

EM6 – Induction

A – Travaux dirigés

EM61 – Balance de Cotton

1. Le poids de la masse m s'applique à la balance par le point A . Le moment du poids en O est donc, par définition, $\overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g} = \ell \vec{u}_x \wedge m(-g \vec{u}_y) = -mg\ell \vec{u}_z$. En projetant ce vecteur sur l'axe \vec{u}_z , on obtient le moment scalaire par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) , $\mathcal{M}_{\text{poids}} = -mg\ell$.

2. Le moment des forces de Laplace sur les côtés ab et cd est nul car les forces élémentaires $i \vec{dl} \wedge \vec{B}$, orthogonales aux arcs de cercles, passent par l'axe (O, \vec{u}_z) : elles n'ont donc aucun effet sur la rotation de la balance autour de cet axe. En revanche, les forces sur le côté bc ont un moment non nul. Sur le côté bc , un élément de courant s'écrit $i \vec{dl} = -i dx \vec{u}_x$. La force élémentaire de Laplace subie par cet élément de courant est donc

$$d\vec{F} = i \vec{dl} \wedge \vec{B} = i dx \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_z = -i dx B \vec{u}_y.$$

Le moment élémentaire en O de cette force élémentaire qui s'applique en un point M défini par $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x$ s'écrit $d\mathcal{M} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} = x \vec{u}_x \wedge (-i dx B \vec{u}_y) = -iBx dx \vec{u}_z$. En projetant sur \vec{u}_z et en intégrant (dans le sens conventionnel du courant) sur le côté $[bc]$, on obtient le moment scalaire

$$\mathcal{M} = \int_b^c d\mathcal{M} = \int_{x_b}^{x_c} -iBx dx = -iB \left[\frac{x_c^2}{2} - \frac{x_b^2}{2} \right] = -iB \underbrace{\frac{1}{2}(x_b + x_c)}_{=-OP} \underbrace{(x_c - x_b)}_{-\ell'}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{\text{la}} = -i \times B \times OP \times \ell'.$$

3. Dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen, la balance est soumise à quatre actions :

- ▶ son poids, qui s'applique en O et a donc un moment nul par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) ;
- ▶ la liaison pivot en O , qui exerce un moment nul sur la balance ;
- ▶ les forces de Laplace et le moment du poids de la masse m , dont les moments ont été calculés.

À l'équilibre de la balance, la somme de tous ces moments est nulle

$$\mathcal{M}_{\text{poids}} + \mathcal{M}_{\text{la}} = 0 \iff -mg\ell - i \times B \times OP \times \ell' = 0 \iff B = -\frac{mg\ell}{i \times OP \times \ell'}.$$

Pour que la balance soit en équilibre, il faut $i < 0$ si $B > 0$, c'est-à-dire si le champ magnétique pointe vers le lecteur.

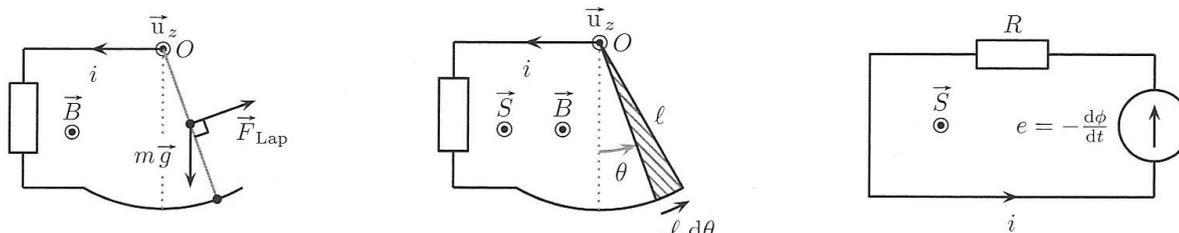
4. Avec une masse de $1,0 \times 10^{-4}$ kg et les dimensions indiquées, le champ magnétique mesurable est

$$B = -\frac{1,0 \times 10^{-4} \times 10 \times 0,10}{1,0 \times 0,1 \times 1,0} \Rightarrow B = 0,1 \text{ T}.$$

Cela correspond à l'ordre de grandeur du champ magnétique au pôle d'un barreau aimanté. Pour mesurer des champs magnétiques moins intenses, il faut abaisser la valeur de i . Les inconvénients de la balance de Cotton par rapport au teslamètre à effet Hall sont :

- ▶ la nécessité que le champ magnétique à mesurer soit horizontal ;
- ▶ la taille de la zone où le champ est uniforme pour que les expressions calculées soient valables.

