

# EM7 – Equations de Maxwell

5.4. Équations de Maxwell		
5.4.1. Postulats de l'électromagnétisme		
Force de Lorentz. Équations locales de Maxwell. Formes intégrales.	Utiliser les équations de Maxwell sous forme locale ou intégrale. Relier l'équation de Maxwell-Faraday et la loi de Faraday. Établir l'équation locale de la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell. Utiliser une méthode de superposition. <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant des capteurs inductifs.</b>	On verra en TP l'utilisation de capteur inductif.
5.4.2. Aspects énergétiques		
Vecteur de Poynting. Densité volumique d'énergie électromagnétique. Équation locale de Poynting.	Utiliser les grandeurs énergétiques pour conduire des bilans d'énergie électromagnétique. Associer le vecteur de Poynting et l'intensité lumineuse utilisée dans le domaine de l'optique.	
5.4.3. Approximation des régimes quasi-stationnaires magnétique		
Équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide.	Établir les équations de propagation des champs électrique et magnétique dans le vide. Expliquer le caractère non instantané des interactions électromagnétiques.	
ARQS magnétique.	Discuter l'approximation des régimes quasi- stationnaires. Simplifier et utiliser les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'approximation du régime quasi-stationnaire. Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.	On fera bien attention à utiliser les équations de Maxwell en fonction des hypothèses introduites.

## I – Postulats de l'électromagnétisme

### I-1) Champ électromagnétique

Le champ électromagnétique est défini par son action sur une charge ponctuelle  $q$ . Dans un référentiel  $R$  où cette particule se trouve au point  $M$  à l'instant  $t$ , animée de la vitesse  $\vec{v}$ , la force de Lorentz qu'elle subit de la part du champ électromagnétique est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{f} = q \left( \vec{E}(M, t)|_R + \vec{v}|_R \wedge \vec{B}(M, t)|_R \right)$$

Cette relation définit le champ électromagnétique au point  $M$ , à l'instant  $t$ , dans le référentiel  $R$  :  $\left( \vec{E}(M, t)|_R, \vec{B}(M, t)|_R \right)$

Contrairement au régime permanent (électrostatique et magnétostatique), les champs électrique  $\vec{E}(M, t)|_R$  et magnétique  $\vec{B}(M, t)|_R$  en  $M$  à l'instant  $t$  ne sont plus indépendants, mais sont **couplés** dans le champ électromagnétique.

## I-2) Equations de Maxwell en régimes variables

Le champ électromagnétique vérifie les quatre équations de Maxwell, qui constituent le postulat de base du cours d'électromagnétisme :

Equations de Maxwell, en régimes variables où  $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 1$  :

- Maxwell-Gauss :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  (M.G)
- Maxwell-Flux ou Thomson :  $\text{div } \vec{B} = 0$  (M.ϕ)
- Maxwell-Faraday :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (M.F)
- Maxwell-Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (M.A)

Dans ces équations,  $\rho$  et  $\vec{j}$  représentent la densité volumique de charges et le vecteur densité de courant électrique au point M à l'instant t.

Les constantes sont :

- La permittivité électrique du vide :  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
- La perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$

Ces deux constantes sont reliées par :

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Remarque :

On les appelle équations de Maxwell dans le « vide » car elles s'appliquent dans un milieu assimilé au vide, c'est-à-dire tel que :  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 = \varepsilon_0$  et  $\mu = \mu_r \mu_0 = \mu_0$  mais dans lequel existent des charges et des courants : il ne s'agit donc pas réellement du « vrai vide » dans lequel on aurait  $\rho$  et  $\vec{j}$  nuls.

Ces équations sont des équations différentielles linéaires : il sera souvent commode d'appliquer le principe de superposition.

### I-3) Compatibilité avec la conservation de la charge

Les quatre équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation de la charge. Si l'on prend en effet la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) &= \mu_0 \operatorname{div}(\vec{j}) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{E})}{\partial t} = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{div}(\vec{j}) &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div}(\vec{E})}{\partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

L'équation de conservation de la charge est donc contenue dans les équations de Maxwell. La théorie électromagnétique de Maxwell ne permet ni l'apparition, ni la disparition de charges.

