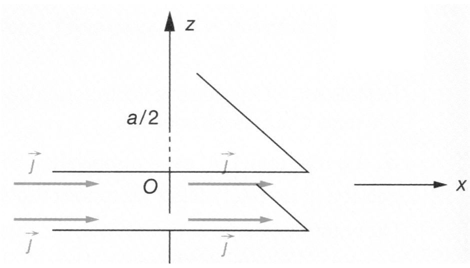
EM5 – Champ magnétostatique

A – Travaux dirigés

EM51 - Champ créé par une nappe de courant

1 – Propriétés du champ

On considère une distribution volumique de courant délimitée par les deux plans d'équation $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$. On suppose qu'entre ces plans la densité volumique de courant est uniforme : $\vec{j} = j\,\overrightarrow{u_x}$.



a) Examiner les invariances géométriques, pour en déduire de quelle(s) coordonnée(s) dépend le champ ?

b) Faire de même avec les symétries et préciser la direction du champ magnétique en tout point.

c) Que peut-on dire de la valeur du champ sur le plan x0y ?

2 - Expressions du champ

a) Proposer un contour d'Ampère qui permette d'exprimer le champ créé par la distribution de courant en un point M de cote z, en exploitant la nullité du champ sur le plan xOy.

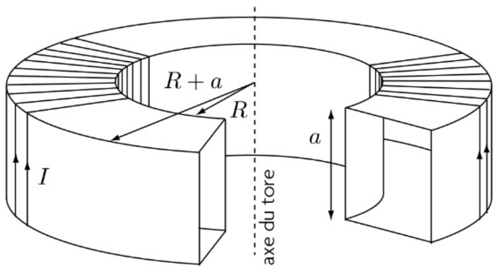
b) Préciser alors l'expression du champ magnétique au point M, selon la valeur de z, dans le cas où z est positive.

c) Tracer le graphe de B = f(z), en précisant par des arguments de symétrie la parité ou l'imparité de cette fonction.

Rép : 1a) B(z) 1b) $\vec{B} = B\,\overrightarrow{u_y}$ 1c) B=0 dans le plan xOy 2a) Rectangle passant par le plan xOy…
2b) $\vec{B}\left(0 \le z \le \frac{a}{2}\right) = -\mu_0 jz\,\overrightarrow{u_y}$ et $\vec{B}\left(z > \frac{a}{2}\right) = -\frac{\mu_0 ja}{2}\,\overrightarrow{u_y}$ 2c) impaire

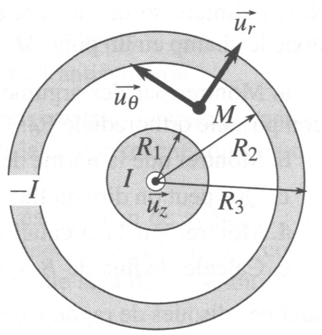
EM52 - Bobine Torique

Considérons une bobine torique formé de N spires jointives carrées (où N est très grand) telle que celle-ci :



1°) Calculer l'expression du champ magnétostatique à l'intérieur et à l'extérieur du tore.
2°) Calculer le flux magnétique à travers une spire, puis le flux total à travers le tore. En déduire l'inductance du tore.
Rép : 1°) $\overrightarrow{B_{int}} = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{B_{ext}} = \vec{0}$ 2°) $L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} a\,Ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$

EM53 - Câble coaxial



1°) Énoncer le théorème d'Ampère relatif à la circulation du champ magnétique B le long d'un contour fermé C constitué de points M et s'appuyant sur une surface S. On notera $\vec{j}(P)$ la densité de courant en un point P de la surface S.

2°) On considère un câble coaxial cylindrique de longueur supposée infinie, constitué d'un conducteur central plein de rayon R_1, parcouru par un courant uniforme d'intensité I et d'un conducteur périphérique évidé, de rayon intérieur R_2, de rayon extérieur R_3 avec $R_1 < R_2 < R_3$ et parcouru par un courant uniforme également d'intensité I mais circulant en sens inverse par rapport au courant conducteur central.

On notera $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur directeur unitaire de l'axe commun des 2 conducteurs. Soit un point M à une distance r de l' axe du câble.

a) Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au point M est orthoradial.
b) Montrer qu'il peut se mettre sous la forme $\vec{B} = B(r)\overrightarrow{u_\theta}$.
c) Préciser alors la forme des lignes de champ.

3°)

a) Montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ créé au point M est nul si $r > R_3$.
b) Expliquer l'intérêt du câble coaxial par rapport à un fil simple parcouru par un courant de même intensité.

