

EM6 – Induction

1.7.3. Lois de l'induction		
Flux d'un champ magnétique Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.	Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.	On retrouve la notion de flux vu auparavant.
Loi de Faraday Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.	<i>Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.</i>	
Loi de modération de Lenz.	Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.	Aspect qualitatif de l'induction.
Force électromotrice induite, loi de Faraday.	Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane. Associer à un aimant un moment magnétique par analogie avec une boucle de courant. Citer un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.	
1.7.4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps		
Auto-induction Flux propre et inductance propre. Étude énergétique.	Différencier le flux propre des flux extérieurs. Utiliser la loi de modération de Lenz. Évaluer et citer l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur. <i>Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.</i> Réaliser un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.	
Cas de deux bobines en interaction Inductance mutuelle entre deux bobines.	Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale ». <i>Mesurer la valeur de l'inductance mutuelle entre deux bobines et étudier l'influence de la géométrie.</i>	
Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.	Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante. Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.	
Transformateur de tension. Étude énergétique.	Établir la loi des tensions. Réaliser un bilan de puissance et d'énergie.	...et de courant 😊 ...les bilans.
1.7.5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire		
Conversion de puissance mécanique en puissance électrique. Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.	Interpréter qualitativement les phénomènes observés. Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe. Effectuer un bilan énergétique. Citer des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.	
Freinage par induction.	Expliquer l'origine des courants de Foucault et en citer des exemples d'utilisation. Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.	On verra cela dans EM7.
Conversion de puissance électrique en puissance mécanique Moteur à courant continu à entrefer plan.	Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace. Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.	

I – Loi de Lenz

I-1) Loi de Faraday de l'induction (1831)

a) Définition

Soit un circuit électrique filiforme orienté arbitrairement par le sens conventionnel de i . Soit \vec{S} le vecteur surface de ce circuit, orienté par i et la règle de la main droite. Le circuit est le siège d'une force électromotrice induite e , orientée conventionnellement dans le même sens que i (convention générateur) et telle que :

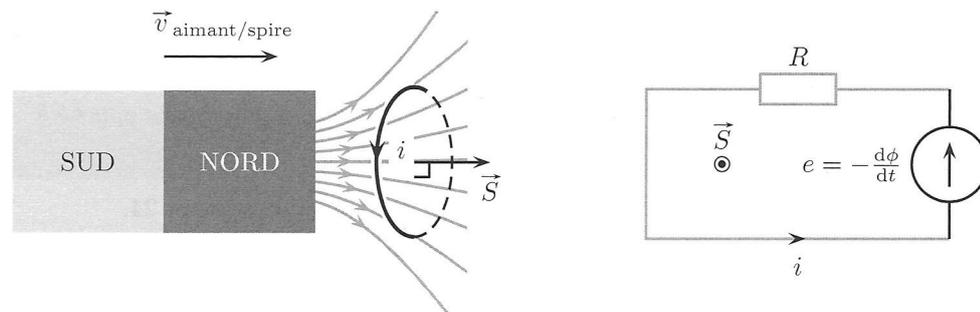
$$e = - \frac{d\phi}{dt} \text{ où } e \text{ s'exprime en Volts}$$

b) Utilisation de la loi de Faraday

La loi de Faraday nécessite de mettre en place des orientations et de les respecter durant toute la résolution d'un problème d'induction.

- Orienter (arbitrairement) le circuit en choisissant un sens conventionnel pour le courant (flèche de i).
- En déduire le vecteur surface \vec{S} du circuit par la règle de la main droite.
- Calculer le flux magnétique à travers le circuit : $\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$
- En déduire la force électromotrice induite : $e = - \frac{d\phi}{dt}$
- Dessiner le schéma électrique équivalent au circuit. Il s'agit du schéma de départ auquel on ajoute un générateur électrique de force électromotrice e orientée dans le même sens que i (convention générateur). Le schéma équivalent permet d'écrire une ou plusieurs équations électriques pour calculer l'intensité du courant induit.

c) Application



On choisit un sens d'orientation pour la spire (choix du sens de la flèche de i) et on en déduit le vecteur surface \vec{S} de la spire (voir figure à gauche). Le champ est orienté dans le même sens que \vec{S} , donc le flux est positif. Ce flux croît lorsque l'aimant s'approche, car l'intensité de \vec{B} augmente au niveau de la spire. Par conséquent, $\frac{d\phi}{dt}$ est positif. La loi de Faraday donne la fem induite $e = -\frac{d\phi}{dt}$, qui est ici négative.

Sur le schéma électrique équivalent, e doit être orientée en convention générateur (dans le même sens que i , voir figure à droite). En notant R la résistance électrique de la spire, l'équation électrique du circuit équivalent s'écrit $e = Ri$, ce qui montre que i est négatif.

Ainsi, le sens du courant induit réel est opposé à l'orientation de i qui avait été arbitrairement choisie. Ce résultat est en accord avec le sens du courant induit observé expérimentalement.

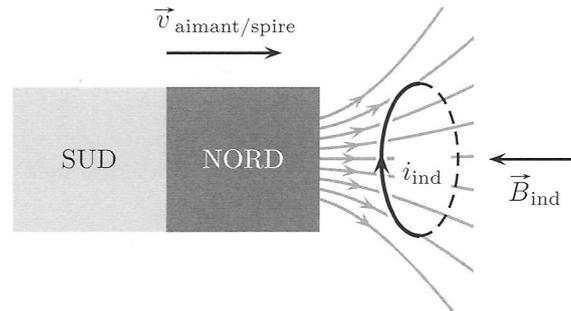
Le sens du courant induit est en accord avec la loi de modération de Lenz, formulée par le physicien russe Heinrich Lenz en 1833.