EM62 – Pendule conducteur



1. Étant donné que la barre a un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \vec{u}_z) , c'est l'application du théorème du moment cinétique par rapport à cet axe qui donnera l'équation du mouvement. Il faut donc déterminer les moments par rapport à cet axe des actions subies par la barre. L'orientation de l'axe (O, \vec{u}_z) donne l'orientation du plan par la règle de la main droite : le sens positif de rotation est le sens trigonométrique. La barre est soumise à son poids $m\vec{g}$ qui s'applique en son centre d'inertie, situé à la distance $\frac{\ell}{2}$ du point O car la barre est homogène (voir schéma). Le bras de levier du poids par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) est donc $\frac{\ell}{2} \sin \theta$ et le moment scalaire du poids $\mathcal{M}_{\text{poids}} = -mg \frac{\ell}{2} \sin \theta$. Le signe « moins » vient du fait que, si $\theta > 0$ (cas du schéma), le poids a tendance à faire tourner la barre dans le sens négatif. La force de Laplace s'écrit, en coordonnées cylindriques d'axe (O, \vec{u}_z) , $\vec{F}_{Lap} = i\ell B \vec{u}_\theta$ et s'applique au milieu de la barre. Son bras de levier est la distance $\frac{\ell}{2}$ (voir schéma), donc le moment scalaire de cette force est $\mathcal{M}_{La} = +\frac{1}{2} i\ell^2 B$. Le signe « plus » traduit que cette force fait tourner la barre dans le sens positif quand i et B sont positifs. Enfin, la liaison pivot entre la barre et l'axe (O, \vec{u}_z) est parfaite, donc exerce un moment nul sur la barre. Le théorème du moment

cinétique appliqué à la barre s'écrit, en projection sur l'axe (O, \vec{u}_z) ,

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{M}_{\text{poids}} + \mathcal{M}_{\text{la}} \Rightarrow J\ddot{\theta} = -mg\frac{\ell}{2} \sin\theta + \frac{1}{2} i\ell^2 B.$$

2. Le vecteur surface \vec{S} du circuit est orienté par i et la règle de la main droite, donc $\vec{S} = S \vec{u}_z$, où S est l'aire du circuit (inconnue par manque de données géométriques). Le flux magnétique à travers le circuit est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS$ et la fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt}$. Ce n'est donc pas l'aire S qui importe, mais sa dérivée temporelle. Entre deux instants voisins t et $t + dt$, la barre se déplace d'un angle élémentaire $d\theta$ et balaie la surface élémentaire dS hachurée sur le schéma. Il s'agit approximativement d'un triangle de base élémentaire $\ell d\theta$ et de hauteur ℓ . Son aire est donc $dS = \frac{1}{2} \ell \times \ell d\theta$ et correspond à l'accroissement (algébrique) de l'aire S . En divisant par dt , $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}$ et la fem est $e = -\frac{1}{2} B \ell^2 \dot{\theta}$. Le schéma électrique équivalent donne l'équation

$$e = Ri, \text{ donc } i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{2} \frac{B\ell^2}{R} \dot{\theta}.$$

3. On remplace i par cette expression dans l'équation mécanique et on utilise l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$, valable pour l'étude des petits mouvements au voisinage de $\theta = 0$. On obtient l'équation du mouvement,

$$\ddot{\theta} + \frac{B^2\ell^4}{4JR} \dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J} \theta = 0 \iff \ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \text{ avec } \omega_0^2 \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \frac{mg\ell}{2J} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \frac{B^2\ell^4}{4JR}.$$

4. Si la barre est abandonnée sans vitesse initiale depuis une position $\theta_0 \neq 0$, l'équation du mouvement donne deux régimes différents en fonction de la valeur du facteur de qualité Q . Si $Q < \frac{1}{2}$, le mouvement est amorti et apériodique (absence d'oscillations car les solutions sont exponentielles décroissantes). Si $Q > \frac{1}{2}$, le mouvement est pseudo-périodique amorti car la solution mathématique est le produit d'une sinusoïde par une exponentielle décroissante. On mémorise facilement les deux cas par la phrase suivante : « le facteur de qualité mesure la qualité des oscillations ». Ainsi, un facteur de qualité grand correspond au cas où il y a de « bonnes » oscillations. Dans ce cas, la valeur numérique de Q donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations ayant lieu avant amortissement complet. En utilisant la définition de

ω_0^2 et $\frac{\omega_0}{Q}$, on obtient $Q = \frac{R}{B^2} \sqrt{\frac{8mgJ}{\ell^7}}$. On constate que Q croît avec R , donc une grande

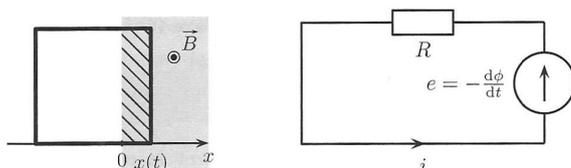
résistance permet de bonnes oscillations et une résistance trop faible empêche les oscillations. C'est normal car une résistance faible permet la circulation d'un fort courant induit, donc une force de Laplace intense. Or, d'après la loi de modération de Lenz, cette force tend toujours à s'opposer au mouvement de la barre (freinage magnétique). Une faible résistance donne donc lieu à un fort freinage et atténue immédiatement tout mouvement de la barre. La valeur qui sépare les deux types de régimes correspond au régime critique, défini par $Q = \frac{1}{2}$, ce qui donne

la résistance critique $R_c = \frac{B^2}{2} \sqrt{\frac{\ell^7}{8mgJ}}$.

