

EM5 – Champ magnétostatique

5.3. Magnétostatique		
Champ magnétostatique		
Équations locales de la magnétostatique et formes intégrales : flux conservatif et théorème d'Ampère.	Choisir un contour fermé et une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère.	On introduira l'outil de calcul : le théorème d'Ampère.
Linéarité des équations.	Utiliser une méthode de superposition.	
Propriétés de symétrie.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (rotation, symétrie plane) pour prévoir des propriétés du champ créé.	
Propriétés topographiques.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ magnétostatique. Repérer, sur une carte de champ magnétostatique, d'éventuelles sources du champ et leur sens. Associer l'évolution de la norme d'un champ magnétique à l'évasement des tubes de champ.	Il faudra faire le parallèle avec le champ électrostatique.
Exemples de champs magnétostatiques		
Modèle du câble rectiligne infini.	Déterminer le champ créé par un câble rectiligne infini.	Calcul classique...
Solénoïde long sans effets de bords.	Établir et citer l'expression du champ à l'intérieur d'un solénoïde long, la nullité du champ extérieur étant admise.	... des concours.
Inductance propre. Densité volumique d'énergie magnétique.	Établir les expressions de l'inductance propre et de l'énergie d'une bobine modélisée par un solénoïde long. Associer l'énergie d'une bobine à une densité volumique d'énergie magnétique.	On retrouvera cette notion de densité électromagnétique en EM et OD.
Dipôles magnétostatiques		
Moment magnétique d'une boucle de courant plane.	Relier le moment magnétique d'un atome d'hydrogène à son moment cinétique.	
Rapport gyromagnétique de l'électron. Magnéton de Bohr.	Construire en ordre de grandeur le magnéton de Bohr par analyse dimensionnelle. Évaluer l'ordre de grandeur maximal du moment magnétique volumique d'un aimant permanent.	
Actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure : résultante et moment.	Utiliser les expressions fournies de la résultante et du moment des actions subies par un dipôle magnétique placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Décrire l'expérience de Stern et Gerlach et expliquer ses enjeux.	L'approche documentaire que l'on retrouve ici.
Énergie potentielle d'un dipôle magnétique rigide placé dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.	Utiliser l'expression fournie de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ magnétostatique d'origine extérieure.	Analogie avec le champ électrostatique.

I – Equations locales et intégrales de la magnétostatique

I-1) Equations locales de la magnétostatique

a) Équation de Maxwell Ampère

En régime stationnaire l'équation de Maxwell Ampère s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

La constante μ_0 est une constante dimensionnée, appelée

perméabilité du vide. Elle vaut $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} H m^{-1}$

Le vecteur densité de courant électrique n'étant pas défini en un point d'une distribution linéique ou surfacique de courant, l'équation de Maxwell Ampère n'est pas valide en ce point.

Le champ magnétique n'est pas défini en un point d'une distribution linéique courant.

b) Équation de Maxwell Thomson

L'équation de Maxwell Thomson est valable quel que soit le régime, stationnaire ou non :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \text{le champ } B \text{ est à flux conservatif}$$

c) Linéarité des équations

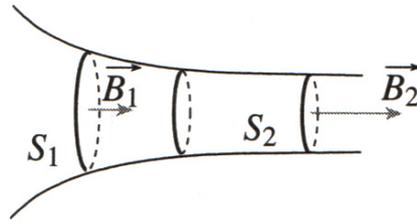
Les équations de Maxwell étant linéaire, on pourra tout comme pour \vec{E} utiliser le théorème de superposition pour \vec{B} .

Les équations de Maxwell étant linéaires, le champ magnétostatique créé par une distribution de courants est la somme des champs créés par ces courants.