### I-4) Equations de Maxwell en régimes stationnaires

Equations de Maxwell, en régimes stationnaires :

- Maxwell-Gauss :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  (M.G)
- Maxwell-Flux ou Thomson :  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  (M.ϕ)
- Maxwell-Faraday :  $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$  (M.F)
- Maxwell-Ampère :  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  (M.A)

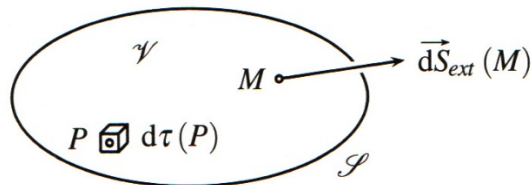
### I-5) Théorème de Gauss

La validité du théorème de Gauss n'est pas remise en cause en régime variable. Ainsi l'équation de Maxwell-Gauss conserve-t-elle la forme, au point P et à la date t :

$$\text{Maxwell} - \text{Gauss} : \operatorname{div} \vec{E}(P, t) = \frac{\rho(P, t)}{\epsilon_0}$$

L'équation de Maxwell-Gauss indique comment une charge volumique crée un champ électrique.

On passe à **la forme intégrale, le théorème de Gauss**, en intégrant l'équation locale sur un volume  $V$  immobile, dans le référentiel d'étude :



$$\iiint_{P \in V} \operatorname{div} \vec{E}(P, t) d\tau = \iiint_{P \in V} \frac{\rho(P, t)}{\epsilon_0} d\tau = \frac{q(t)}{\epsilon_0}$$

qui devient, avec le théorème d'Ostrogradski :

$$\phi_E = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}_{ext, M} = \frac{q(t)}{\epsilon_0}$$

### I-6) Flux conservatif pour $\vec{B}$

Le champ magnétique reste à flux conservatif en régime variable. L'équation de Maxwell-Thomson n'est pas modifiée. Elle s'écrit au point  $P$  et à la date  $t$  :

$$\text{Maxwell} - \text{Thomson} : \operatorname{div} \vec{B}(P, t) = 0$$

L'équation de Maxwell-Thomson indique que le champ magnétique est à flux conservatif.

On passe à la forme intégrée en intégrant l'équation locale sur un volume  $V$  immobile, puis en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

$$\iiint_{P \in V} \operatorname{div} \vec{B}(P, t) d\tau = 0 \Rightarrow \phi_B = \oiint_{M \in S} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS}_{ext, M} = 0$$

Par conséquent, le flux  $\phi(t)$  du champ magnétique à travers une section quelconque d'un tube de champ est indépendant de la section considérée, mais peut éventuellement dépendre du temps.

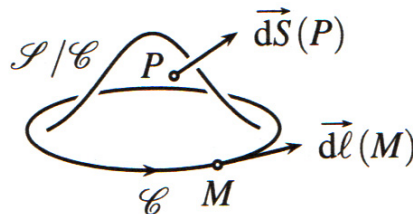
## I-7) Loi de Faraday

En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit au point P et à la date t :

$$\text{Maxwell - Faraday : } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(P, t) = - \frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Faraday indique, qu'en régime variable, un champ magnétique dépendant du temps est source d'un champ électrique.

On passe à la forme intégrée en intégrant l'équation locale sur une surface S immobile :



$$\iint_{P \in S} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(P, t) \cdot \overrightarrow{dS}_P = \iint_{P \in S} - \frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS}_P$$

qui devient, avec le théorème de Stokes, en notant C le contour sur lequel s'appuie la surface S :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_E &= \oint_{M \in C} \vec{E}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl}_M = - \frac{d}{dt} \iint_{P \in S} \vec{B}(P, t) \cdot \overrightarrow{dS}_P \\ &\Leftrightarrow \mathcal{C}_E = - \frac{d\phi_B}{dt} \end{aligned}$$

Remarques :

- On passe aux « d droits » car une fois intégrée le flux magnétique dépend plus que du temps.
- Le flux du champ  $\vec{B}$  n'est pas nul puisque la surface n'est pas fermée.