I-2) Loi de modération de Lenz

a) Définition

Le sens du courant induit est tel que, par ses effets, il tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

b) Application



La cause de la naissance du courant est l'augmentation de l'intensité du champ magnétique B créé par l'aimant au niveau de la spire (du fait du rapprochement de l'aimant), ce champ étant dirigé de la gauche vers la droite. Le courant induit dans la spire tend à créer un champ magnétique (champ induit) dirigé vers la gauche. Il tend donc à s'opposer à la croissance du champ magnétique de l'aimant :

$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{aimant} + \vec{B}_{ind}$ croît moins vite que \vec{B}_{aimant} seul

II - Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

II-1) - Phénomène d'auto-induction

a) Flux propre et inductance propre

Un circuit électrique filiforme parcouru par un courant d'intensité i crée à travers lui-même un flux magnétique propre proportionnel à i :

$$\phi_{propre} = Li \text{ où } L > 0$$

L est appelé coefficient d'auto-inductance ou d'inductance propre du circuit : il s'exprime en henry (H).

b) Inductance propre d'une bobine longue

En négligeant les effets de bords, le champ magnétique propre dans le solénoïde est uniforme et vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N}{l} i \vec{u}_z.$$

Il y a N spires en tout, donc le flux propre à travers le solénoïde est N fois le flux à travers une de ses spires :

$$\begin{aligned} \phi &= N \vec{B} \cdot \vec{S} = \frac{\mu_0 N^2}{l} i S = Li \\ \Rightarrow L &= \frac{\mu_0 N^2}{l} S \end{aligned}$$

Si nécessaire, on peut augmenter le coefficient d'auto-inductance d'une bobine en y introduisant un noyau ferromagnétique. Cela a pour conséquence de remplacer μ_0 par $\mu_0 \mu_r$, où μ_r est la perméabilité magnétique relative (sans dimension) du matériau, qui peut atteindre des valeurs de l'ordre de 1000.

c) Fem induite

Dans le cas général on a :

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{propre}$$

Qui implique que, le flux magnétique à travers un circuit filiforme s'écrit :

$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre} \text{ avec } \phi_{propre} = Li.$$

L'application de la loi de Faraday donne la force électromotrice induite orientée en convention générateur dans le circuit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \frac{d(Li)}{dt} = e_{ext} + e_L$$

Si le circuit ne se déforme pas au cours du temps, le coefficient d'auto-inductance L est une constante et sort de la dérivée temporelle, ce qui donne le résultat suivant.

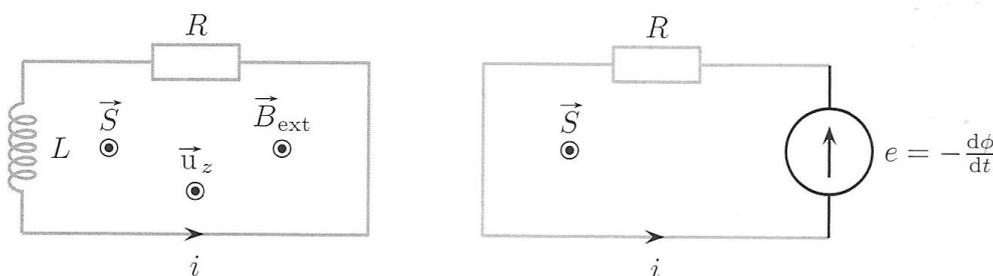
Dans un circuit indéformable, la force électromotrice induite s'écrit

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - \underbrace{L \frac{di}{dt}}_{\substack{\text{fem auto} \\ \text{induite}}} = e_{ext} + e_L$$

d) Exercice

Un circuit électrique filiforme plan, de résistance R , d'aire S et d'auto-inductance L , est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoidalement dans le temps (pulsation temporelle ω) et orthogonal au plan du circuit :

$$\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$



Le schéma électrique est une boucle métallique d'aire S et de résistance R . On oriente arbitrairement le courant (flèche de i), ce qui donne l'orientation du vecteur surface \vec{S} par la règle de la main droite : $\vec{S} = S \vec{u}_z$. Le flux magnétique total à travers le circuit est la somme du flux extérieur et du flux propre,

$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{propre} = \vec{B}_{ext} \cdot \vec{S} + Li = B_0 S \cos(\omega t) + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi_{ext}}{dt} - L \frac{di}{dt} = B_0 S \omega \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt}$$

D'après le schéma électrique on a :

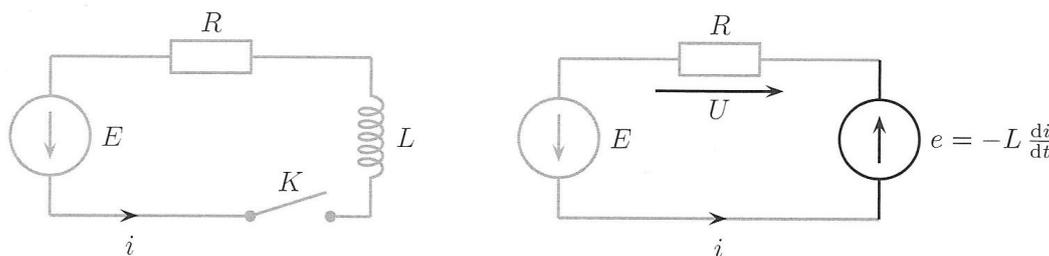
$$e = Ri$$

$$\Leftrightarrow B_0 S \omega \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt} = Ri \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = B_0 S \frac{\omega \sin(\omega t)}{L}$$

$$\text{où } \tau = \frac{L}{R}$$

e) Aspect énergétique de l'auto-induction

En l'absence de champ magnétique extérieur, pour ne prendre en compte que l'auto-induction, on a le schéma électrique équivalent suivant :



D'après le schéma :

$$Ei + ei = Ui$$

$$\Leftrightarrow Ei = Ui - ei$$

Les tensions E et e sont orientées en convention générateur, donc Ei et ei sont les puissances électriques fournies par le générateur de fem E et la fem auto-induite e au reste du circuit. Ainsi, $(-ei)$ est la puissance reçue par e .

La tension U est orientée en convention récepteur : Ui est donc la puissance reçue par la résistance R .

En notant P les puissances, l'équation s'interprète comme :

$$P_{\text{fournie par } E} = P_{\text{reçue par } R} + P_{\text{reçue par } e}$$

$$\Rightarrow Ei = Ri^2 + \frac{Ldi}{dt} i$$

$$\Rightarrow Eidt = Ri^2 dt + Lidi$$

$$\Rightarrow \int_0^t Eidt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_{i_0}^{i(t)} Lidi$$

$$\Rightarrow E_{\text{fournie par } E} = E_{\text{reçue par } R} + E_{\text{reçue par } e}$$

Où :

$$E_{reçue\ par\ e} = \frac{1}{2} Li^2 - \frac{1}{2} Li_0^2$$

On définit ainsi l'énergie potentielle magnétique d'un circuit :

Un circuit magnétique d'inductance propre L , parcouru par une intensité électrique i , possède l'énergie potentielle magnétique

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2$$

En raison de la continuité temporelle $E_m = \frac{1}{2} Li^2$, l'intensité i est toujours continue dans une branche contenant une bobine. Si on ouvre brutalement cette branche, une étincelle de rupture prend naissance.