I-2) Flux du champ magnétostatique

Les propriétés topographiques du champ magnétique sont déduites de l'équation de Maxwell Thomson : $\text{div } \vec{B} = 0$ qui entraîne la conservation du flux de \vec{B} . En effet d'après le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$



Soit un tube de champ magnétique qui s'appuie sur une surface S_1 , la conservation du flux de \vec{B} , en considérant que le champ magnétique est homogène sur une section droite du tube de champ, s'écrit :

$$B_1 S_1 = B_2 S_2.$$

On en déduit que sur la section S_2 plus petite que S_1 , le champ magnétique est plus intense (qu'au niveau de la section S_1).

Le champ magnétique est à flux conservatif :

- Le flux de \vec{B} à travers une surface fermée est nul ;
- Le flux de \vec{B} est le même à travers toute section d'un tube de champ $\Rightarrow \vec{B}$ s'accroît lorsque les lignes de champ se resserrent.

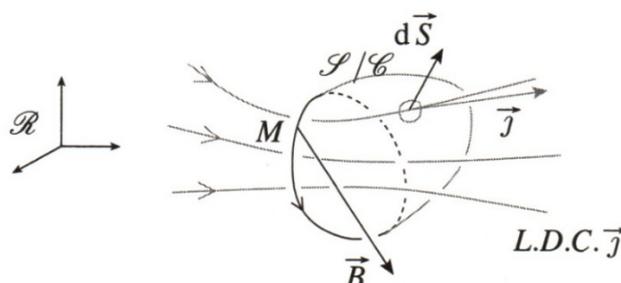
Remarque :

Il est impossible de créer un champ magnétique dont les lignes de champ partiraient toutes d'un même point, puisque cela signifierait que le flux de B sortant d'un volume qui entoure ce point est non nul.

\Rightarrow Il n'existe pas de monopôle magnétique.

I-3) Circulation du champ magnétostatique

a) Théorème d'Ampère



L'équation de Maxwell-Ampère constitue la forme locale du théorème d'Ampère. Grâce au théorème de Stokes, on peut écrire :

$$C = \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l} = \iint_{M \in S_\Gamma} \text{rot } \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

où S_Γ est une surface s'appuyant sur le contour fermé Γ .

D'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$C = \oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l} = \iint_{M \in S_\Gamma} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{S}_M = \mu_0 \iint_{M \in S_\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_M$$

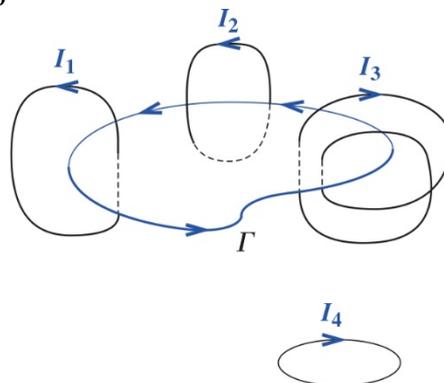
Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{B}(P) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{M \in S_\Gamma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_M = \mu_0 I_{int}$$

Où I_{int} représente le courant enlacé par le contour Γ .

b) Calcul de I_{int}

Le courant enlacé est une grandeur algébrique, il dépend de l'orientation choisie pour le contour Γ . Lorsque la distribution comprend des courants filiformes, le courant enlacé est la somme algébrique des courants qui traversent une surface qui s'appuie sur le contour, orienté conjointement au contour.



Dans ce cas : $I_{int} = I_1 - I_2 + 2I_3$

II – Propriétés de symétrie

II-1) Invariances

a) Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie et d'invariance des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Dans notre cas présent, les causes sont les courants et les effets, le champ magnétostatique.

