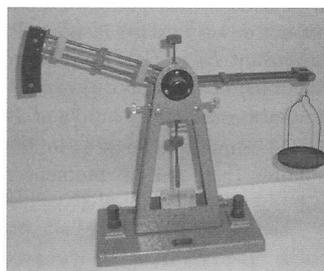
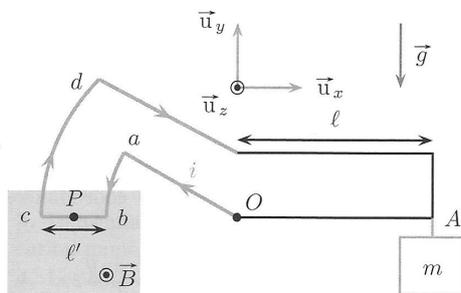


EM6 – Induction

A – Travaux dirigés

EM61 – Balance de Cotton

De nos jours, on utilise des teslamètres à effet Hall ou des méthodes de résonance magnétique pour mesurer les champs magnétiques. La balance de Cotton, appareil un peu désuet, est l'ancêtre du teslamètre. Son principe consiste à mesurer les forces de Laplace exercées par le champ magnétique duquel on cherche à déterminer l'intensité. Une balance de Cotton fonctionne comme une balance de pesée à deux plateaux. Le dispositif peut pivoter sans frottements autour de l'axe horizontal. La partie de droite, en noir, peut recevoir des masses marquées sur un plateau suspendu en A. La partie de gauche, en gris, est parcourue par un système de fils électriques alimentés par un courant i connu. Il règne, dans la région grisée, un champ magnétique horizontal uniforme (entrefer d'un aimant, par exemple) dont on veut déterminer la valeur. Le champ magnétique est nul ailleurs. Les portions ab et cd de fil électrique sont des arcs de cercle de centre O . Les autres parties du câblage sont rectilignes. On note P le milieu de $[bc]$. Cette partie gauche de la balance est soumise à des forces de Laplace. L'idée de la mesure est de placer des masses marquées à droite pour compenser exactement les forces de Laplace, de manière à équilibrer la balance. On montre, dans cet exercice, que la connaissance de la masse m permet de remonter à la valeur du champ magnétique.

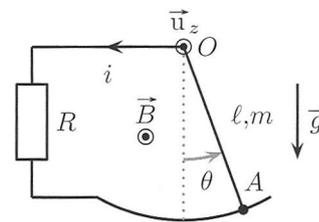


- 1°) Calculer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) du poids de la masse m située sur le plateau.
- 2°) Calculer le moment par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) des forces de Laplace s'appliquant sur la partie du câblage qui baigne dans \vec{B} .
- 3°) En traduisant l'équilibre de la balance, donner la relation entre B , i , g , m et les dimensions de la balance. Si le champ magnétique \vec{B} pointe comme indiqué sur le schéma, quel signe faut-il donner au courant i pour observer l'équilibre de la balance ?
- 4°) Avec un courant $i = 1,0$ A, $l=10$ cm, $l'=1,0$ cm, $OP = 10$ cm, quelle intensité de champ magnétique peut-on mesurer, sachant que les masses marquées à disposition sont d'un décigramme?

Rép : 1°) $M_{\text{pois}} = -mgl$ 2°) $M_{\text{la}} = -iB * OP * l'$ 3°) $B = -\frac{mgl}{i * OP * l'}$ 4°) $B=0,1$ T

EM62 - Pendule conducteur

Un pendule pesant est constitué d'une barre métallique homogène de longueur l et de masse m , pouvant pivoter sans frottement (liaison pivot parfaite) par rapport à l'axe horizontal (O, \vec{u}_z) . Son moment d'inertie par rapport à cet axe est J . Son extrémité inférieure est en contact sans frottement avec un arc de cercle métallique (point A). Le circuit électrique plan ainsi constitué est refermé par des fils et possède une résistance R . Son auto-inductance est négligée. L'ensemble baigne dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$. La position de la barre est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. On veut étudier les petits mouvements de la barre autour de la position $\theta=0$.

