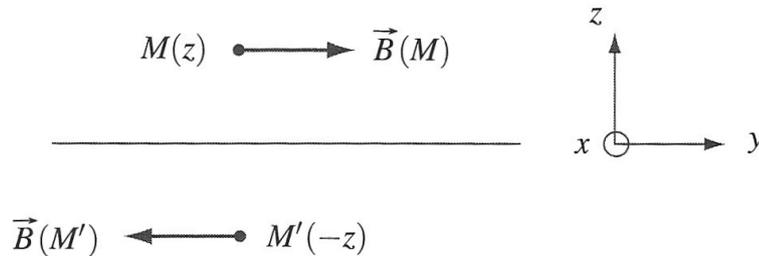
4. En trait simple le cas  $\frac{d}{\ell} = 20$  et en tirets  $\frac{d}{\ell} = 4$  :



Plus  $d$  est grand devant  $\ell$ , plus  $B$  et  $j$  sont tassés sur les bords de la lame et nuls ailleurs. En définitive, le champ magnétique entre sur quelques  $\ell$  dans la lame.

# EM78 – Plaque de cuivre

1. La distribution de courant est invariante par toute translation selon  $Ox$  et  $Oy$  donc le champ magnétique ne dépend que de  $z$ . Le plan  $(Mxz)$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc le champ magnétique au point  $M$  est orthogonal à ce plan. Nous en déduisons :  $\vec{B}(M) = B(z)\vec{u}_y$ . De plus, le plan  $(Oxy)$  est plan de symétrie de la distribution de courant donc :



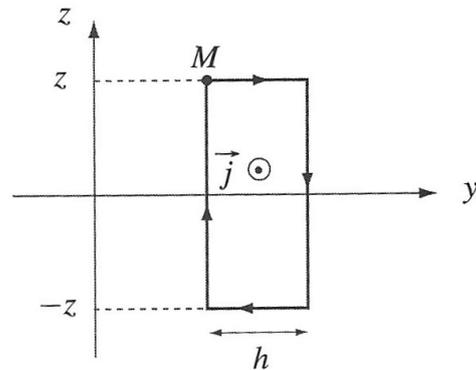
soit  $B(z) = -B(-z)$

2. Appliquons le théorème d’Ampère le long du contour orienté ci-dessous :

La circulation de  $\vec{B}$  le long de ce contour est  $\mathcal{C} = 2B(z)h$ .

L’intensité des courants enlacés par ce contour est :  $I_{\text{enlacé}} = -jah$  si  $z > \frac{a}{2}$  et  $I_{\text{enlacé}} = -j2zh$  si  $0 < z < \frac{a}{2}$  (attention à l’orientation relative du vecteur surface et de la densité de courant).

Le théorème d’Ampère permet d’écrire :



$$\begin{cases} \text{pour } z > \frac{a}{2}, & \vec{B} = -\mu_0 \frac{j}{2} a \vec{u}_y \\ \text{pour } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}, & \vec{B} = -\mu_0 j z \vec{u}_y \\ \text{pour } z < -\frac{a}{2}, & \vec{B} = \mu_0 \frac{j}{2} a \vec{u}_y \end{cases}$$

3. L’équation de Maxwell-Ampère en régime statique s’écrit :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Compte tenu de l’étude des symétries et des invariances effectuée précédemment, cette équation devient :

$\frac{dB}{dx} = -\mu_0 j$  pour  $|z| < \frac{a}{2}$  et  $\frac{dB}{dx} = 0$  pour  $|z| > \frac{a}{2}$ . Ces équations s’intègrent en :

$$\begin{cases} \text{pour } z > \frac{a}{2}, & B = b_1 \\ \text{pour } -\frac{a}{2} < z < \frac{a}{2}, & B = -\mu_0 j z + b_2 \\ \text{pour } z < -\frac{a}{2}, & B = b_3 \end{cases}$$

où  $b_1, b_2$  et  $b_3$  sont des constantes. La fonction  $B(z)$  est impaire donc  $B(0) = 0$ , d’où  $b_2 = 0$ . Le champ magnétique est continu en  $z = \pm \frac{a}{2}$ , donc  $b_1 = -b_3 = -\mu_0 \frac{j}{2} a$ . On retrouve le résultat établi à la question précédente.

## EM79 – Condensateur plan dans l'ARQS électrique

1. L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à négliger de temps de propagation de l'information entre la source du champ électromagnétique et le point où le champ est créé, lorsque les sources sont variables dans le temps. Ici, les sources sont les charges que portent les armatures du condensateur, qui créent le champ électrique  $\vec{E}$ . Le champ  $\vec{B}$  est créé par les variations temporelles de  $\vec{E}$ . Les équations de Maxwell dans l'ARQS électrique sont donc :

$$\text{Maxwell Gauss} \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \text{Maxwell Thomson} \quad \text{div} \vec{B} = 0,$$

qui sont inchangées, et :

$$\text{Maxwell Faraday} \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{Maxwell Ampère} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

l'équation de Maxwell Faraday est cohérente avec un champ électrique uniforme, mais ne rend plus compte du lien entre  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , alors que l'équation de Maxwell Ampère rend compte de l'existence d'un champ  $\vec{B}$  du aux variations temporelles de  $\vec{E}$ .