On en conclut que les symétries et invariances de la distribution de courants doivent se retrouver dans la forme du champ.

b) Invariance par translation

Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ , est invariante par translation suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M', sa densité de charge vérifie : $\vec{j}(M) = \vec{j}(M')$

$$\text{Si } \Delta = (Oz) \text{ alors } \vec{j}(x, y, z + n \Delta z) = \vec{j}(x, y, z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Pour une distribution invariante par **toute** translation de Δz on

a :

$$\forall \Delta z, \vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(x, y, z + \Delta z) = \vec{B}(x, y)$$

c) Invariance par rotation

On a invariance par rotation autour de $\Delta=(Oz)$ si la densité volumique de charges vérifie :

$$\vec{j}(r, \theta, z) = \vec{j}(r, \theta + n\Delta\theta, z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

$$\xrightarrow{\text{Curie}} \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, \theta + n\Delta\theta, z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

Pour une distribution invariance par **toute** rotation autour de (Oz) :

$$\forall \Delta\theta, \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, \theta + \Delta\theta, z) = \vec{B}(r, z),$$

II-2) Symétries

a) \vec{B} un vecteur axial

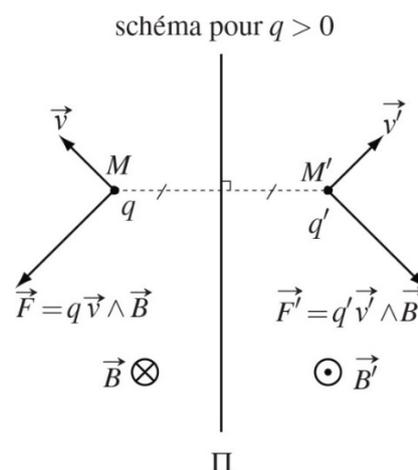
Soit une charge ponctuelle q placée en M où règne un champ magnétique \vec{B} et animée d'une vitesse \vec{v} . Elle subit la force :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

On considère la charge q' symétrique de q par rapport au plan Π telle que :

$$\vec{v}' = \text{sym}_{\Pi}(\vec{v}) \text{ et } \vec{F}' = \text{sym}_{\Pi}(\vec{F})$$

Comme \vec{E} , \vec{v} et \vec{F} sont des vecteurs polaires et on se retrouve dans la situation suivante :

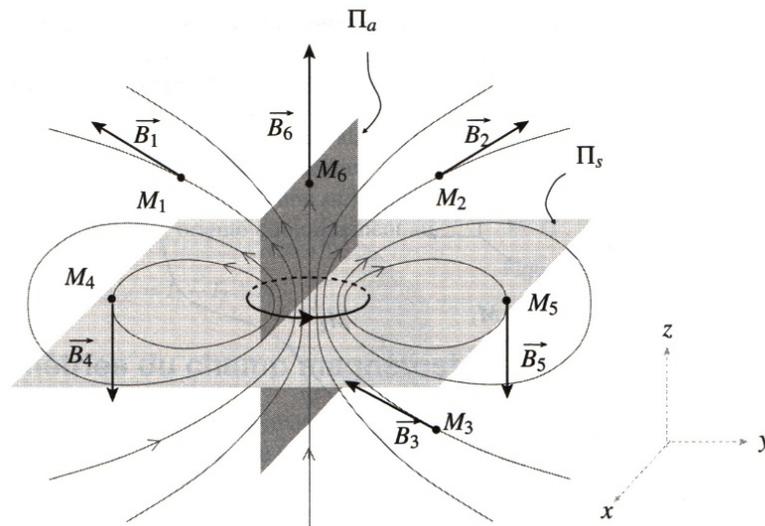


La présence du produit vectoriel entre les deux vecteurs physiques \vec{F} et \vec{v} entraîne que :

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{\Pi}(\vec{B}(M))$$

Contrairement au champ électrique, le champ magnétique présente des propriétés de symétrie inversées par rapport aux sources (à cause d'un produit vectoriel dans les équations qui les relient).