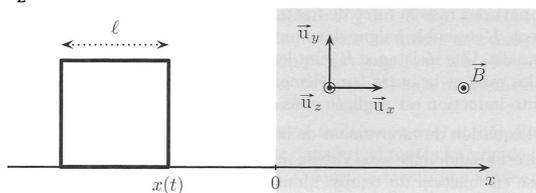


- 1°) Établir l'équation mécanique vérifiée par l'angle θ .
- 2°) Établir l'équation électrique du circuit (vérifiée par l'intensité i , dont l'orientation a été choisie arbitrairement sur le schéma).
- 3°) En déduire l'équation du mouvement de la barre et la mettre sous forme canonique en faisant apparaître une pulsation caractéristique ω_0 et un facteur de qualité Q .
- 4°) Commenter et expliquer l'influence de la résistance R sur la nature du mouvement de la barre. Tous les paramètres autres que R étant fixés, faire apparaître une valeur critique R_c de R qui sépare les différents régimes.

Rép : 1°) $J\ddot{\theta} = -\frac{mgl}{2} \sin\theta + \frac{1}{2}i^2l^2B$ 2°) $e = Ri = -\frac{1}{2}Bl^2\dot{\theta}$ 3°) $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ où $\omega_0^2 = \frac{mgl}{2J}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{B^2l^2}{4JR}$ 4°) $R_c = \frac{B^2}{2} \sqrt{\frac{l^7}{8mgJ}}$

EM63 - Freinage électromagnétique

Un cadre carré de cuivre, de résistance électrique totale R et d'auto-inductance négligeable, de côté l et de masse m , est astreint à se déplacer sur une glissière horizontale sans frottement. On repère par $x(t)$ la position de son côté droit. Il arrive depuis $x = -\infty$ avec la vitesse initiale $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$. Il pénètre dans la zone $x > 0$ (grisée sur le schéma) où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$.



- 1°) Établir l'équation du mouvement du cadre pour tout x (en séparant différents cas si nécessaire).
- 2°) On prend pour origine des temps ($t = 0$) l'instant où le cadre commence à entrer dans le champ magnétique. Donner l'évolution de la vitesse $v(t)$ et de la position $x(t)$ du cadre.
- 3°) Le dispositif est utilisé comme ralentisseur. On note T l'instant où il finit d'entrer dans la zone de champ. On souhaite que le cadre ait la vitesse αv_0 à cet instant, où α est un réel.

- Déterminer T en fonction de α et des données.
- Quel est l'intervalle de valeurs possibles pour α ? Est-ce normal ?
- Déterminer l'intensité $|\vec{B}|$ du champ magnétique qu'il faut imposer en fonction de α et des données. Commenter l'influence des différents paramètres sur $|\vec{B}|$.

- 4°) Les données numériques sont $v_0 = 1,0 \text{ ms}^{-1}$; $m = 0,10 \text{ kg}$; $R = 1,0 \Omega$. Pour chacun des deux cas $l=1,0 \text{ m}$ et $l=10 \text{ cm}$, déterminer l'intensité du champ magnétique nécessaire pour arrêter complètement le cadre. Ces champs sont-ils réalisables?

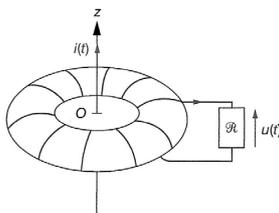
Rép : 1°) $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$ où $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$ 2°) $x = v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ 3°) $|\vec{B}| = \sqrt{\frac{(1-\alpha)v_0 m R}{l^3}}$ 4°) 10T ou 0.31T...

B – Exercices supplémentaires

EM64 - Détection ampèremétrique

Une bobine torique, de rayon moyen R et de section circulaire de rayon a , comprend N spires, suffisamment serrées pour que l'on considère le bobinage continu (invariant par rotation autour de l'axe Oz du tore). Un dipôle purement résistif est placé entre les bornes du bobinage, sa résistance R est très supérieure à celle correspondant au bobinage lui-même. Un fil rectiligne infini, situé sur l'axe Oz , est parcouru par un courant d'intensité imposée : $i(t)$.

- 1°) On note L l'inductance propre du bobinage et M l'inductance mutuelle entre les deux circuits : fil et bobine. Proposer une équation différentielle liant la tension $u(t)$, relevée aux bornes du résistor, à l'intensité $i(t)$.



- 2°) Identifier quel type d'opérateur permet d'associer $u(t)$ à $i(t)$ (linéarité, bande passante...).
- 3°) En déduire la forme du signal détecté pour différents signaux : $i(t)$ continu, sinusoïdal.
- 4°) On raisonne dans l'approximation $a \ll R$ (tore de faible section), permettant de considérer le champ magnétique uniforme au sein du tore. Déterminer alors l'expression des coefficients d'inductance L et M sachant que le champ créé par le fil est de la forme : $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ et celui du tore : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i'}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
- 5°) Si la bobine a une section carrée de côté a , reprendre le calcul de L et M sans faire d'hypothèse concernant les valeurs relatives de a et R .