EM63 – Freinage électromagnétique

1. Tant que le cadre n'est pas arrivé dans le champ magnétique, aucun phénomène d'induction ne se passe (flux magnétique nul à travers le cadre) et il n'y a pas de courant induit dans le cadre, donc pas de forces de Laplace. Le cadre est donc un simple solide qui se translate horizontalement sans frottements : sa vitesse est constante. De même, si le cadre baigne complètement dans le champ magnétique uniforme, il est traversé par un flux magnétique constant.

Il n'y a pas de phénomène d'induction et la vitesse est constante. C'est donc seulement quand le cadre entre dans le champ magnétique ($x \in [0, \ell]$) que le flux magnétique varie et donne lieu à un courant induit. On oriente le courant (arbitrairement) dans le sens trigonométrique. La zone du cadre traversée par le champ magnétique est un rectangle de hauteur ℓ et de largeur



$x(t)$, hachuré sur la figure E.24.2. Avec l'orientation choisie, son vecteur surface est $\vec{S} = \ell x \vec{u}_z$. Le flux magnétique correspondant est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B\ell x$ et la fem induite dans le cadre est, en convention générateur, $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \frac{dx}{dt} = -B\ell v(t)$. D'après le schéma électrique équivalent, $e = Ri$, donc $i = -\frac{B\ell v}{R}$ (équation électrique du problème). D'après la règle des trois doigts, les forces de Laplace s'exerçant sur les côtés haut et bas du cadre sont verticales. Elles sont donc sans influence sur le mouvement horizontal du cadre. Seule la force de Laplace s'exerçant sur le côté droit du cadre est pertinente : $\vec{F}_{1a} = i\ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i\ell B \vec{u}_x$. La loi de la quantité de mouvement appliquée au cadre dans le référentiel galiléen d'étude s'écrit $\sum \vec{F} = m \frac{dv}{dt}$, soit, en projection sur \vec{u}_x , $F_{1a} = m \frac{dv}{dt}$,

$$i\ell B = -\frac{B^2 \ell^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad \text{avec} \quad \tau \stackrel{\text{d'ef.}}{=} \frac{mR}{B^2 \ell^2}.$$

2. En prenant pour origine des temps $t = 0$ l'instant où le cadre pénètre dans le champ ($x = 0$ et $v = v_0$), cette équation se résout en $v(t) = v_0 \exp(-t/\tau)$. La position du cadre est l'intégrale de la vitesse,

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t v_0 \exp(-t/\tau) dt \Rightarrow x(t) = v_0 \tau [1 - \exp(-t/\tau)].$$

Rappelons que ces équations ne sont valables que pour $x \in [0, \ell]$. En dehors de cet intervalle, la vitesse du cadre est constante.

3. En reprenant l'expression trouvée pour la vitesse, la question posée se traduit par $\alpha v_0 = v_0 \exp(-T/\tau)$, donc $\alpha = \exp(-T/\tau)$ et $T = -\tau \ln \alpha$. L'expression de α montre que $\alpha \in [0, 1]$, ce qui signifie que le cadre ne peut que ralentir. C'est normal d'après la loi de modération de Lenz : en entrant dans le champ magnétique, les phénomènes d'induction se déclenchent et tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance (le mouvement du cadre). On traduit que le cadre finit d'entrer dans le champ à $t = T$ par $\ell = v_0 \tau [1 - \exp(-T/\tau)]$, soit, d'après l'expression de T , $\ell = v_0 \tau (1 - \alpha)$. En remplaçant τ par son expression, on obtient

$$|B| = \sqrt{\frac{(1-\alpha)v_0 m R}{\ell \times \ell^2}}. \quad \text{Il ne faut pas oublier la valeur absolue, car } B \text{ intervient au carré dans les}$$

calculs. Comme d'habitude, on trouve que le sens du champ magnétique est sans influence sur le phénomène de freinage magnétique. L'intensité du champ nécessaire au freinage croît avec m et v_0 : plus le cadre est lourd et rapide, plus il faut un champ intense pour le freiner. Plus la résistance R est grande, plus $|B|$ doit l'être. C'est normal car R grand diminue l'intensité possible des courants induits, donc des forces de Laplace ralentisseuses. La longueur ℓ intervient au dénominateur. Plus le cadre est grand, moins le champ a besoin d'être intense. Il y a deux raisons à cela.

- La durée d'entrée dans le champ est alors plus grande et le ralentissement peut s'effectuer sur plus de temps (c'est l'influence du terme ℓ seul).
- Le terme ℓ^2 vient de l'expression de la force de Laplace, qui est d'autant plus intense que la longueur du côté vertical droit du cadre est grande.

Enfin, $\alpha \in [0,1]$. Plus α est faible, plus la vitesse finale est faible, donc plus le freinage doit être intense, ce qui s'obtient avec un champ fort. Il est donc normal que $|B|$ décroisse avec α .