b) Conclusion

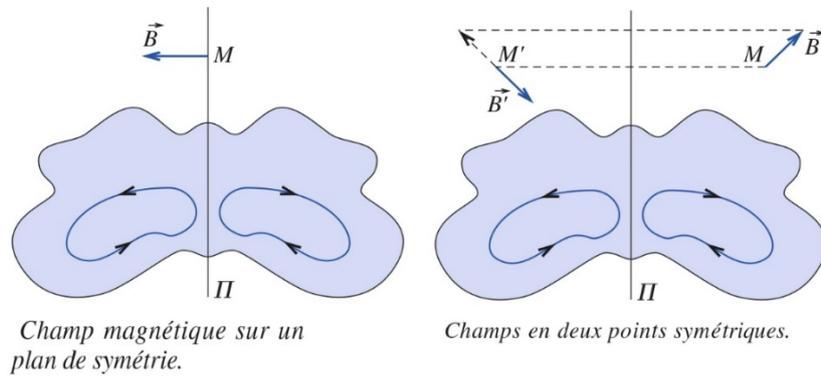


Prenons l'exemple d'une spire pour conclure. On remarque les propriétés suivantes.

1- Symétrie plane :

Le champ magnétique créé par une distribution de courants permanents est **antisymétrique** par rapport à un plan de **symétrie** de la distribution de courants.

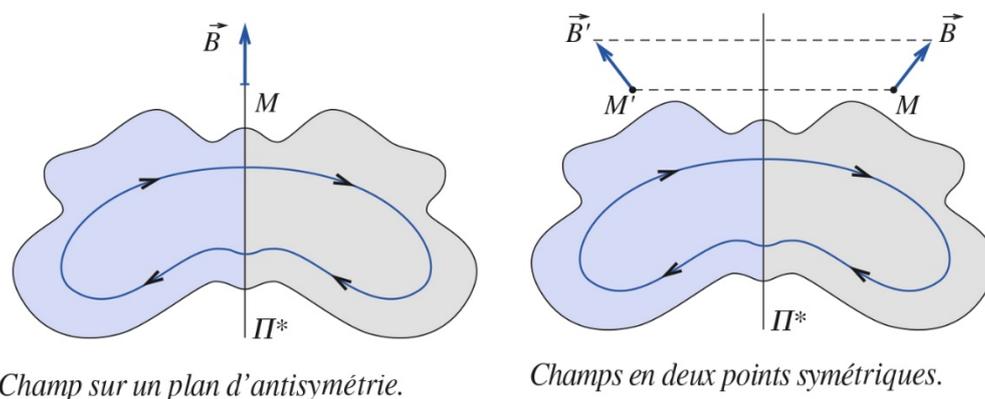
Si le point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de courant, le champ magnétique en M a une direction perpendiculaire à ce plan.



2- Antisymétrie plane

Le champ magnétique créé par une distribution de courants permanents est symétrique par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de courants.

Si le point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, alors le champ magnétique en M a une direction incluse ce plan.



Dans la majorité des cas, on cherche, pour un point M donné, la direction du champ magnétique. Pour cela, il faut chercher des plans de symétrie ou d'antisymétrie **passant par M**.

III – Topographie de \vec{B}

III-1) Lignes de champ

Le champ magnétique étant à flux conservatif, son flux à travers une surface fermée est nul. Par conséquent, les lignes de champ ne peuvent pas diverger à partir des sources comme celles du champ électrostatique. Elles sont fermées et entourent les sources.

Flux conservatif :

- Les lignes de champ magnétique sont fermées et entourent les sources.
- \vec{B} s'accroît lorsque les lignes de champ se resserrent.

III-2) Différences topographiques entre \vec{E} et \vec{B}

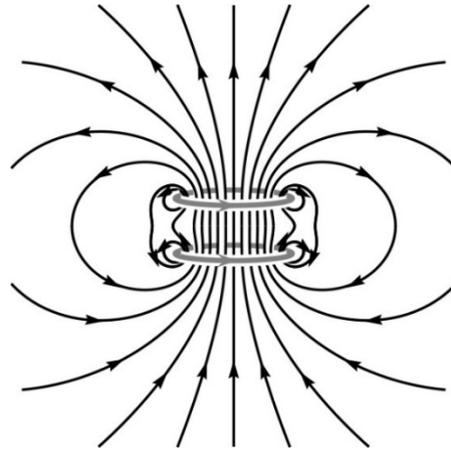
Les lignes de champ présentent certaines propriétés caractéristiques propres au champ magnétique :