- La circulation de  $\vec{E}$  sur un contour étant une tension, on retrouve bien un cas particulier de la loi de Faraday vue en PCSI :

$$e = - \frac{d\phi_B}{dt}$$

### I-8) Théorème d'Ampère généralisé

L'équation de Maxwell-Ampère indique que les sources du champ magnétique sont les courants volumiques et les champs électriques variables dans le temps.

Le terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P,t)}{\partial t}$  est nommé courant de déplacement :  $\vec{j}_D$ .

$$\text{On a : } \text{rot } \vec{B}(P,t) = \mu_0 \vec{j}(P,t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(P,t)}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B}(P,t) = \mu_0 (\vec{j}(P,t) + \vec{j}_D(P,t)) \text{ où } \vec{j}_D(P,t) = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P,t)}{\partial t}$$

On passe à la forme intégrée, qui constitue le théorème d'Ampère, en intégrant l'équation locale sur une surface immobile :

$$\iint_{P \in S} \overrightarrow{\text{rot } \vec{B}(P,t)} \cdot \overrightarrow{dS_P} = \mu_0 \iint_{P \in S} \vec{j}(P,t) \cdot \overrightarrow{dS_P} + \mu_0 \iint_{P \in S} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(P,t)}{\partial t} \cdot \overrightarrow{dS_P}$$

qui devient, avec le théorème de Stokes, en notant C le contour sur lequel s'appuie la surface S :

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M,t) \cdot \overrightarrow{dl_M} = \mu_0 I(t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{P \in S} \vec{E}(P,t) \cdot \overrightarrow{dS_P}$$

Cette dernière formule constitue le théorème d'Ampère généralisé.

## I-9) Récapitulatif

Forme locale	Forme intégrale
MG : $\operatorname{div} \vec{E}(P, t) = \frac{\rho(P, t)}{\varepsilon_0}$	$\phi_E = \oiint_{M \in S} \vec{E}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS_{ext, M}} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0}$
M $\phi$ : $\operatorname{div} \vec{B}(P, t) = 0$	$\phi_B = \oiint_{M \in S} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dS_{ext, M}} = 0$
MF : $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E}(P, t) = -\frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t}$	$\oint_{M \in C} \vec{E}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl_M} = -\frac{d}{dt} \iint_{P \in S} \vec{B}(P, t) \cdot \overrightarrow{dS_P}$ $\Leftrightarrow C_E = -\frac{d\phi_B}{dt}$
MA : $\operatorname{rot} \vec{B}(P, t) = \mu_0 \vec{j}(P, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(P, t)}{\partial t}$	$\oint_{M \in C} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl_M} = \mu_0 I(t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \iint_{P \in S} \vec{E}(P, t) \cdot \overrightarrow{dS_P}$ $\Leftrightarrow C_B = \mu_0 I(t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi_E}{dt}$

## II – Energie électromagnétique

## II-1) Bilan d'énergie électromagnétique

## a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique, notée  $u_{em}(M, t)$ , est telle que dans un volume élémentaire mésoscopique  $d\tau$  situé en un point M du référentiel R, l'énergie électromagnétique  $dU_{em}$ , s'exprime par :

$$dU_{em} = u_{em} d\tau$$

## b) Energie cédée aux porteurs

Il est établi dans le chapitre EM1, l'expression de la puissance volumique cédée au milieu par le champ  $(\vec{E}, \vec{B})$ :

$$\frac{dP_{port}}{d\tau} = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t)$$

$$\Leftrightarrow dP_{port} = \vec{j}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) d\tau$$

## c) Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting au point M à l'instant t, noté  $\vec{I}(M, t)$  permet d'exprimer la quantité d'énergie électromagnétique qui traverse une surface élémentaire dS pendant la durée dt.