Rép : 1°) $\frac{L}{R} \frac{du}{dt} + u = -\frac{M di}{dt}$ 2°) Filtre passe haut 3°) Constant : rien n'est détecté... 4°) $L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R}$ et $M = \frac{\mu_0 N a^2}{2R}$

5°) $L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$ et $M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+\frac{a}{2}}{R-\frac{a}{2}}\right)$

EM65 - Circuits électriques couplés

On étudie deux circuits électriques d'inductances propres respectives L_1 et L_2 , couplés par l'inductance mutuelle M . Le premier circuit contient un générateur de fem E dépendant du temps. Le second est purement passif. Cela modélise par exemple une carte RFID au voisinage d'une antenne créant un champ magnétique variable temporellement. Les intensités i_1 et i_2 ont été orientées arbitrairement sur le schéma. La fem délivrée par le générateur varie sinusoidalement dans le temps à la pulsation ω avec l'amplitude $E_m > 0 : E(t) = E_m \cos(\omega t)$. On veut trouver les expressions des intensités dans les deux circuits en régime établi.

1°) Expliquer pourquoi il est légitime de travailler en complexes en posant :

$$\underline{E} = E_m \exp^{j\omega t}, \underline{i}_1 = I_{1,m} \exp^{j\omega t}, \underline{i}_2 = I_{2,m} \exp^{j\omega t}$$

Établir le système d'équations vérifié par les amplitudes complexes $I_{1,m}$ et $I_{2,m}$.

2°) Pour simplifier les calculs, on suppose que $R_1 = R_2$ (noté simplement R), $L_1 = L_2$ (noté L) et $C_1 = C_2$ (noté C). Exprimer les deux amplitudes complexes $I_{1,m}$ et $I_{2,m}$ en fonction de ω , M , L , R , C et E_m .

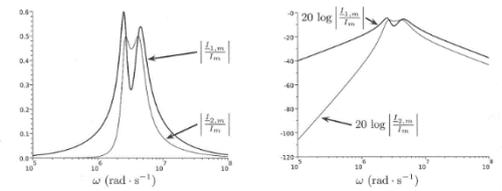
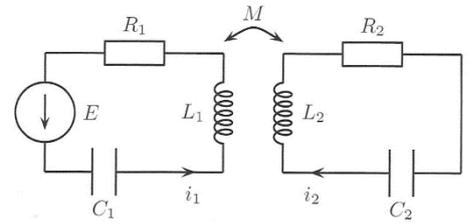
3°) Le coefficient M est supposé positif. Pour adimensionner les expressions précédentes, on note $\omega_a = \frac{1}{RC}$, $\omega_b = \frac{R}{L}$, $\omega_c = \frac{R}{M}$ et $I_m = \frac{E_m}{R}$. Établir les expressions de $\frac{I_{1,m}}{I_m}$ et $\frac{I_{2,m}}{I_m}$ en fonction de ω et des trois pulsations caractéristiques introduites.

4°) On prend $R = 10 \Omega$, $C = 1,0 \cdot 10^{-8} F$, $L = 1,0 \cdot 10^{-5} H$ et $M = L/2$. À l'aide d'un ordinateur ou d'une calculatrice, tracer :

$\left| \frac{I_{1,m}}{I_m} \right|$ et $\left| \frac{I_{2,m}}{I_m} \right|$ en fonction de ω (en échelle logarithmique pour ω , en justifiant le choix fait pour l'intervalle de ω). Interpréter le graphe obtenu.

5°) Tracer $20 \log \left| \frac{I_{1,m}}{I_m} \right|$ et $20 \log \left| \frac{I_{2,m}}{I_m} \right|$ en échelle logarithmique. Certains aspects des graphes obtenus étaient-ils prévisibles?

Rép : 1°) 2°) ... 3°) $\left| \frac{I_{1,m}}{I_m} \right| = -\frac{1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b}}{-(1 + \frac{\omega_a + j\omega}{\omega_b})^2 + (\frac{j\omega}{\omega_c})^2}$ et $\left| \frac{I_{2,m}}{I_m} \right| = -\frac{\frac{j\omega}{\omega_c}}{-(1 + \frac{\omega_a + j\omega}{\omega_b})^2 + (\frac{j\omega}{\omega_c})^2}$ 4°) et 5°)



EM66 - Sens et signes

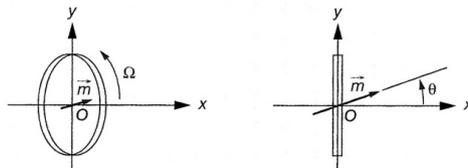
Une bobine de surface S et d'axe Oz est placée à l'origine O de l'espace ; sa résistance électrique est notée R , son nombre de spires N . L'aimant, assimilé à un dipôle magnétique, se déplace le long de Oz à vitesse constante V . On note $z(t)$ sa cote à l'instant t et $\vec{m} = m \vec{u}_z$ son moment dipolaire magnétique.