\vec{E}	\vec{B}
Elles divergent (ou convergent) à partir d'une charge	Elles ne divergent jamais à partir d'un point
Elles ne se referment pas sur elles-mêmes.	Elles peuvent se refermer sur elles-mêmes ; Elles tournent autour des courants (dans le sens trigonométrique autour d'un courant positif) ;
Les lignes de champs se coupent en un point de champs nul	

Remarque :

- Dans un aimant les lignes de champ vont du pôle Nord au pôle Sud à l'extérieur de l'aimant.
- Loin des sources, les lignes de champ ont des comportements topographiques proches car leur divergence et rotationnel sont nuls.

III-3) Exemple



Soit la carte de champ de deux spires parcourues par des courants de même sens. On observe :

- Les lignes de champ s'enroulent autour des courants (Règle du tire-bouchon).
- Le plan parallèle aux spires et équidistant des deux est un plan de symétrie de la distribution de courants. Les lignes de champ coupent ce plan orthogonalement et sont antisymétriques de part et d'autre de ce plan.
- Le plan qui contient l'axe des spires est un plan d'antisymétrie. Les lignes de champ en un point de ce plan lui sont tangentes et sont symétriques de part et d'autre de ce plan.

IV – Exemples de champs magnétostatiques

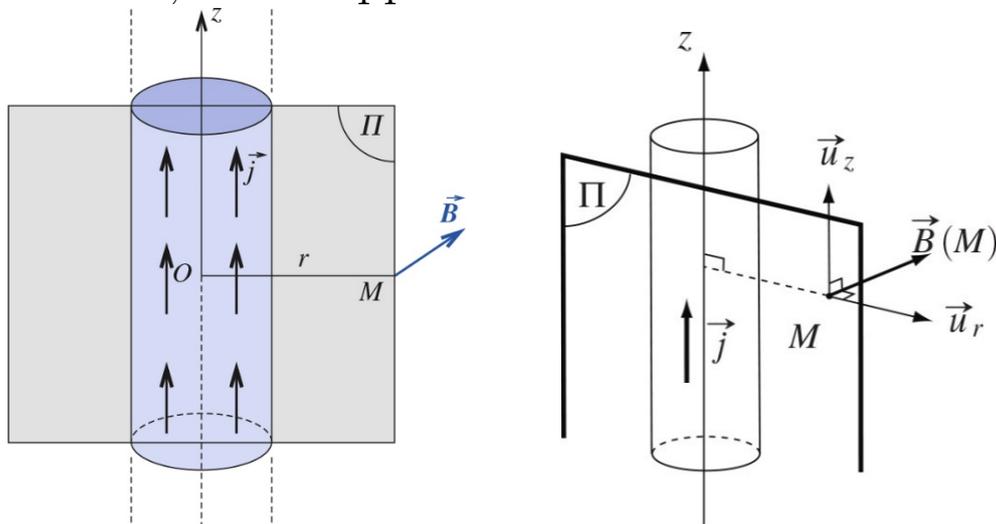
IV-1) Méthode de calcul

- Choix du système de coordonnées
- Exploiter les **symétries** de la distribution pour déterminer la direction de \vec{B} .
- Exploiter les **invariances** de la distribution pour déterminer les dépendances de \vec{B} .
- Choisir un **contour d'Ampère** Γ tel que \vec{B} soit tangent au contour et de norme constante, soit perpendiculaire au

- contour. Orienter ce contour arbitrairement.
- Calculer la circulation de \vec{B} sur ce contour.
- Calculer I_{int} en distinguant les cas possibles.
- Appliquer le théorème d'Ampère. Conclure.