4°) Calculer les densités de courant $\vec{j_1}$ et $\vec{j_2}$ respectivement du conducteur central et du conducteur périphérique en fonction des courants I_1 et I_2 et des rayons R_1, R_2 et R_3.

5°) En appliquant le théorème d'Ampère à un contour C que l'on précisera, donner l'expression de la composante B(r) du champ magnétique créé au point M en fonction de μ_o, I, r, R_1, R_2 et R_3 dans chacun des cas suivant la valeur de r.

6°) Vérifier la continuité de B.

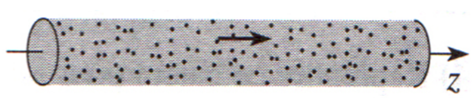
7°) Tracer B(r).

Rép : 4°) $\vec{j_1} = \frac{I}{\pi R_1^2}\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{j_2} = -\frac{I}{\pi(R_3^2-R_2^2)}\overrightarrow{u_z}$ 5°) $B(r > R_1) = \frac{\mu_0 j_1 r}{2}$, $B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 j_1 {R_1}^2}{2r}$, $B(r > R_2) = \frac{\mu_0 j_1 {R_1}^2}{2r} - \frac{\mu_0 j_2 (r^2-R_2^2)}{2r}$

B – Exercices supplémentaires

EM54 - Champ créé par un faisceau cylindrique d'électrons

Un faisceau électronique a la forme d'un cylindre très long de rayon R et d'axe (Oz). Les électrons ont tous la même vitesse $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_z}$; et ils sont uniformément répartis avec une densité de n électrons par unité de volume.



1°) En adoptant un modèle volumique, calculer la densité volumique de charge et le vecteur densité volumique de courant.

2°) Calculer le champ électrique en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z).

3°) Calculer le champ magnétique. Quelle relation relie $\vec{E}$ et $\vec{B}$?

4°) Le faisceau peut-il rester cylindrique ?

Rép : 1°) $\vec{j} = -ne\,\vec{v}$ et $\rho = -ne$ 2°) $\vec{E}(r < R) = -\frac{ner}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{E}(r > R) = -\frac{neR^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ 3°) $\vec{B}(r < R) = -\frac{\mu_0 nevr}{2}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{B}(r > R) = -\frac{\mu_0 nevR^2}{2r}\overrightarrow{u_\theta}$
4°) Non la force subie montre qu'il tend à diverger.

EM55 – Interaction entre deux moments magnétiques

On donne le champ magnétique créé en un point P par un dipôle de moment $\vec{M}$ placé en A :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(3\vec{M}.\overrightarrow{u_{AP}}\right)\overrightarrow{u_{AP}} - \vec{M}}{AP^3} \text{ où } \overrightarrow{u_{AP}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{AP}$$

Deux dipôles magnétiques de moments $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont respectivement en O et M.

1°) Exprimer l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles en fonction de $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$, $\overrightarrow{OM}$ et OM.

2°) On suppose que $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont colinéaires à $\overrightarrow{OM}$. Exprimer la force entre les dipôles.

À quelle condition est-elle attractive ?

3°) Même question $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont colinéaires entre eux et perpendiculaires à $\overrightarrow{OM}$.

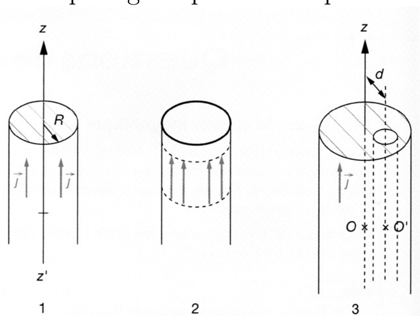
4°) Déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction entre deux atomes possédant un moment magnétique.

À quelle température cette énergie est-elle de l'ordre de grandeur de l'énergie d'agitation thermique k_BT ? Conclure quant à l'origine microscopique des propriétés magnétiques de la matière.

Rép : 1°) $E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{M}_1.\vec{u_r})(\vec{M}_2.\vec{u_r}) - \vec{M}_1.\vec{M}_2}{r^3}$ 2°) $\vec{F}_{1\to 2} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{6M_1M_2}{r^4}\vec{u_r}$ 3°) L'interaction est répulsive, cette fois. 4°) $U \sim 8\ 10^{-24} J$…

EM56 - Modèles de fils

a) Un conducteur cylindrique de rayon R, de dimension infinie selon l'axe z'Oz, est parcouru par un courant d'intensité constante I. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme. Déterminer le champ magnétique en tout point.