4. On peut remarquer que l'arrêt complet du cadre (cas où $\alpha = 0$) nécessite un temps infini ($T \rightarrow +\infty$ si $\alpha \rightarrow 0$), car la vitesse ne fait que tendre vers zéro sans jamais l'atteindre (décroissance exponentielle). En prenant $\alpha = 0$ (arrêt complet) et les valeurs numériques proposées, on trouve $B \simeq 10 \text{ T}$ pour le cas $\ell = 10 \text{ cm}$ et $B \simeq 3,1 \cdot 10^{-1} \text{ T}$ pour le cas $\ell = 1,0 \text{ m}$. Le champ de 0,31 tesla est éventuellement réalisable à l'aide d'un gros électroaimant, mais le champ de 10 teslas ne l'est pas (voir page 574). Pour s'affranchir de ces problèmes, on peut bobiner le cadre pour multiplier les forces de Laplace par le nombre de tours de fil. Cela fait cependant croître la masse du cadre ainsi que la résistance totale du fil.

B – Exercices supplémentaires

EM64 - Détection ampèremétrique

1. L'étude qualitative renseigne sur la nature des phénomènes mis en jeu : les variations de l'intensité $i(t)$ parcourant le fil provoquent une modification du champ magnétique régnant dans le tore et donc un phénomène d'induction. Puisque le bobinage est fermé sur un dipôle résistif, un courant induit $i'(t)$ apparaît. L'étude du phénomène d'induction dans le circuit bobiné nécessite donc la prise en compte d'un terme dû au champ propre et d'un terme de mutuelle induction.

Il est alors possible d'exprimer la force électromotrice induite dans le bobinage par la relation de Faraday :

$$e = -M \frac{di}{dt} - L \frac{di'}{dt}.$$

On en déduit la relation faisant intervenir la tension aux bornes du dipôle résistif : $u(t) = \mathcal{R} i'(t) = e$. L'équation différentielle liant $i(t)$ à $u(t)$ est donc la suivante :

$$\frac{L}{\mathcal{R}} \frac{du}{dt} + u = -M \frac{di}{dt}.$$

2. L'équation différentielle précédente est linéaire à coefficients constants, elle correspond donc à un filtrage. Pour préciser de quelle nature de filtre il s'agit, on peut déterminer la fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{u}{i} = -j\omega M \frac{1}{1 + \frac{j\omega L}{\mathcal{R}}}.$$

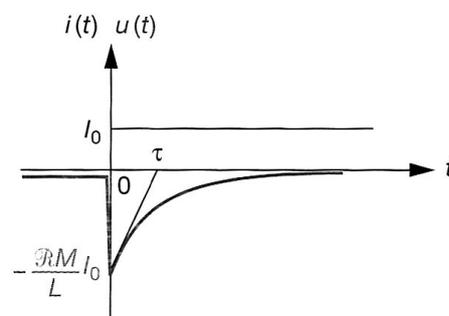
Il s'agit donc d'un filtre passe-haut, de pulsation de coupure basse $\omega_c = \frac{\mathcal{R}}{L}$ et de gain en haute fréquence $-\frac{\mathcal{R}M}{L} = -\frac{\mathcal{R}}{N}$.

3. Pour un courant d'intensité i constante, le dispositif ne détecte rien (un signal constant dans le temps présente une pulsation nulle). L'absence de variation du champ créé empêche en effet l'apparition d'un phénomène d'induction.

Pour un courant d'intensité variant sinusoidalement, la tension détectée sera de même forme et même pulsation (en régime sinusoïdal forcé d'un système linéaire, on observe la réponse harmonique).

Si la pulsation des variations de $i(t)$ est très supérieure à ω_c , l'amplitude des variations de la tension est proportionnelle à l'amplitude de $i(t)$ d'un facteur égal à $\frac{\mathcal{R}}{N}$. Les deux signaux sont en opposition de phase si les orientations choisies sont celles de la figure

Pour un échelon d'intensité, on retrouve la réponse indicielle d'un filtre passe-haut. La tension subit une variation brutale, puis s'annule exponentiellement avec une constante de temps égale à L/\mathcal{R} .



4. Notons $\Phi = Li'(t) + Mi(t)$ le flux du champ magnétique dans le tore. Il s'agit d'une combinaison linéaire, dont nous déterminons les coefficients séparément : d'abord M en considérant i non nul et i' nul, puis L dans la situation inversée.

Si seul i circule, le champ magnétique est celui créé par un fil rectiligne (chapitre 33, paragraphe 1.6), c'est-à-dire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

Dans le tore de faible section, on peut considérer ce champ uniforme, donc le flux à travers une spire est :

$$\varphi = B(R) S = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \pi a^2,$$

car on se place ici dans le cas où les sens d'orientation des deux circuits conduisent à un champ et une normale de même sens.