IV-2) Câble rectiligne infini

Un câble cylindrique, d'axe Oz et de rayon a, est parcouru par un courant d'intensité I uniformément réparti. On étudie le champ magnétique créé par le câble à une distance r petite devant la longueur du câble, on le supposera donc infini



On modélise alors la distribution de courant par le vecteur densité de courant électrique \vec{j} , uniforme en tout point du fil, qui vaut :

$$I = j \pi a^2 \Rightarrow \vec{j} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{u}_z$$

- Choix d'un repérage adapté

Le repérage cylindrique est bien adapté à la situation. L'axe (Oz) est confondu avec l'axe du câble.

- Symétries et des antisymétries

Le plan $\Pi = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie donc :

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

- Invariances :

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit :

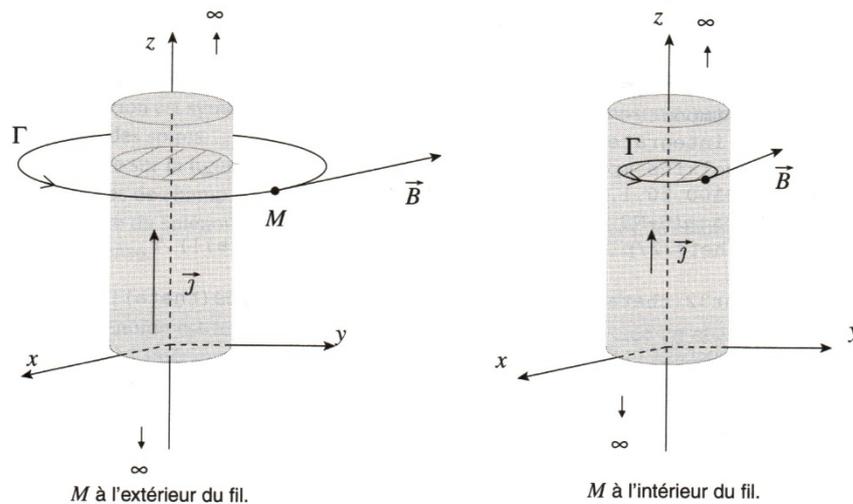
$$B(M) = B(r)$$

- Choix d'un contour d'Ampère

On choisit un cercle « d'axe Oz » passant par M de rayon r d'où :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int}$$

Il faut distinguer les deux cas qui correspondent à M à l'extérieur du fil et M à l'intérieur, comme le montrent les figures suivantes :



- Lorsque M est à l'extérieur, le courant enlacé est le courant total, I alors :

$$\Rightarrow \vec{B}(r > a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

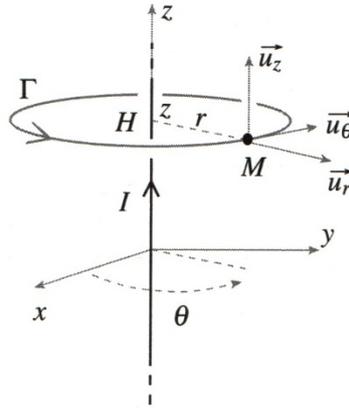
- Lorsque M est à l'intérieur, le courant enlacé est :

$$I_{int} = j \pi r^2 = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 = I \left(\frac{r}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r < a) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

IV-3) Fil infini

Si a tend vers 0, le câble devient un fil et seul le cas $r > a$ existe avec les mêmes symétries et invariance : c'est toujours un problème à symétrie cylindrique.



On choisit donc le contour Γ , orienté dans le même sens que \vec{u}_θ pour appliquer le théorème d'Ampère :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C B(r) \cdot r d\theta = \mu_0 I_{int}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{int} \text{ où } I_{int} = I$$

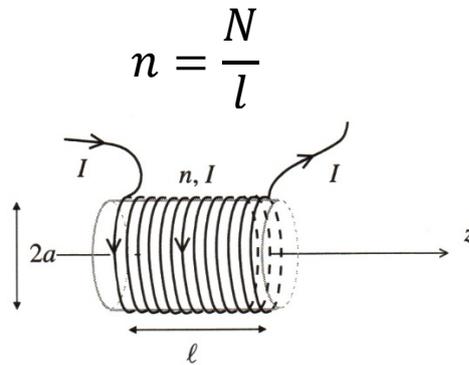
$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

Tout circuit filiforme étudié à une distance faible devant les autres dimensions du circuit est assimilable à un fil infini : les lignes de champ au voisinage des circuits filiformes seront toujours des cercles.