II-2) Bobines en interaction

a) Coefficient d'inductance mutuelle

Si deux circuits électriques sont proches l'un de l'autre, chacun baigne dans le champ créé par l'autre. On note B_1 et B_2 les champs magnétiques créés respectivement par les courants i_1 et i_2 . Ces champs magnétiques ne sont pas nécessairement uniformes, mais, B_1 est proportionnel à i_1 et B_2 est proportionnel à i_2 . En notant $\Phi_{i \rightarrow j}$ le flux magnétique créé par le circuit i à travers le circuit j , on obtient les relations de proportionnalité

$$\begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} \div B_1 \div i_1 \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} \div B_2 \div i_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1 \\ \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2 \end{cases}$$

On démontre que :

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$$

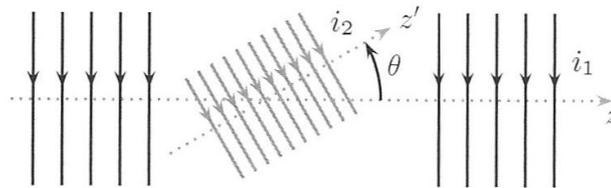
Soit deux circuits filiformes. On définit le coefficient d'inductance mutuelle M entre les deux circuits par :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$$

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

b) Exercice

On considère un petit solénoïde possédant N_2 spires, de section S_2 , placé à l'intérieur d'un grand solénoïde possédant N_1 spires, de section S_1 , de longueur l_1 . L'angle entre les axes des deux solénoïdes est θ (si θ vaut zéro, les courants dans les deux solénoïdes sont orientés dans le même sens). Déterminons le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes.



En négligeant les effets de bords, le champ magnétique créé par le grand solénoïde est uniforme et vaut :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \Phi_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}_1 \cdot N_2 \vec{S}_2 = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} i_1 N_2 S_2 \cos \theta = M i_1$$

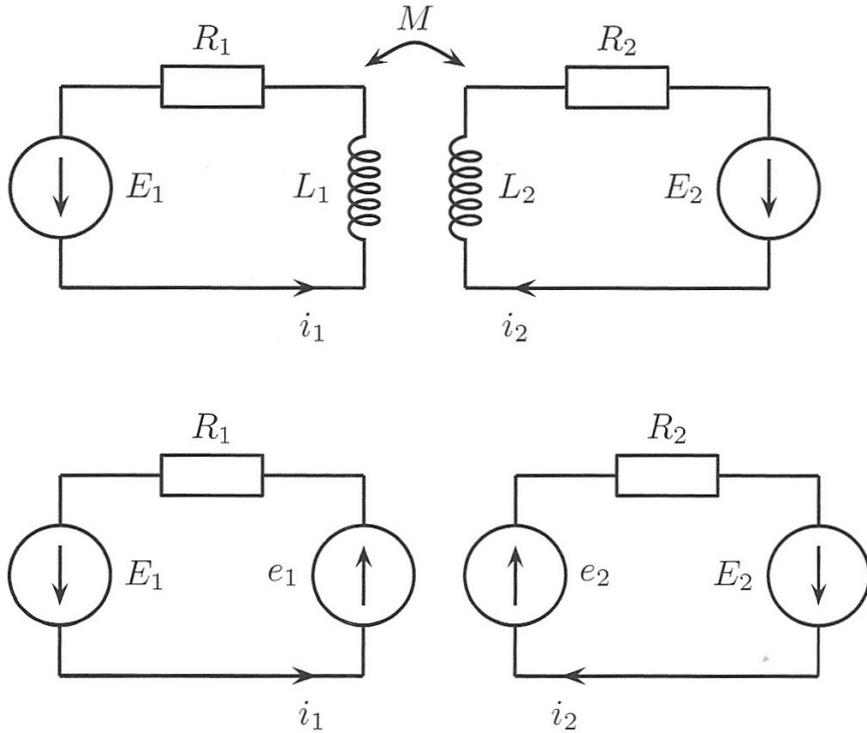
$$\Rightarrow M = \frac{\mu_0 N_1}{l_1} N_2 S_2 \cos \theta$$

Selon la valeur de θ , M peut être positif ou négatif.

Remarque : Le calcul de $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ est simple alors que celui de $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ serait très compliqué, à cause de la non-uniformité du champ B_2 . Pour calculer un coefficient d'inductance mutuelle, on doit toujours chercher lequel des deux flux est le plus simple à exprimer.

c) Circuits couplés par induction mutuelle

On considère deux circuits fixes couplés par inductance mutuelle, contenant chacun un générateur (fem respectives E_1 et E_2) et une résistance. On note L_1 et L_2 les coefficients d'inductance propre et M le coefficient d'inductance mutuelle.



Les équations électrocinétiques obtenues par application de la loi des mailles à chaque circuit s'écrivent :

$$\begin{cases} E_1 - \frac{L_1 di_1}{dt} - \frac{M di_2}{dt} = R_1 i_1 \\ E_2 - \frac{L_2 di_2}{dt} - \frac{M di_1}{dt} = R_2 i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_1 i_1 + E_2 i_2}_{\text{Puissance fournie}} = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{\text{dissipation joule}} + \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}_{E_{\text{magnétique}}} \right)$$

Énergie potentielle magnétique de deux circuits :

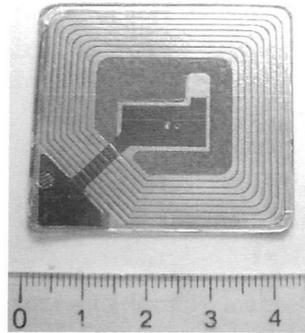
$$E_m = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 + Mi_1i_2$$

d) Applications des circuits couplés

- Des dispositifs électriques peuvent être chargés à distance (sans contact) par couplage inductif. C'est le cas de certaines voitures électriques de location. Le châssis de la voiture est équipé d'un circuit en forme de boucle (bobine) d'axe vertical. Dans le sol, sous la place de parking, se trouve également une bobine alimentée électriquement par le courant alternatif du secteur. Lorsque la voiture est garée sur sa place de parking, les deux bobines se font face, ce qui assure une valeur satisfaisante de leur coefficient d'inductance mutuelle. Les variations du courant dans la boucle du sol induisent des courants dans la boucle de la voiture, qui servent à recharger la batterie. Cela évite d'avoir à brancher un câble de raccordement. On retrouve aussi ce système dans les chargeurs de téléphone type Nokia Lumia, ou brosse à dents oral-B.
- Les cartes RFID (radio frequency identification) sont les « cartes magnétiques » lues par simple passage à distance devant un détecteur. Le lecteur est un circuit électrique parcouru par un courant variable $i_1(t)$, qui génère un champ magnétique temporellement variable dans son environnement. La carte RFID contient un bobinage (voir figure). Lorsqu'ils sont proches l'un de l'autre, carte et lecteur sont couplés par inductance mutuelle. Les variations temporelles du courant $i_1(t)$ dans le détecteur provoquent, par couplage magnétique, l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans la carte RFID. Ce courant $i_2(t)$ alimente

une puce électronique qui le modifie (codage dans $i_2(t)$ des informations contenues dans la carte). Par couplage magnétique, $i_2(t)$ induit des variations sur $i_1(t)$ dans le lecteur, qui décode ainsi le contenu de la carte. Les cartes RFID peuvent être passives (sans alimentation autonome), car la fem induite par le champ du lecteur suffit à les alimenter.