Calculé pour les N spires, le flux mutuel est donc :

$$\Phi = N\varphi = \frac{\mu_0 N a^2}{2R} i,$$

le coefficient d'inductance mutuelle s'écrivant alors :

$$M = \frac{\mu_0 N a^2}{2R}.$$

On procède de même pour déterminer L ($i = 0$, i' non nul), en exploitant l'analogie avec un solénoïde de densité linéique de spires $n = N/\ell$, avec $\ell = 2\pi R$. En effet, l'hypothèse $a \ll R$ permet de considérer le rayon de courbure R du bobinage comme très grand (pour plus de détails, on peut se reporter à l'exercice 5 du chapitre précédent). Pour N spires, le champ obtenu est donc :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N i'}{2\pi r} \vec{u}_\theta,$$

il est quasi uniforme sur la section d'une spire. Ainsi,

$$\varphi = \frac{\mu_0 N i'}{2\pi R} \pi a^2$$

et le flux total devient :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R} i'.$$

Le coefficient d'inductance propre s'écrit finalement :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a^2}{2R}.$$

M est proportionnel à N , parce que le flux est calculé à travers N spires, mais L varie en N^2 , car le champ propre est lui-même proportionnel à N .

5. Dans le cas d'un tore de section carrée, l'expression du champ magnétique reste identique. Il est en effet ortho-radial par raison de symétrie et le produit de B par la longueur $\ell = 2\pi r$ d'une ligne de champ est égal à $\mu_0 I_T$, où l'intensité enlacée est $i + N i'$, si la ligne considérée est à l'intérieur du tore.

En revanche, le champ n'est plus uniforme sur la section d'une spire. On doit donc calculer le flux φ par une intégrale sur une spire, ce qui s'effectue en découpant la surface carrée en des petits rectangles d'aire $dS = a dr$:

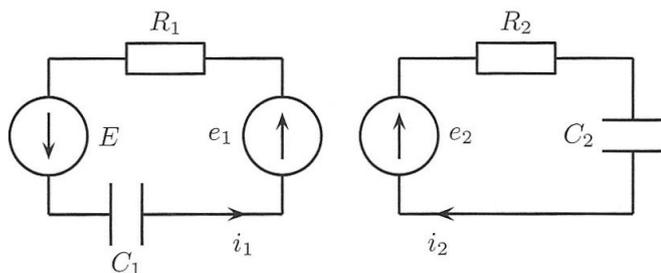
$$\varphi = \int_{R-a/2}^{R+a/2} B(r) a dr.$$

Puisque $\int_{R-a/2}^{R+a/2} \frac{dr}{r} = \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right)$, il vient :

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right),$$

$$M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} a \ln\left(\frac{R+a/2}{R-a/2}\right).$$

EM65 - Circuits électriques couplés



1. Les composants électriques utilisés sont linéaires et les lois de l'induction le sont également. Les équations différentielles régissant le comportement du circuit seront donc linéaires. À cause des résistances (éléments dissipatifs d'énergie), les solutions homogènes des équations différentielles tendent vers zéro (système stable). Il ne subsiste donc que les solutions particulières sinusoïdales en régime sinusoïdal forcé. La stabilité et la linéarité (les deux sont nécessaires) permettent de travailler en complexes en posant $\underline{E} = E_m \exp(j\omega t)$, $\underline{i}_1 = \underline{I}_{1,m} \exp(j\omega t)$ et $\underline{i}_2 = \underline{I}_{2,m} \exp(j\omega t)$. Les fem induites, orientées en convention générateur (voir schéma électrique équivalent de la figure E.23.2), sont données par la loi de Faraday,

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

En complexes, avec les conventions posées, elles s'écrivent $\underline{e}_1 = -L_1 j\omega \underline{i}_1 - M j\omega \underline{i}_2$ et $\underline{e}_2 = -L_2 j\omega \underline{i}_2 - M j\omega \underline{i}_1$. En notant \underline{Z}_C l'impédance complexe d'un condensateur, la loi des mailles appliquée à chaque circuit du schéma électrique équivalent s'écrit, en complexes,

$$\underline{E} + \underline{e}_1 = R_1 \underline{i}_1 + \underline{Z}_{C_1} \underline{i}_1 \quad \text{et} \quad \underline{e}_2 = R_2 \underline{i}_2 + \underline{Z}_{C_2} \underline{i}_2.$$

En remplaçant \underline{e}_1 et \underline{e}_2 par leurs expressions, le système d'équations vérifié par \underline{i}_1 et \underline{i}_2 est

$$(R_1 + \underline{Z}_{C_1} + L_1 j\omega) \underline{i}_1 + M j\omega \underline{i}_2 = \underline{E} \quad \text{et} \quad M j\omega \underline{i}_1 + (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + L_2 j\omega) \underline{i}_2 = 0.$$

Chacune des grandeurs complexes \underline{i}_1 , \underline{i}_2 et \underline{E} est proportionnelle à $\exp(j\omega t)$. On peut donc simplifier le système d'équations obtenu par $\exp(j\omega t)$, qui est non nul, ce qui donne

$$(R_1 + \underline{Z}_{C_1} + L_1 j\omega) \underline{I}_{1,m} + M j\omega \underline{I}_{2,m} = E_m \quad \text{et} \quad M j\omega \underline{I}_{1,m} + (R_2 + \underline{Z}_{C_2} + L_2 j\omega) \underline{I}_{2,m} = 0.$$