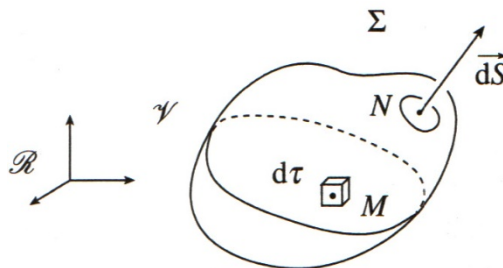
La puissance électromagnétique traversant une surface S (puissance rayonnée) est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface :

$$dP_{ray} = \underbrace{\vec{I}}_{Wm^{-2}} \cdot \vec{dS}$$

Le vecteur de Poynting représentant une énergie transportée par rayonnement, c'est tout naturellement qu'on l'associera en optique à la notion d'intensité lumineuse.

## d) Équation locale de conservation de l'énergie

Pour effectuer le bilan d'énergie électromagnétique, on raisonne sur un volume V de l'espace, fixe dans le référentiel dans lequel est défini le champ électromagnétique étudié.



On note :

- $U_{em}(t)$  : l'énergie électromagnétique contenue dans le volume V à l'instant t ;
- $P_{ray}$  : le flux d'énergie électromagnétique qui sort du volume V en traversant  $\Sigma$  ;
- $P_{port}$  la puissance cédée aux porteurs par le champ électromagnétique.



L'énergie contenue dans  $V$  varie pendant la durée  $dt$  d'une quantité :

$$U_{em}(t + dt) - U_{em}(t) = -P_{ray} dt - P_{port} dt$$

Cette énergie varie, car une partie en a été rayonnée pendant la durée  $dt$  et une autre, a été cédée aux porteurs de charge. Le signe «-» traduit le fait que l'énergie est cédée (perdue) par le système.

Soit :

$$\begin{aligned} \iiint_V (u_{em}(M, t + dt) - u_{em}(M, t)) d\tau &= - \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt \\ \Leftrightarrow \iiint_V \frac{\partial u_{em}}{\partial t} dt d\tau &= - \iiint_V \text{div}(\vec{\Pi}) d\tau dt - \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt \\ \Rightarrow \iiint_V \left( \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} \right) d\tau dt &= 0 \end{aligned}$$

Comme le volume  $V$  est quelconque, la nullité de la dernière intégrale n'est possible que si la grandeur que l'on intègre est nulle en tout point, d'où l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, aussi appelée équation de Poynting :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}(\vec{\Pi}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

## II-2) Vecteur de Poynting

Il reste à identifier les expressions de  $u_{em}$  et  $\vec{\Pi}$  en fonction des champs. Pour cela, on utilise les équations de Maxwell :

$$MG : \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad MT : \text{div} \vec{B} = 0$$

$$MF : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad MA : \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On exprime alors le vecteur  $\vec{j}$ , que l'on multiplie scalairement par  $\vec{E}$  :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \cdot \vec{E}$$

$$\text{Or : } \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} (-\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \frac{1}{\mu_0} \left( -\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) + -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$$

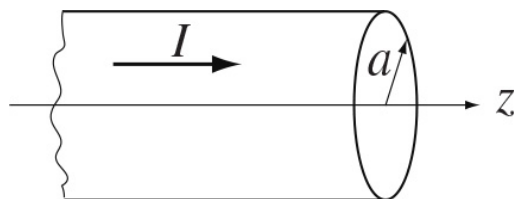
$$\text{Or : } \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - \text{div}(\vec{\Pi})$$

Par identification on obtient :

- Densité d'énergie électromagnétique :  $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$
- Vecteur de Poynting :  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

### II-3) Bilan d'énergie d'un cylindre conducteur

Vérifions l'équation de Poynting sur un exemple. Considérons un cylindre conducteur, de conductivité électrique  $\gamma$ , de rayon  $a$ , parcouru par le courant  $I$  uniformément réparti en volume :



Soit :

$$\vec{j}(r < a) = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z \Rightarrow \vec{E}(r < a) = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \vec{u}_z$$

De plus :

$$\vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 j r}{2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

Or :

$$\begin{aligned} U_{em} &= \iiint_{M \in \text{Cyl}} \left( \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d\tau \\ \Leftrightarrow U_{em} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{\gamma\pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{M \in \text{Cyl}} \left( \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \right)^2 2\pi r h dr \\ \Leftrightarrow U_{em} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{I}{\gamma\pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h + \frac{\pi h}{\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 \frac{a^4}{4} \\ \Leftrightarrow U_{em} &= \frac{\varepsilon_0 I^2}{2\gamma^2} \frac{h}{\pi a^2} + \frac{\mu_0 I^2 h}{16\pi} = \text{cste} \Rightarrow \frac{dU_{em}}{dt} = 0 \end{aligned}$$