Carte RFID servant d'antivol sur un article de magasin. L'échelle de la photographie est donnée par une règle graduée en centimètres.



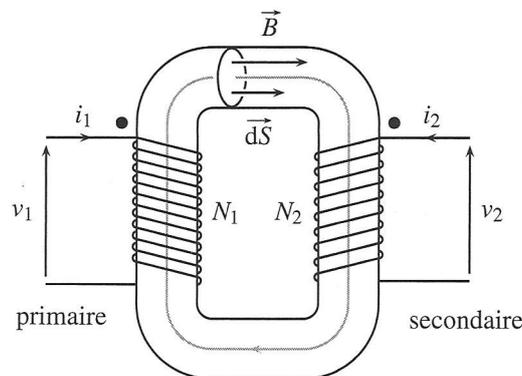
Les puces électroniques d'identification mises par les vétérinaires sous la peau des animaux domestiques ne sont autres que des cartes RFID de la taille d'un grain de riz.

- Les plaques de cuisson à induction contiennent une bobine parcourue par un courant temporellement variable et d'amplitude réglable. Cela crée un champ magnétique variable. Une casserole posée sur la plaque joue le rôle d'une seconde bobine. En effet, bien que non filiforme, le disque métallique du fond de la casserole peut être découpé par la pensée en des spires concentriques. Le champ variable créé par la plaque induit un courant dans ces spires fictives, qui s'échauffent par effet Joule.

e) Transformateur de tension

Un transformateur de tension convertit une tension alternative en une tension alternative de même fréquence mais de valeur efficace différente. Le fonctionnement du transformateur repose sur le phénomène de couplage par induction mutuelle.

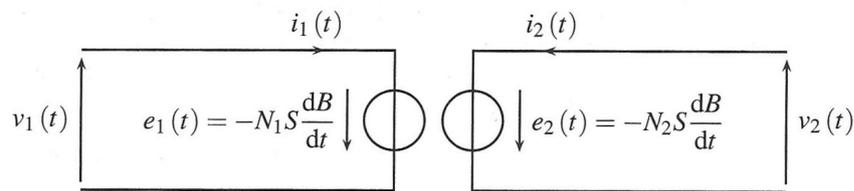
Un transformateur électrique est un quadripôle composé de deux enroulements de fils autour d'un tore de matériau ferromagnétique. L'enroulement de gauche, constitué de N_1 spires, est appelé enroulement primaire. Celui de droite, constitué de N_2 spires, est l'enroulement secondaire. Le tore ferromagnétique a la propriété de bien canaliser les lignes de champ magnétique : les lignes de champ sont circulaires et suivent le tore. Ainsi, toute ligne de champ qui traverse le primaire traverse aussi le secondaire. On dit que le couplage magnétique entre les deux enroulements est parfait : la plus grande valeur possible (en valeur absolue) de coefficient d'inductance mutuelle est atteinte. Toutefois, la valeur explicite de ce coefficient n'intervient pas dans les calculs ultérieurs.



Sur la vue de dessus de la figure, les deux points désignent les bornes homologues : ce sont les extrémités des enroulements qui sortent par la même face du tore.

- Relation en tension

Le champ magnétique étant parfaitement canalisé dans le tore, son flux Φ a la même valeur à travers toute section du tore : Φ s'appelle le flux commun.



$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi_1 = N_1 \Phi \\ \Phi_2 = N_2 \Phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = -\frac{N_1 d\Phi_1}{dt} \\ e_2 = -\frac{N_2 d\Phi_2}{dt} \end{cases}$$

Or :

$$U_1 = -e_1 \text{ et } U_2 = -e_2.$$

D'où :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$$

- Relation en courant

L'application du théorème d'Ampère sur une ligne de champ mène à :

$$Bl = \mu_0 \mu_r (N_1 i_1 + N_2 i_2)$$

Attendu que pour un bon milieu « ferromagnétique » doux, $\mu_r = 10^5$, on a :

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 \sim 0 \Rightarrow \frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}$$

On obtient ainsi la loi de transformation des courants.

La formule précédente n'est valable qu'en charge, c'est-à-dire quand un courant secondaire est débité, et est d'autant plus vraie que le courant secondaire est important. Elle est évidemment fautive à vide par exemple, où $i_2 = 0$.

Pour un transformateur, en régime alternatif :

- La relation des tensions s'écrit :

$$\left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \frac{N_2}{N_1} = m$$

- La relation des courants s'écrit, en charge :

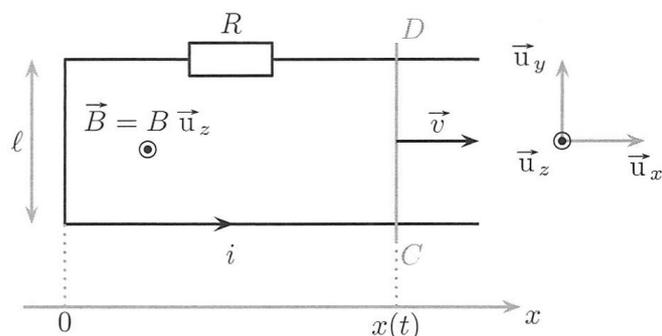
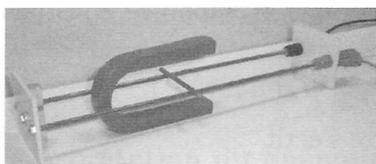
$$\left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m}$$

III - Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

III-1) Conversion de puissance mécanique en puissance électrique

a) Dispositif des rails de Laplace

Les rails de Laplace sont utilisés à titre pédagogique pour mettre en évidence le principe des générateurs électriques. Il s'agit de deux rails horizontaux fixes en cuivre sur lesquels peut coulisser une barre de cuivre, notée [CD] sur la figure refermant le circuit. On note R la résistance du circuit. L'orientation du courant dans le circuit est fixée arbitrairement.