2. Avec les notations, posées par l'énoncé, ce système devient

$$(R + \underline{Z}_C + L j\omega) \underline{I}_{1,m} + M j\omega \underline{I}_{2,m} = E_m \quad \text{et} \quad M j\omega \underline{I}_{1,m} + (R + \underline{Z}_C + L j\omega) \underline{I}_{2,m} = 0.$$

Pour le résoudre, on a intérêt à procéder par combinaison linéaire pour faire des éliminations. Par exemple, on multiplie la première équation par $-(R + \underline{Z}_C + L j\omega)$, la seconde par $M j\omega$ et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues, ce qui élimine $\underline{I}_{2,m}$. On procède de la même manière pour éliminer $\underline{I}_{1,m}$ et on obtient

$$\underline{I}_{1,m} = \frac{-(R + \underline{Z}_C + L j\omega)}{-(R + \underline{Z}_C + L j\omega)^2 + (M j\omega)^2} E_m \quad \text{et} \quad \underline{I}_{2,m} = \frac{-M j\omega}{(R + \underline{Z}_C + L j\omega)^2 - (M j\omega)^2} E_m.$$

À ce stade, il n'est pas utile de remplacer \underline{Z}_C par $\frac{1}{j\omega C}$.

3. L'adimensionnement proposé par l'énoncé peut se faire de manière naturelle dans chacune des deux équations. On remplace E_m par RI_m pour faire apparaître l'intensité I_m au membre de droite. Par ailleurs, on factorise le numérateur par R et le dénominateur par R^2 pour que les grandeurs dans les parenthèses soient sans dimension. On obtient

$$\frac{I_{1,m}}{I_m} = \frac{-\left(1 + \frac{Z_C}{R} + j\omega \frac{L}{R}\right)}{-\left(1 + \frac{Z_C}{R} + j\omega \frac{L}{R}\right)^2 + \left(j\omega \frac{M}{R}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{I_{2,m}}{I_m} = \frac{-j\omega \frac{M}{R}}{\left(1 + \frac{Z_C}{R} + j\omega \frac{L}{R}\right)^2 - \left(j\omega \frac{M}{R}\right)^2}.$$

En remplaçant Z_C par son expression, on fait apparaître la quantité RC et on peut introduire les trois pulsations ω_a , ω_b et ω_c :

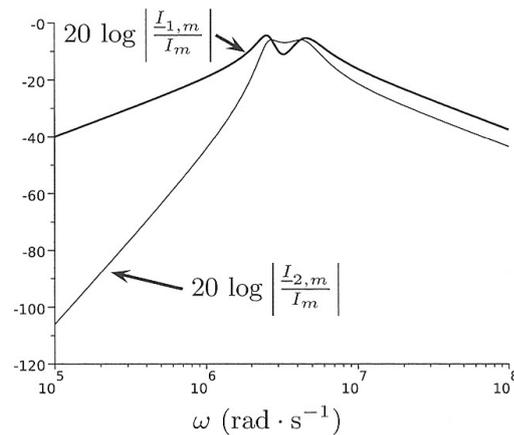
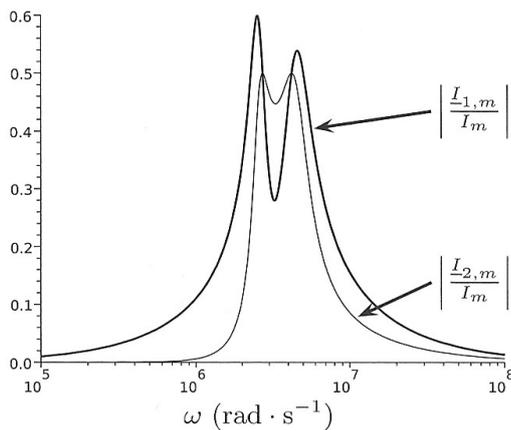
$$\frac{I_{1,m}}{I_m} = \frac{-\left(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b}\right)}{-\left(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b}\right)^2 + \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad \text{et} \quad \frac{I_{2,m}}{I_m} = \frac{-\frac{j\omega}{\omega_c}}{\left(1 + \frac{\omega_a}{j\omega} + \frac{j\omega}{\omega_b}\right)^2 - \left(\frac{j\omega}{\omega_c}\right)^2}.$$

4. Avec les valeurs données, on obtient $\omega_a = 1,0 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_b = 1,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_c = 2,0 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On trace donc $\left|\frac{I_{1,m}}{I_m}\right|$ et $\left|\frac{I_{2,m}}{I_m}\right|$ sur un intervalle de ω contenant ces valeurs, par exemple $\omega \in [10^5, 10^8] \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (les figures E.23.3 ont été obtenues avec le logiciel Scilab).

On note la présence de deux pulsations de résonance. C'est un phénomène général : il peut y avoir jusqu'à N pulsations de résonance distinctes pour un ensemble de N oscillateurs couplés linéairement.