Calculons la puissance rayonnée par le volume, le vecteur de Poynting s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = - \left( \frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{r}{2\gamma} \vec{u}_r \\ \Rightarrow P_{entrant} &= - \iint_{S_{lat}} \vec{\Pi} \cdot \vec{dS} = \left( \frac{I}{\pi a^2} \right)^2 \frac{a}{2\gamma} 2\pi a h \\ \Rightarrow P_{entrant} &= -P_{ray} = \frac{I^2 h}{\gamma\pi a^2} \end{aligned}$$

Calculons la puissance cédée aux porteurs :

$$\begin{aligned} P_{port} &= \iiint_{\text{volume}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \gamma E^2 \pi a^2 h \\ \Leftrightarrow P_{port} &= \gamma \left( \frac{I}{\gamma\pi a^2} \right)^2 \pi a^2 h = \frac{I^2 h}{\gamma\pi a^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\underbrace{\frac{dU_{em}}{dt}}_{=0} + P_{port} + P_{ray} = 0$$

### III – Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) magnétique

#### III-1) Equations de propagation dans le vide

Dans ce paragraphe, on se place dans une région où il n'y a ni charges ni courants, c'est-à-dire le « vrai » vide.

Equations de Maxwell, en régimes variables dans le vide :

- Maxwell-Gauss :  $\text{div } \vec{E} = 0$  (M.G)
- Maxwell-Flux ou Thomson :  $\text{div } \vec{B} = 0$  (M.ϕ)
- Maxwell-Faraday :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  (M.F)
- Maxwell-Ampère :  $\text{rot } \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  (M.A)

Cherchons l'équation de propagation :  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

Les opérateurs rotationnel et dérivation par rapport au temps portent sur des variables indépendantes donc ils commutent.

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\left( \frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}}{\partial t} \right) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Or : } \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{E}) = -\overrightarrow{\Delta} \vec{E}$$

$$\Rightarrow -\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

De même en partant de  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})$  on montre :

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

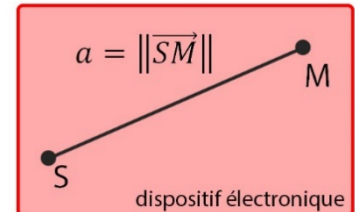
Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient l'équation de d'Alembert dans un milieu vide de sources électromagnétiques :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ et } \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

### III-2) ARQS magnétique

#### a) Temps de retard

On considère un dispositif électrique, dont la taille caractéristique est notée  $a$ .



On note de façon symbolique S un point baptisé « source », et on note de même M, un point baptisé « observateur », où est détecté le champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  résultant de l'existence des sources dans le circuit. Les points S et M appartenant tous deux au circuit étudié, l'échelle de distance caractéristique entre S et M est notée  $a$ .

En régime variable, les grandeurs électromagnétiques varient avec le temps. On désigne par T, le temps caractéristique associé à l'évolution temporelle de la répartition de charges et de courants en S. Dans le cas d'une évolution périodique, on peut adopter pour T la période temporelle...L'étude du phénomène de propagation montre qu'une évolution survenant au point S, se propage et s'observe au point M avec un temps de retard qui dépend de la célérité de l'onde et de la distance  $a$  entre S et M. On établira l'expression de leur célérité  $c$ .

Ainsi, le temps de retard, noté  $\tau$ , vaut :  $\tau = \frac{a}{c}$

## b) Expression en ordres de grandeur

En notant  $a$  et  $T$  les grandeurs caractéristiques :

On remplace :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot} \leftrightarrow 1/a \\ \frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow 1/T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\overrightarrow{rot} \vec{E}\| \sim \frac{E}{a} \text{ et } \|\overrightarrow{rot} \vec{B}\| \sim \frac{B}{a} \\ \left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \sim \frac{E}{T} \text{ et } \left\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\| \sim \frac{B}{T} \end{cases}$$

## c) ARQS magnétique

L'ARQS magnétique constitue un écart à la magnétostatique dans le sens où, comme en magnétostatique, un champ magnétique est créé par un courant, mais ce courant n'étant plus permanent, sa présence engendre en plus de l'existence d'un champ magnétique, celle d'un champ électrique.