- Équation électrique

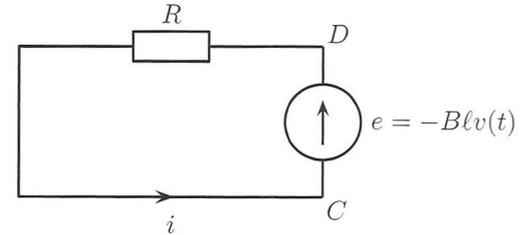
Le flux magnétique à travers le circuit varie, car l'aire du circuit varie lors du mouvement de la barre. Avec l'orientation de i choisie, le vecteur surface du circuit est $\vec{S} = S \vec{u}_z = lx \vec{u}_z$ donc :

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = Blx$$

Dans cette expression de Φ , seul le flux extérieur (dû au champ magnétique de l'aimant) est pris en compte. Le circuit ne contenant qu'une seule spire, son coefficient d'auto-inductance est très faible. La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -Blv$$

Le schéma électrique équivalent, donné sur la figure, permet d'écrire (en négligeant l'auto-induction)



$$e = Ri \Rightarrow -Blv(t) = Ri(t) \text{ (équation électrique)}$$

- Équation mécanique

La barre étant parcourue par un courant et plongée dans un champ magnétique extérieur, elle est soumise, entre autres, à des actions de Laplace. Cela nécessite une étude mécanique. La barre de masse m est soumise à :

- Son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- La réaction des rails $\vec{N} = N\vec{u}_z$ (N est verticale si on néglige les frottements) ;
- L'action de l'opérateur $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{u}_x$. ;
- Des actions de Laplace $\vec{F}_{lap} = i\vec{l} \wedge \vec{B} = ilB\vec{u}_x$

La loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit en projection sur \vec{u}_x :

$$ilB + F_{op} = \frac{mdv}{dt} \text{ (équation mécanique)}$$

On extrait $i = -\frac{Blv}{R}$ de l'équation électrique et on le remplace dans l'équation mécanique, ce qui donne

$$-\frac{l^2 B^2 v}{R} + F_{op} = \frac{mdv}{dt}$$

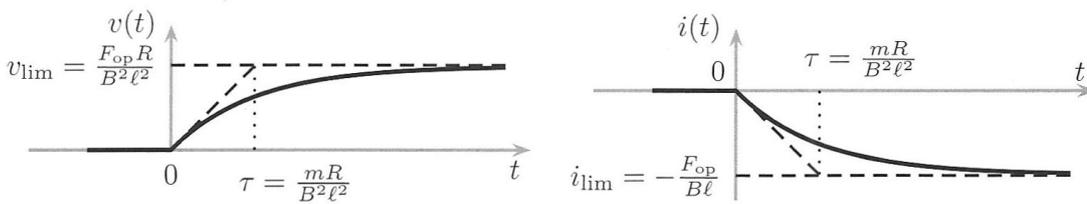
$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2} \text{ et } v_{\text{lim}} = \frac{F_{op} R}{B^2 l^2}$$

$$\Rightarrow v(t) = v_{\text{lim}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

L'intensité i s'en déduit par :

$$i = -\frac{Blv}{R} = i_{\text{lim}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \text{ où } i_{\text{lim}} = -\frac{F_{op}}{Bl}$$

Les solutions sont tracées sur la figure pour le cas $F_{op} > 0$ et $B > 0$.



- Loi de Lenz

S'il n'y avait pas de champ magnétique, l'équation du mouvement se réduirait à $F_{op} = \frac{mdv}{dt}$ et la vitesse de la barre serait $v(t) = \frac{F_{op}}{m} t$; En présence d'un champ magnétique, la barre est soumise à la force de Laplace $-\frac{l^2 B^2 v}{R} \vec{u}_x$. Cette force est résistante : elle s'oppose à la vitesse de la barre d'autant plus fort que la vitesse est grande. C'est une manifestation de la loi de modération de Lenz : le mouvement de la barre crée le courant induit, qui à son tour crée la force de Laplace, qui tend à s'opposer au mouvement de la barre.

- Bilan de puissance en induction

On multiplie l'équation électrique par i :

$$ei = Ri^2 \Leftrightarrow \underbrace{-Blvi}_{P \text{ fournie par } e} = \underbrace{Ri^2}_{P \text{ reçue par } R}$$

On multiplie l'équation mécanique par v :

$$F_{op}v + F_{la}v = m \frac{dv}{dt} v$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{op}v}_{P \text{ fournie par opérateur}} + \underbrace{Bliv}_{P \text{ fournie par Laplace}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)}_{\text{Puissance cinétique}}$$

En comparant les équations on remarque sur cet exemple que

$$P_{\text{fournie par } e} = - P_{\text{fournie par } \vec{F}_{la}}$$

Pour un circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire, la puissance mécanique fournie au circuit par les actions de Laplace induites est l'opposé de la puissance électrique fournie au circuit par la fem induite,

$$P_{\text{fournie par } e} = - P_{\text{fournie par } \vec{F}_{la}}$$

Cette relation est à la base du fonctionnement de tous les convertisseurs électromécaniques.

En sommant membre à membre les équations, les termes $Bliv$ se simplifient et on obtient un bilan de puissance électromécanique complet,

$$\underbrace{F_{op}v}_{P \text{ fournie par opérateur}} = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)}_{\text{Puissance cinétique}} + \underbrace{Ri^2}_{P \text{ reçue par } R}$$

La puissance fournie par l'opérateur à la barre sert, d'une part, à augmenter l'énergie cinétique de la barre (démarrage du générateur) et, d'autre part, à alimenter électriquement la résistance (une ampoule électrique, par exemple).

b) Freinage par induction

i. Rails de Laplace

Dans le dispositif des rails de Laplace étudié précédemment, la force de Laplace tend à s'opposer au mouvement de la barre, conformément à la loi de modération de Lenz. En l'absence

d'opérateur externe ($F_{op} = 0$), l'équation du mouvement de la barre se réduit à :

$$-\frac{l^2 B^2 v}{R} = \frac{mdv}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse avec un temps caractéristique $\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}$ qui :

- Croît avec m (plus la barre est lourde, plus il lui faut de temps pour s'arrêter : c'est l'inertie mécanique de la barre) ;
- Décroît avec B (un champ magnétique intense donne des effets d'induction plus grands et le freinage par la loi de Lenz est plus intense).

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds et les TGV.

ii. Système rotatif

On considère une roue constituée d'un bloc métallique massif. Bien que l'on ne puisse pas modéliser un tel système par un circuit filiforme, les phénomènes physiques restent les mêmes.