- Le champ créé par l'aimant au centre de la spire est donné par $\vec{B} = -\frac{\mu_0 m}{2\pi z^3} \vec{u}_z$, en déduire une expression approchée du flux, dans le modèle d'une bobine de petite dimension.
- Exprimer l'intensité i induite dans la bobine, en faisant apparaître la vitesse V et la cote z .
- Examiner le lien entre les signes de V et de i .

Rép : a) $\Phi = NBS$ b) $i = -\mu_0 * \frac{3mNSV}{2\pi Rz^4}$ c) ...

EM67 - Dissipation par effet Joule

Une spire circulaire métallique de rayon a et d'axe Ox a son centre situé à l'origine O de l'espace. Un dipôle magnétique également en O est animé d'un mouvement de rotation, à vitesse Ω constante, dans le plan xOy . On admet que lorsque l'angle que fait le moment dipolaire avec \vec{u}_x , est égal à θ , le flux du champ créé dans la spire s'écrit $\Phi = \Phi_0 \cos \theta$, où Φ_0 est une constante qu'on ne cherchera pas à calculer.

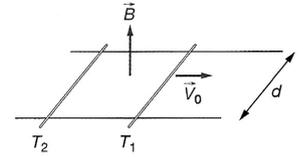


- Justifier l'existence d'un courant induit dans la spire. Son intensité i est-elle constante, variable et périodique ou autre ?
- On note R la résistance électrique de la spire et on néglige son inductance propre. Exprimer i en fonction de Φ_0 , θ , Ω et R .
- En déduire l'expression de la puissance perdue par effet Joule dans la spire. Cette puissance ne peut être générée spontanément ! Quelle est son origine ?

Rép : a) ... b) $i = \frac{\Omega \Phi_0}{R} \sin \theta$ c) $P = Ri^2$

EM68 - Deux tiges

Deux tiges T_1 et T_2 identiques (masse) sont mobiles sans frottement sur deux rails parallèles (distance d) situés dans un plan horizontal. Un champ magnétique permanent uniforme et vertical règne en tout point. À l'instant initial, la tige T_1 est animée d'une vitesse v_0 , tandis que T_2 est immobile. La résistance électrique de chaque tige est égale à $R/2$ et on néglige la résistance des rails. Les frottements mécaniques sont négligés.



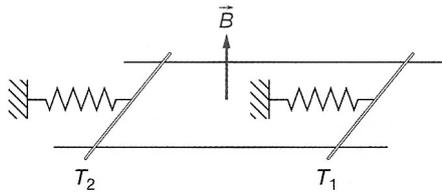
- Par une analyse qualitative, montrer que simultanément la tige T_2 va se mettre en mouvement tandis que T_1 va ralentir.
- Établir l'expression de la loi de variation de chacune des vitesses au cours du temps.
- Quel est l'état de mouvement après une durée suffisamment longue ?
- Parmi les grandeurs quantité de mouvement et énergie mécanique, quelle est celle qui se conserve, celle qui décroît ?

Rép : a)... b) $v_1 = \frac{v_0}{2} \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 \right)$ et $v_2 = \frac{v_0}{2} \left(-e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 \right)$ c)... d) $E_c = \frac{1}{4} m v_0^2$

EM69 - Oscillateurs couplés

On reprend le système des deux rails évoqués dans l'exercice précédent. Chaque tige est ici liée à un ressort (non conducteur électrique) de constante de raideur, horizontal, d'axe parallèle aux rails.

- Écrire le système d'équations différentielles régissant l'évolution des positions des tiges (comptées à partir des positions d'équilibre).
- Montrer, pour des conditions initiales quelconques, que le mouvement de chaque tige obtenu après un temps très long est sinusoïdal et préciser sa période.
- Interpréter en invoquant les aspects énergétiques.



Rép : a) $\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{B^2 d^2}{mR} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + \frac{k}{m} x_1 = 0$ b) $x_1 = x_2 = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ c)...