L'équation de MF s'écrit en ordre de grandeur :  $\frac{E}{a} \sim \frac{B}{T}$

L'équation de Maxwell-Ampère, s'écrit donc :

$$\frac{B}{a} \sim \mu_0 j + \frac{E}{c^2 T} \Rightarrow \frac{B}{a} \sim \mu_0 j + \frac{aB}{c^2 T} \Rightarrow \frac{B}{a} \sim \mu_0 j + \frac{aB}{c^2 T^2}$$

Le terme  $\frac{aB}{c^2 T^2}$  de l'égalité précédente, apparaît comme un écart à la forme que l'on obtiendrait en régime permanent :  $\frac{B}{a} \sim \mu_0 j$ , correspondant à l'équation de Maxwell-Ampère en régime permanent.

Lorsque cet écart est infiniment petit devant les autres termes, on peut alors le négliger et considérer que l'équation de Maxwell-Ampère conserve la même forme que celle du régime permanent.

Cette approximation est donc possible lorsque :

$$\frac{aB}{c^2 T^2} \ll \frac{B}{a} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2 T^2} \ll 1 \Rightarrow a \ll cT \Rightarrow \tau = \frac{a}{c} \ll T$$

Cela signifie que le temps nécessaire à la propagation des signaux temporels associés aux grandeurs électromagnétiques, de  $S$

jusqu'au point d'observation M, est suffisamment faible devant T, temps caractéristique décrivant l'évolution temporelle de ces signaux, pour que le phénomène de propagation puisse être considéré comme instantané.

On est dans l'ARQS lorsqu'on peut considérer que les champs ne sont pas en retard par rapport aux sources qui les créent, donc si on peut négliger le temps de propagation de l'OEM devant le temps de variation des sources de champ. L'ARQS magnétique est valable dès que :

$$a \ll cT \text{ ou } \tau \ll T$$

où a est la distance caractéristique entre les sources et l'observateur, et T le temps caractéristique de variation des sources.

Dans le cas du régime sinusoïdal de pulsation temporelle on a :  $\lambda = cT$ . Or  $a = c\tau$ , donc la condition précédente peut aussi s'écrire :

$$\tau = \frac{a}{c} \ll \frac{\lambda}{c} \Rightarrow \lambda \gg a$$

Par exemple si  $f = 100\text{kHz} \Rightarrow \lambda = 3\text{km}$ , on est bien dans l'ARQS magnétique en TP d'électronique.

### III-3) Propriétés de l'ARQS magnétique

#### a) Equations de maxwell

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Maxwell - Gauss} : \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{Maxwell - Thomson} : \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \text{Maxwell - Faraday} : \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{Maxwell - Ampère} : \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

## b) Conservation de la charge

La forme simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère montre que :

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

Dans l'ARQS, la densité de courant électrique  $\vec{j}$  est à flux conservatif, et vérifie donc, à un instant  $t$ , les propriétés suivantes :

- Le flux  $\phi(t)$  de  $\vec{j}$  à travers toute surface fermée est nul ;
- L'intensité  $I_{\Sigma}(t)$  traversant une section  $\Sigma$  d'un tube de champ du vecteur  $\vec{j}$  est indépendante de la section  $\Sigma$ . Il suffit donc de la noter  $I(t)$
- L'intensité électrique vérifie la loi des nœuds.

## c) Théorème d'Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère garde, dans l'ARQS, la même forme que celle du régime permanent. On peut donc reconduire à l'instant  $t$  le même raisonnement permettant d'établir le théorème d'Ampère.

$$\oint_{M \in C} \vec{B}(M, t) \cdot \overrightarrow{dl_M} = \mu_0 I(t)$$

On peut donc étendre à l'ARQS les expressions des champs magnétiques, établies dans le cas statique.