Ainsi, lorsque la roue est en rotation dans un champ magnétique stationnaire :

- On retrouve un cas d'induction de Lorentz, il y a donc apparition de f.é.m. induites.

- La roue étant conductrice, il y a apparition de courants induits. Dans le cas d'une roue pleine, les courants sont répartis dans tout le volume du conducteur et on les nomme courants de Foucault.

L'action conjuguée des courants de Foucault et du champ magnétique donne lieu à des forces de Laplace qui s'opposent au mouvement de rotation de la roue, qui est alors freinée.



Sur la vidéo suivante :

https://www.youtube.com/watch?v=MnLAzrT6Ps8&ab_channel=Exp%C3%A9riencesEPFL.

Le pendule métallique ayant des encoches n'est plus amorti. En effet, les courants de Foucault se développent très peu à cause des encoches, l'action de Laplace est alors quasi nulle. C'est ce qu'on utilise dans les transformateurs : la carcasse ferromagnétique est réalisée en fer feuilleté : des fines couches de fer séparées d'une couche d'isolant, limitant ainsi l'apparition de courants de Foucault dans la carcasse ferromagnétique.

c) Alternateur

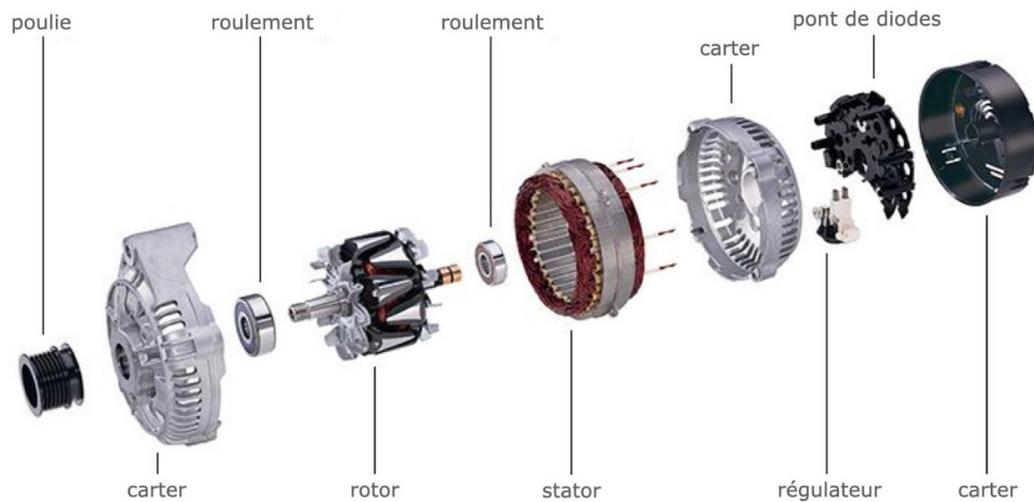
i. Présentation

Un alternateur sert à convertir une puissance mécanique en une puissance électrique. Ce dispositif est par exemple utilisé :

- Dans les dynamos de vélos : une roue entraîne en rotation l'alternateur qui alimente des ampoules ou une batterie ;
- Dans les centrales électriques, où l'alternateur est entraîné par une turbine elle-même mise en rotation par de la vapeur d'eau (centrales thermiques ou nucléaires) ou de l'eau liquide (centrales hydrauliques).

L'alternateur est constitué :

- D'un stator fixe par rapport au référentiel d'étude
- Et d'un rotor en rotation autour d'un axe fixe par rapport au stator.

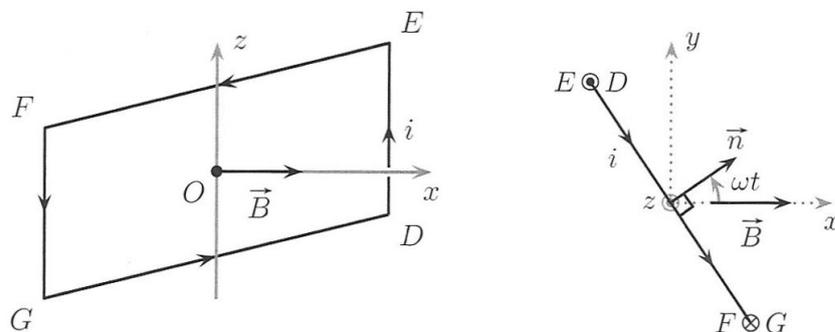


ii. Modélisation

On peut expliquer le fonctionnement de l'alternateur en modélisant le rotor par une bobine plate de N spires rectangulaires, de surface S , conductrice de résistance R et d'inductance propre L , en rotation autour de l'axe (Oz) fixe dans le référentiel terrestre, qui est un des axes de symétrie de la spire et qui passe par les deux milieux de côtés opposés.

On note J le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe (Oz) . La spire est mise en rotation autour de (Oz) à la vitesse angulaire ω par un opérateur extérieur.

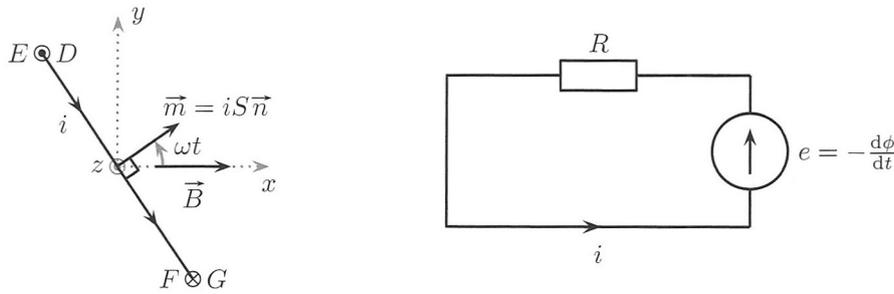
iii. Circuit en rotation dans un champ magnétique uniforme



On considère un circuit rectangulaire $DEFG$ d'aire S orienté arbitrairement par l'intensité électrique i . Il peut pivoter sans frottements autour de l'axe z . Il est plongé dans un champ

magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_x$ orthogonal à l'axe z. Les schémas donnent une vue en perspective et une vue de dessus (depuis les z positifs). Grâce à un couple $\vec{\Gamma}_{op} = \Gamma_{op}\vec{u}_z$ fourni par un opérateur, ce cadre tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe $(0, \vec{u}_z)$. La position angulaire du cadre est repérée par l'angle orienté entre le champ magnétique et la normale unitaire \vec{n} au cadre : $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t$. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe (Oz) et R sa résistance électrique. On néglige l'auto-induction.