5. Le tracé en échelle logarithmique (diagramme de Bode pour le gain) montre des asymptotes.

- Pour $\omega \rightarrow 0$, $\frac{I_{1,m}}{I_m} \sim +\frac{j\omega}{\omega_a}$: pente à +20 dB/dec.
- Pour $\omega \rightarrow 0$, $\frac{I_{2,m}}{I_m} \sim +\frac{(j\omega)^3}{\omega_a^2 \omega_c}$: pente à +60 dB/dec (le second circuit répond très mal à basse fréquence).
- Pour $\omega \rightarrow +\infty$, $\frac{I_{1,m}}{I_m} \propto \frac{1}{j\omega}$: pente à -20 dB/dec.
- $\frac{I_{2,m}}{I_m} \propto \frac{1}{j\omega}$: pente à -20 dB/dec.



EM66 - Sens et signes

a) Le champ dipolaire sur l'axe s'exprime en fonction de la distance r selon $\mu_0 \frac{m}{2\pi r^3}$. Ici, il faut tenir compte du signe de la cote z du dipôle : $z = -r$. Le champ \vec{B} au centre de la bobine a donc pour expression :

$$\vec{B} = -\mu_0 \frac{m}{2\pi z^3} \vec{u}_z.$$

Considérer la bobine de petite dimension (devant la distance à l'aimant) permet de calculer le flux en considérant le champ uniforme sur la section : $\Phi = NBS$.

b) Le flux dépend du temps *via* $z(t)$, on peut utiliser la dérivée d'une composée de fonctions : $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ où $\frac{dz}{dt} = V$. Ainsi, la force électromotrice donnée par la loi de Faraday est :

$$e = -\mu_0 \frac{3mNS}{2\pi z^4} V.$$

L'intensité $i = e/R$ s'écrit :

$$i = -\mu_0 \frac{3mNSV}{2\pi Rz^4}.$$

c) Lorsque V est négatif, le flux diminue dans la bobine, donc l'intensité est positive. La loi de modération est satisfaite, car le champ magnétique créé par le courant induit dans la bobine tend à s'opposer à la décroissance du flux.

Adopter $V \geq 0$ revient à rapprocher l'aimant de la bobine. Le flux Φ augmente, i devient négative conformément à la loi de modération.

EM67 - Dissipation par effet Joule

a) Le flux du champ magnétique créé par l'aimant à travers la spire est variable, car l'angle θ varie selon la loi :

$$\theta(t) = \Omega t + \theta_0,$$

où θ_0 est l'angle que fait le moment dipolaire avec l'axe de la bobine à l'origine des temps.

La spire est donc le siège d'un phénomène d'induction. Le mouvement de rotation de l'aimant est périodique (sa période est $T = \frac{2\pi}{\Omega}$), donc l'intensité $i(t)$ possède la même période.

b) On utilise la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice d'induction.

L'expression du flux étant $\Phi(t) = \Phi_0 \cos(\Omega t + \theta_0)$, sa dérivée est $-\Omega \Phi_0 \sin(\Omega t + \theta_0)$. On en déduit :

$$e(t) = \Omega \Phi_0 \sin(\theta).$$

L'induction propre étant négligée, le schéma équivalent électrique ne comprend que la source de tension de force électromotrice e et la résistance R (Fig. 22). L'intensité induite est donc :

$$i(t) = \frac{\Omega \Phi_0}{R} \sin(\theta).$$

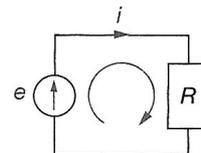


Figure 22

c) La puissance dissipée par effet Joule dans la spire est :

$$P_J = Ri^2 = \frac{\Omega^2 \Phi_0^2}{R} \sin^2(\theta).$$

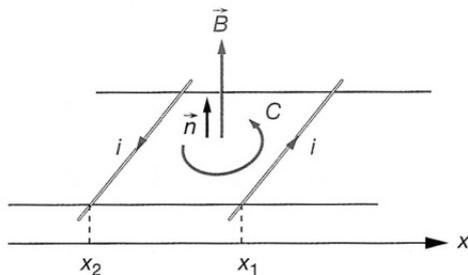
Pour maintenir le dipôle en rotation à vitesse constante, un opérateur doit exercer une action mécanique (en pratique un couple de forces). C'est donc la puissance mécanique donnée par l'opérateur qui est dissipée par effet Joule.

Le chapitre suivant donne un cadre plus général à ces considérations, en parlant de conversion électromécanique de puissance.

EM68 – Deux tiges

a) À l'instant initial, les vitesses des tiges sont différentes. Le circuit formé par les deux tiges et les portions de rail les séparant voit donc varier sa surface (Fig. 17). On en déduit que le flux du champ magnétique à travers ce circuit varie, ce qui provoque l'apparition d'une force électromotrice induite et donc d'un courant.