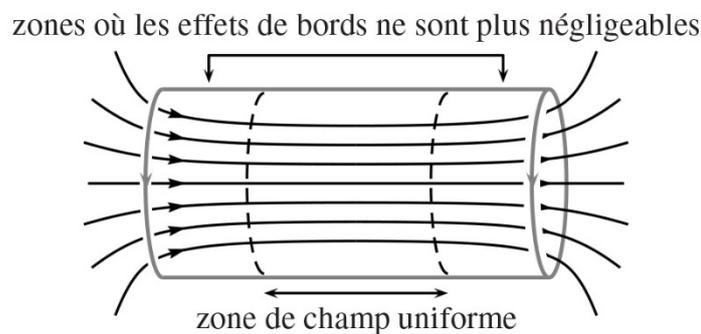
IV-4) Solénoïde infini

a) Présentation

On considère un solénoïde constitué de N spires circulaires enroulées sur un cylindre de longueur l , de rayon a . Celui-ci est caractérisé par le nombre n de spires par unité de longueur bobinées :

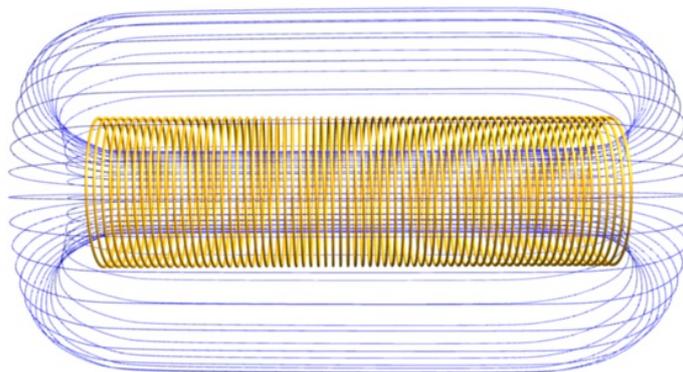


Un solénoïde infini est un modèle qui permet de décrire correctement le champ magnétique créé au cœur de la bobine (aussi appelée solénoïde fini), lorsqu'on néglige les effets de bord.



On va démontrer que le champ au cœur de la bobine est constant et vaut : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

b) Simulation numérique des lignes de champ



On observe sur la figure :

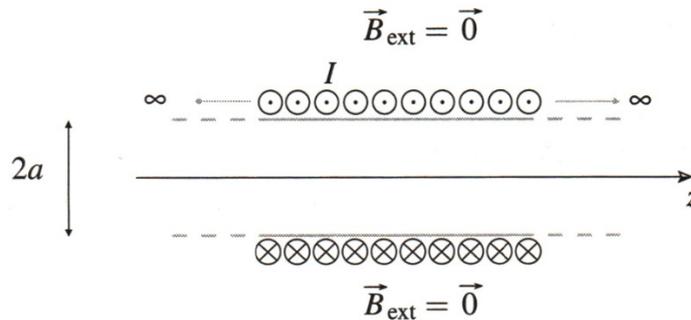
- Les lignes de champ sont rectilignes, et resserrées à l'intérieur du solénoïde : $\vec{B} = B \vec{u}_z$, et B intense.
- Elles s'écartent beaucoup du solénoïde quand elles en sortent : $B \rightarrow 0$ à l'extérieur.

c) Calcul de \vec{B}

Le solénoïde infini est un dispositif idéalisé qui présente des propriétés de symétries intéressantes, on admet qu'il impose un champ magnétique nul à l'extérieur :

$$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$$

Un solénoïde infini parcouru par un courant I crée un champ magnétique nul à l'extérieur de celui-ci.