- Schéma électrique



On introduit le vecteur surface \vec{S} du cadre, orienté par i et la règle de la main droite. L'angle entre \vec{B} et \vec{S} est $(\vec{B}, \vec{S}) = \omega t$. Le flux magnétique à travers le cadre s'écrit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos(\omega t)$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin(\omega t)$$

Le schéma électrique donne l'équation :

$$e = Ri \Leftrightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{\omega BS \sin(\omega t)}{R}$$

- Equation mécanique

On introduit le moment magnétique $\vec{m} = I\vec{S}$ du cadre. Le champ magnétique étant uniforme, le moment des actions de Laplace s'écrit :

$$\vec{\Gamma}_{la} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -iSB \sin(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{\omega B^2 S^2 \sin^2(\omega t)}{R} \vec{u}_z$$

On remarque que ce moment (en projection sur \vec{u}_z) a toujours un signe opposé à celui de $\vec{\omega}$: il a donc tendance à ralentir le cadre, conformément à la loi de modération de Lenz.

L'équation mécanique s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique au cadre en projection sur l'axe (Oz). Les seuls moments qui comptent sont Γ_{op} et Γ_{la} . En effet, le poids s'applique au centre de gravité du cadre (point O) et a donc un moment nul par rapport à l'axe. De même, les liaisons pivot sont sans frottement, donc exercent un moment nul par rapport à l'axe. Il reste :

$$\frac{Jd\omega}{dt} = \Gamma_{op} + \Gamma_{la} = 0 \text{ (car } \omega \text{ est constante).}$$

- Bilan énergétique

Pour le bilan de puissance électrique, on multiplie l'équation électrique par i :

$$\begin{aligned} ei &= Ri^2 \\ \Rightarrow \frac{\omega^2 B^2 S^2 \sin^2(\omega t)}{R} &= Ri^2 \\ \Leftrightarrow P_{re\acute{c}ue \text{ par } R} &= P_{fournie \text{ par } e} \end{aligned}$$

Le bilan de puissance mécanique est obtenu en multipliant l'équation mécanique par ω :

$$\Gamma_{op}\omega + \Gamma_{la}\omega = 0 \Rightarrow \Gamma_{op}\omega - \frac{\omega B^2 S^2 \sin^2(\omega t)}{R} \omega = 0$$

On retrouve le fait que $P_{fournie \text{ par } e} = -P_{fournie \text{ par } \Gamma_{la}}$.

En sommant membre à membre les deux équations de bilan énergétique électrique et mécanique, on obtient le bilan complet :

$$\begin{aligned} \Gamma_{op}\omega &= Ri^2 \\ \Leftrightarrow P_{fournie \text{ par } op} &= P_{re\acute{c}ue \text{ par } R} \end{aligned}$$

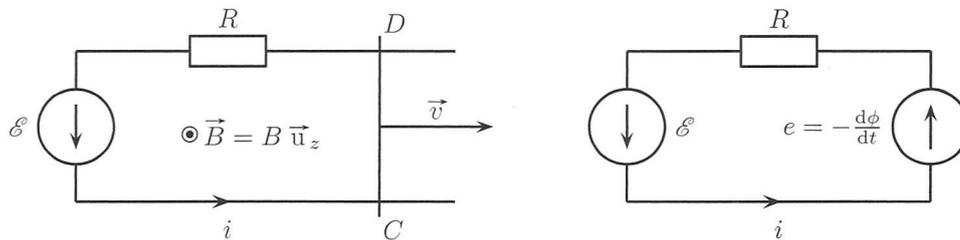
L'opérateur fournit de la puissance mécanique en faisant tourner le générateur qui, à son tour, alimente électriquement la résistance (en courant alternatif).

III-2) Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

a) Moteur à courant continu à entrefer plan

Pour fabriquer un moteur linéaire (donnant lieu à un mouvement de translation), on reprend les rails de Laplace en les alimentant par un générateur électrique de fem ε .

La barre [CD] étant initialement immobile, le générateur fait circuler un courant. Étant plongée dans un champ magnétique, la barre est alors soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement. Le circuit est donc le siège d'une fem induite, ce qui donne le schéma électrique équivalent.



En négligeant l'auto-induction et en notant l la longueur de la barre, le flux magnétique et la fem induite se calculent par :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -blv$$

Le schéma électrique équivalent de la figure donne, par application de la loi des mailles :

$$\varepsilon + e = Ri \Rightarrow \varepsilon - Blv = Ri$$

En l'absence d'opérateur ($F_{op} = 0$), l'étude mécanique de la barre est analogue aux précédentes. Sa projection sur \vec{u}_x s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = i(t)lB \quad (\text{équation mécanique})$$

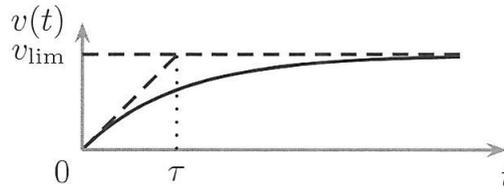
On élimine par exemple i de ces deux équations, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{Bl}{m} (\varepsilon - Blv) \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2 v}{mR} &= \frac{\varepsilon Bl}{mR} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau} \text{ où } \tau = \frac{mR}{B^2 l^2} \text{ et } v_{lim} = \frac{\varepsilon}{Bl}$$

En supposant que la vitesse initiale de la barre soit nulle (phase de démarrage du moteur), la vitesse est donnée par :

$$v(t) = v_{lim} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$



- Bilan énergétique

On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v , et on fait la somme membre à membre des deux équations ainsi obtenues. Les termes $vBl i$ se simplifient (on retrouve le fait que $P_{la} = -P_{fem induite}$ et il reste :

$$\begin{aligned} \varepsilon i &= Ri^2 + mv \frac{dv}{dt} \\ \Rightarrow \varepsilon i &= Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) \end{aligned}$$

La puissance électrique apportée par le générateur sert à échauffer la résistance d'une part, et à accroître l'énergie cinétique de la barre (objet de masse m à mettre en mouvement) d'autre part.

b) Utilisation du moteur à CC

Les machines à courant continu font partie des convertisseurs électro-magnéto-mécanique réversibles. Elles ont été les premières à être utilisées massivement dans toutes les gammes de puissance du fait de la simplicité de leur commande en vitesse, et de leur faible encombrement.