De ce fait, chaque tige subit une force de Laplace, dont on peut déterminer le sens grâce à la loi de modération. En effet, la cause première est la différence de vitesse : T_1 étant en mouvement tandis que T_2 est immobile. L'effet est donc certainement la mise en mouvement de T_2 et le ralentissement de T_1 .



b) La surface du circuit formé par les tiges et les portions de rail les séparant est égale à $d(x_1 - x_2)$; avec l'orientation retenue, on aboutit à un flux valant : $\Phi = Bd(x_1 - x_2)$. La force électromotrice induite est calculée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bd(v_1 - v_2)$. Pour une résistance électrique totale R , l'intensité du courant induit est donc :

$$i = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Bd}{R} (v_1 - v_2).$$

Toutes les grandeurs manipulées ici sont algébriques ; cette précaution est essentielle car la méthode présentée s'applique alors à tout problème ! La force de Laplace exercée sur T_1 a pour composante sur Ox : $F_1 = +Bdi$, tandis que T_2 subit $F_2 = -Bdi$. On en déduit les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{Bd}{m} i \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{Bd}{m} i. \end{aligned}$$

L'obtention d'équations relatives à chaque vitesse prise séparément suppose un découplage. On peut opérer en sommant ou soustrayant les deux équations mécaniques. On pose $S = v_1 + v_2$ et $D = v_1 - v_2$.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 0 \\ \frac{dD}{dt} &= -2 \frac{B^2 d^2}{mR} D. \end{aligned}$$

La somme des vitesses est constante : avec les valeurs initiales,

$$v_1 + v_2 = V_0.$$

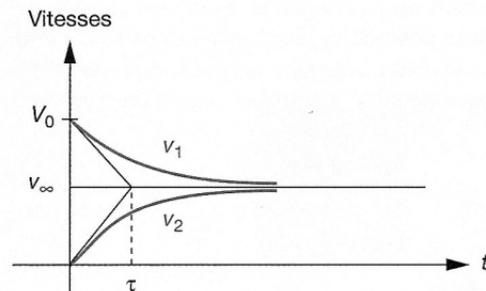
La différence des vitesses tend vers 0 avec une constante de temps $\tau = \frac{mR}{2B^2d^2}$. L'utilisation des conditions initiales donne $v_1 - v_2 = V_0 \exp(-t/\tau)$.

On calcule alors chaque vitesse par somme et différence des résultats précédents :

$$v_1 = \frac{V_0}{2} \left[\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 1 \right] \text{ et } v_2 = \frac{V_0}{2} \left[-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 1 \right].$$

c) On confirme ici ce que la loi de modération a permis de prévoir *a priori* : la tige T_1 ralentit pendant que la tige T_2 accélère (Fig. 18). Après une durée de l'ordre de

quelques fois la constante de temps, les deux vitesses tendent vers une valeur commune : $v_f = \frac{V_0}{2}$.



d) Les forces de Laplace appliquées aux deux tiges sont opposées ($+idB$ et $-idB$), on en déduit que la somme de leurs quantités de mouvement se conserve :

$$m v_1 + m v_2 = m V_0.$$

En revanche, l'énergie mécanique, qui se limite ici à l'énergie cinétique, diminue :

$$\frac{1}{2} m V_0^2 > \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2.$$

L'énergie mécanique perdue est convertie en énergie électrique, dissipée par effet Joule dans la résistance. Dans l'état final,

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m V_0^2.$$

EM69 – Oscillateurs couplés

a) Les équations mécaniques obtenues dans l'exercice précédent doivent être modifiées, pour prendre en compte le terme de force de rappel :

$$m \frac{dv_1}{dt} = Bdi - kx_1$$

$$m \frac{dv_2}{dt} = -Bdi - kx_2.$$

En revanche, l'équation électrique peut être conservée :

$$i = -\frac{Bd}{R}(v_1 - v_2).$$

On aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{B^2d^2}{mR} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + \frac{k}{m}x_1 = 0$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{B^2d^2}{mR} \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} \right) + \frac{k}{m}x_2 = 0.$$

b) En sommant membre à membre ces équations, on obtient une équation différentielle relative à la somme $S = x_1 + x_2$:

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2S = 0,$$

avec $\omega = \sqrt{k/m}$ pulsation propre.

La solution $S(t)$ est sinusoïdale de pulsation ω : elle ne s'amortit pas dans le temps. En réalité, du fait de la présence de frottements sur les rails, ce mouvement n'est pas perpétuel. On suppose seulement ici que la durée considérée est petite devant la durée d'amortissement due aux frottements.

La différence membre à membre conduit en revanche à une équation présentant un terme d'amortissement. En effet, si et $D = x_1 - x_2$,

$$\frac{d^2D}{dt^2} + 2\frac{B^2d^2}{mR} \frac{dD}{dt} + \omega^2D = 0.$$

Après un temps suffisamment long, la différence $D(t)$ devient négligeable : elle tend vers 0. Les deux tiges ont alors même mouvement et la solution devient :

$$x_1(t) = x_2(t) = S(t)/2 = X_m \cos(\omega t + \varphi).$$

c) La seule cause de dissipation prise en compte est l'effet Joule : elle est due à la présence du courant électrique induit tant que les tiges ont des vitesses différentes. Une fois les tiges animées d'une même vitesse, le système devient conservatif. Après un temps suffisamment long, il y a échange périodique d'énergie cinétique et d'énergie potentielle élastique (due aux ressorts).