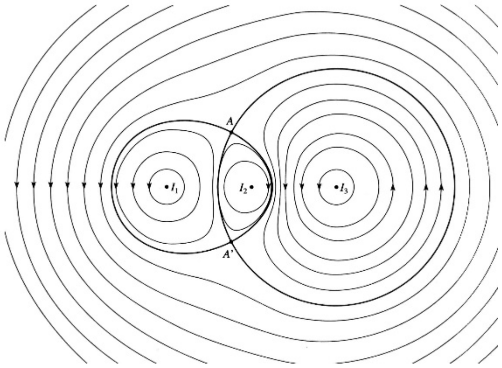


b) Reprendre la question précédente, si la conduction n'est que superficielle (l'intensité circule uniformément selon Oz sur la seule surface du cylindre).

c) On reprend la modélisation du a), mais cette fois se trouve dans le cylindre une cavité cylindrique de rayon r et d'axe O'z, avec O' à la distance d de Oz tel que $d + r < R$. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur de cette cavité est uniforme.

Rép : a) $\vec{B}(r \le R) = \frac{\mu_0 rI}{2\pi R^2}\vec{u_\theta}$ et $\vec{B}(r \ge R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$ b) $\vec{B}(r \le R) = \vec{0}$ et $\vec{B}(r \ge R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$ c) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{cste}$

EM57 – Topographie



Le schéma représente les lignes de champ magnétique créé par trois fils infiniment longs, perpendiculaires au plan du schéma, parcourus par les courants I_1, I_2 et I_3. Par convention, un courant dirigé vers le lecteur est positif.

1°) Déterminer sans aucun calcul le signe de I_1, I_2 et I_3 et celui de la somme $I_1+I_2+I_3$.

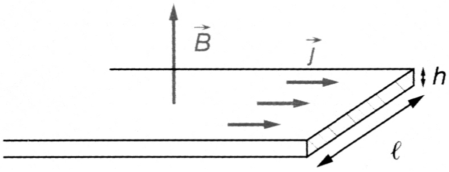
2°) Quelle est la valeur du champ B en A et en A' ?

3°) Soit $|I_2| = 1A$, en déduire une valeur approchée de I_1 et I_3

Rép : 1°) I_1 et $I_3 > 0$ et $I_2 < 0$ et la Σ est positive 2°) En ces points B est nul. 3°) $I_1 \sim 1A$ et $I_3 \sim 2A$

EM58 – Effet Hall

Soit une portion de conducteur ayant la forme d'un ruban de largeur l et d'épaisseur h selon Oz. Le milieu comprend une densité volumique d'ions fixes notée n et une densité électronique de même valeur. Un champ magnétique permanent et uniforme règne en tout point : $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$. En régime permanent, une intensité I circule le long du ruban, avec une densité de courant uniformément répartie $\vec{j} = j\,\overrightarrow{u_x}$.



1°) Expliquer qualitativement que des densités surfaciques de charges sont présentes latéralement et préciser le sens du champ électrique qu'elles créent.
2°) En régime permanent, les électrons mobiles sont soumis au champ électromagnétique total et à une force de frottement fluide. Donner l'expression du champ électrique transversal $\overrightarrow{E_H}$, appelé champ de Hall, en fonction de n, I, B, des dimensions du ruban et de la charge élémentaire e.
3°) Quelle est la force subie par les ions fixes du fait de la présence de $\overrightarrow{E_H}$? Donner l'expression de la densité volumique de cette force en fonction de $\vec{j}$ et $\vec{B}$, puis de la densité linéique en fonction de I et B.
Rép : a) Il y a séparation de charges sur les deux faces d'où l'apparition d'un champ $\overrightarrow{E_H} = E_H\,\overrightarrow{u_y}$ b) $\overrightarrow{E_H} = -\frac{IB}{nelh}\overrightarrow{u_y}$ c) $\overrightarrow{dF} = I\,\overrightarrow{dL} \wedge \vec{B}$

EM59 – Champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment $\vec{M}$ situé au centre de la Terre et dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud. On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6360\ km$. L'intensité du champ magnétique au pôle Nord terrestre est $B_0 = 6 \times 10^{-5}\ T$.

- Quelle est la valeur de M ?
- Que valent les composantes horizontale et verticale du champ magnétique terrestre en un lieu de latitude λ = 49° (latitude de Paris) ?

Rép : $M = 7{,}7\ 10^{22} Am^2, B_x = 2{,}3\ 10^{-5} T\ et\ B_z = 3{,}9\ 10^{-5} T$