2. Comme le champ électrique est uniforme, et que l'étude est faite dans le cadre de l'ARQS, le champ électrique dans le condensateur est le même qu'en régime stationnaire, mais avec  $\sigma(t)$  qui dépend du temps :  $\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}$  et  $E(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , donc  $\frac{Q}{\pi a^2} = \epsilon_0 E(t)$ ,

$$Q(t) = \pi a^2 \epsilon_0 E(t).$$

Le schéma du montage pendant la décharge est représenté ci-après, le champ électrique est orienté selon les potentiels décroissants, le courant  $i(t) = \frac{dQ}{dt}$  est orienté vers l'armature qui porte  $Q$ .

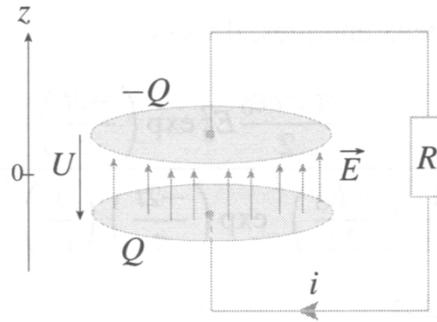


Figure 20.9 – Schéma du circuit.

3. Les sources du champ électromagnétique sont les charges que portent les armatures du condensateur. Tout plan contenant l'axe du condensateur est plan de symétrie pour la distribution de charges. En un point  $M$  situé entre les armatures, le champ magnétique est perpendiculaire au plan qui passe par l'axe du condensateur, parallèle à  $\vec{u}_z$  et qui contient  $M$ , le champ  $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$ . La distribution est invariante par rotation autour de l'axe du condensateur, donc  $\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{u}_\theta$ .

On peut utiliser le théorème de Stokes, en intégrant la circulation de  $\vec{B}$  sur le cercle de rayon  $r$  centré sur l'axe du condensateur :

$$\oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\text{disque}} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$B(r, z) 2\pi r = \epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 E_0 \left( \frac{-1}{\tau} \right) \exp\left( \frac{-t}{\tau} \right)$$

$$\text{d'où : } \vec{B}(r, z) = \left( \frac{-\epsilon_0 \mu_0 r E_0}{2\tau} \right) \exp\left( \frac{-t}{\tau} \right) \vec{u}_\theta.$$

4. En intégrant sur le volume intérieur au condensateur la densité d'énergie électrique, on obtient :

$$\mathcal{E}_e = \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau = \frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{2} E_0^2 \exp\left( \frac{-2t}{\tau} \right).$$

En intégrant sur le volume intérieur au condensateur la densité d'énergie magnétique, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \iiint \frac{1}{2\mu_0} B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{-E_0}{2\tau} \right)^2 \exp\left( \frac{-2t}{\tau} \right) (\epsilon_0 \mu_0)^2 \int r^2 e 2\pi r dr \\ \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{-E_0}{2\tau} \right)^2 \exp\left( \frac{-2t}{\tau} \right) \left( \frac{1}{c^2} \right)^2 2\pi e \frac{a^4}{4}. \end{aligned}$$

En calculant le rapport de ces deux énergies, il vient :

$$\frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m} = \frac{\frac{\pi a^2 e \epsilon_0}{2} E_0^2 \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right)}{\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{-E_0}{2\tau}\right)^2 \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) \left(\frac{1}{c^2}\right)^2 2\pi e \frac{a^4}{4}}$$

$$\frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m} = 8 \frac{c^2 \tau^2}{a^2},$$

on en déduit que le rapport des deux énergies est comparable pour des temps  $\tau$  de l'ordre de  $\tau_{max} \simeq \frac{a}{2\sqrt{2}c}$ , or  $a$  est de l'ordre du centimètre,  $\tau_{max} \simeq 10^{-11}$  s.

Conclusion en régime lentement variable, dont les temps caractéristiques  $\tau$  sont très largement supérieurs à  $\tau_{max}$ , le condensateur se comporte comme un objet purement électrique, puisque  $\frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m} = \left(\frac{\tau}{\tau_{max}}\right) \gg 1$ .

5. Comme  $\vec{\Pi}_{em} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ , en un point situé à l'intérieur du condensateur :

$$\vec{\Pi}_{em} = \frac{E(t) \vec{u}_z \wedge B(t) \vec{u}_\theta}{\mu_0} = -\frac{E(t)B(t)}{\mu_0} \vec{u}_r$$

$$\vec{\Pi}_{em} = \frac{E_0^2 r}{2\tau \mu_0 c^2} \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) \vec{u}_r,$$

on en déduit la puissance qui traverse un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $e$  pendant la durée  $dt$  :

$$\delta \mathcal{E}_{em} = \iint_{cyl} \vec{\Pi}_{em} \cdot \vec{dS} dt$$

$$\delta \mathcal{E}_{em} = \frac{E_0^2}{2\tau \mu_0 c^2} \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) dt \int_{0 \rightarrow e} r 2\pi r dz$$

$$\delta \mathcal{E}_{em} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2\tau} \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) dt 2\pi r^2 e,$$

la puissance qui traverse la surface du cylindre qui délimite le condensateur est :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta \mathcal{E}_{em}}{dt} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{\tau} \exp\left(\frac{-2t}{\tau}\right) \pi a^2 e$$

positive, cela correspond au fait que l'énergie électromagnétique diminue dans le condensateur, lorsqu'on l'intègre entre  $t = 0$  et  $t = \infty$ , on obtient l'énergie qui était initialement dans le condensateur :

$$\int_0^\infty \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \pi a^2 e.$$