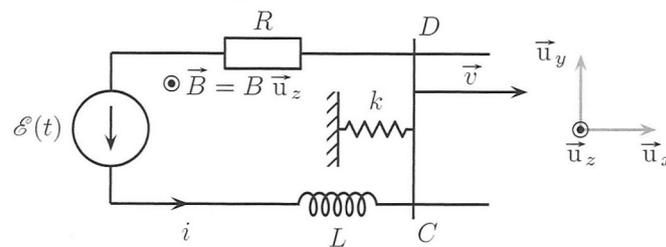
On trouve des machines à courant continu dans l'industrie (ascenseur, machines d'imprimerie.), dans les domaines des faibles puissances (jouets, perceuses...), dans les équipements automobiles

(essuie glaces, toits ouvrants...). Pour les grandes puissances, il est principalement utilisé comme moteur de traction (pour mettre en mouvement un véhicule), par exemple dans le TGV Nord ou les RER parisiens.

c) Haut-parleur électrodynamique

Un haut-parleur doit convertir un signal électrique (tension variable dans le temps) en signal mécanique (vibration d'une membrane pour émettre le son). C'est un transducteur électromécanique qui utilise les actions de Laplace et met en jeu des phénomènes d'induction.

La géométrie des véritables haut-parleurs rend difficile, voire impossible, le calcul du flux magnétique à travers le circuit mobile. Cela compromet l'application de la loi de Faraday. Pour contourner ce problème, on raisonne sur la géométrie simplifiée des rails de Laplace. Cela donne des équations électrique et mécanique analogues à celles d'un vrai haut-parleur. Ce modèle est donc suffisant pour illustrer le principe du haut-parleur.



Dans un modèle simplifié, un haut-parleur est représenté par des rails de Laplace horizontaux, plongés dans un champ magnétique extérieur uniforme $\vec{B} = B \vec{u}_z$ orthogonal au plan du circuit. La barre $[CD]$, de masse m et de longueur l , est la seule partie mobile. Elle est liée mécaniquement aux parties fixes du circuit par un ressort de raideur k , qui ne joue aucun rôle électrique. En plus de la réaction normale, les rails exercent sur la barre une force de frottements fluides $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ (avec $\lambda > 0$), où \vec{v} est la vitesse de la barre par rapport aux rails. La barre, en se déplaçant, entraîne avec elle une

membrane qui émet des ondes sonores. De ce fait, la barre est soumise à une force résistante supplémentaire $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (avec $\alpha > 0$). On note L le coefficient d'auto-inductance (cela tient compte du fait que le circuit d'un vrai haut-parleur est bobiné).

- Equation électrique

Calculons la fem induite dans le circuit lors du mouvement de la barre mobile [CD]

On note a la longueur du rectangle formé par le circuit lorsque l'ensemble est à l'équilibre mécanique (ressort ni tendu ni comprimé). On note x l'écart algébrique de position de la barre par rapport à cet état d'équilibre. L'aire du rectangle est donc $(a + x).l$ et son vecteur surface associé est, d'après l'orientation choisie pour i :

$$\vec{S} = (a + x).l\vec{u}_z$$

Le flux magnétique extérieur est :

$$\Phi = (a + x).lB$$

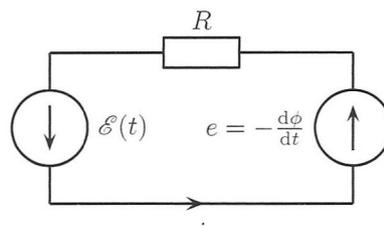
En tenant compte en plus du flux propre, le flux magnétique total à travers le circuit est :

$$\Phi = (a + x).lB + Li$$

La fem induite, orientée en convention générateur, est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - Blv$$

Où v vitesse de la barre en projection sur le vecteur unitaire \vec{u}_x .



L'équation électrique de la barre est :

$$\varepsilon + e = Ri \Leftrightarrow \varepsilon - Blv - L\frac{di}{dt} = Ri$$

- Equation mécanique

La barre est soumise :

- Aux actions de Laplace $F_{la} = ilB \vec{u}_x$,
- A l'action de rappel du ressort $\vec{F}_{ressort} = -kx \vec{u}_x$,
- Aux forces de frottements fluides exercées par les rails et l'air $\vec{F}_{frott} = -(\lambda + \alpha)v \vec{u}_x$
- Ainsi qu'à son poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$
- Et à la réaction normale des rails $\vec{N} = N \vec{u}_z$

En projection sur \vec{u}_x , la loi de la quantité de mouvement appliquée à la barre s'écrit :

$$ilB - kx - (\lambda + \alpha)v = m \frac{dv}{dt}$$

Les équations électrique et mécanique sont linéaires en $x(t)$ et $i(t)$. En imposant $\varepsilon(t) = E \cos(\omega t)$, un régime forcé s'installe dans lequel toutes les grandeurs i , x et v sont sinusoïdales à la pulsation temporelle ω . Ainsi, la membrane vibre en émettant une onde sonore à la même pulsation ω que le signal électrique d'alimentation, ce qui est le but du haut-parleur.

- Bilan énergétique

Pour réaliser le bilan énergétique, on multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par v :

$$\varepsilon i - Blvi - L \frac{di}{dt} i = Ri^2$$

$$\text{et } ilBv - kxv - (\lambda + \alpha)v^2 = m \frac{dv}{dt} v$$

On réorganise les termes et on fait apparaître des dérivées remarquables :

$$\varepsilon i - Blvi = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$ilBv = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right) - (\lambda + \alpha)v^2$$

Dans la première équation, le terme $-Blvi$ représente la puissance fournie par la fem « extérieure » induite (par le mouvement de la barre dans le champ magnétique extérieur).

Dans la seconde équation, le terme $+ilBv$ représente la puissance fournie par les actions de Laplace à la barre. Comme d'habitude, ces deux termes sont opposés.

On combine les deux équations de manière à faire disparaître ces deux termes :

$$P_{\text{fournie par } e} = \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right)}_{E_{\text{mag}} + E_c + E_{p,\text{élastique}}} + \underbrace{Ri^2 + \lambda v^2 + \alpha v^2}_{P \text{ pour vaincre les frottements}}$$

La puissance fournie par l'alimentation électrique ε sert à :

- Remplir (algébriquement) le haut-parleur d'énergie (cinétique, potentielle magnétique et potentielle élastique) ;
- Vaincre les frottements (effet Joule dans la résistance, frottements mécaniques de la barre sur les rails et frottements contre l'air).
- Le terme $-\alpha v^2$ (frottements contre l'air) est la puissance sonore émise par le haut-parleur. C'est le terme utile. Idéalement, il faudrait annuler $Ri^2 + \lambda v^2$ (résistance nulle et rails sans frottements).