- Choix d'un repérage adapté

Pour repérer les points dans l'espace, on adopte un repérage cylindrique d'axe (Oz).

- Étude des symétries et des antisymétries

Le plan perpendiculaire à l'axe (Oz) et qui passe par le point M est plan de symétrie pour la distribution de courants.

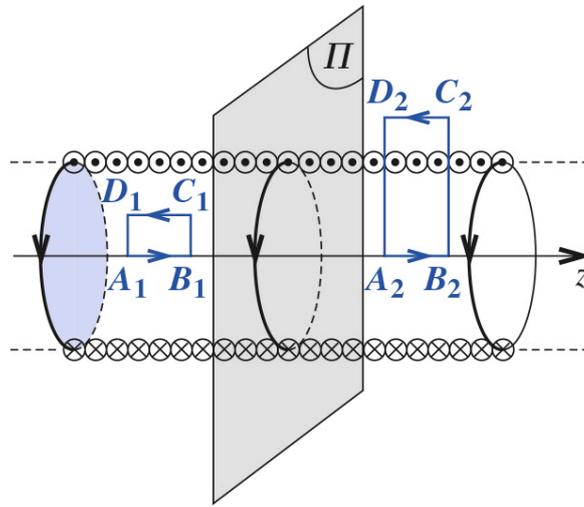
$$\Rightarrow \vec{B} = B \vec{u}_z$$

- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et par translation selon l'axe (Oz), on en déduit : $B(M) = B(r)$

- Choix d'un contour d'Ampère

On choisit successivement deux contours d'Ampère rectangulaires, comme le montre la figure suivante :



Les deux contours ont l'axe Oz en commun, mais l'un des deux se referme à l'intérieur du solénoïde, l'autre à l'extérieur.

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'intérieur :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow B_{axe}l - B(r < a)l = 0$$

$$\Leftrightarrow B(r < a) = B_{axe}$$

- Appliquons le théorème d'Ampère à celui de l'extérieur :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 NI \Leftrightarrow B_{axe}l - B(r > a)l = \mu_0 n l I$$

$$\Leftrightarrow B(r > a) = B_{axe} - \mu_0 n I = cste = 0$$

$$\Leftrightarrow B_{axe} = \mu_0 n I$$

Remarque : On a admis que $B(r > a) = 0$, mais ce résultat semble logique car $B(r > a) = cste$, donc à l'infini aussi. Hors loin des sources de B, le champ doit décroître et tendre vers zéro $\Rightarrow B(r > a) = 0$.

Un solénoïde infini possédant n spires par unité de longueur, parcouru par le courant d'intensité I , crée un champ nul à l'extérieur, $\vec{B}_{ext} = \mathbf{0}$, et un champ uniforme à l'intérieur :

$$\vec{B}_{int} = \mu_0 n I \vec{u}_z$$

dont le sens est déduit du sens du courant par application de la règle de la main droite.

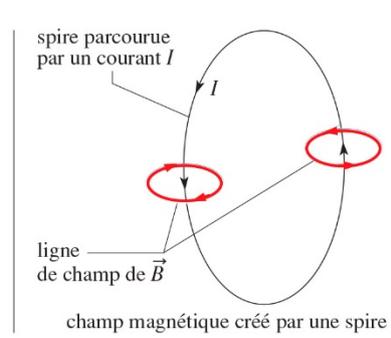
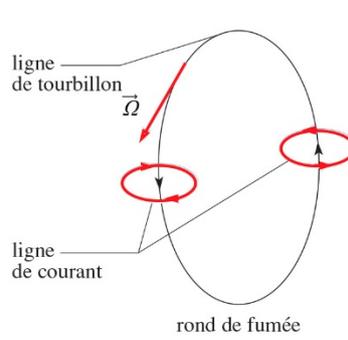
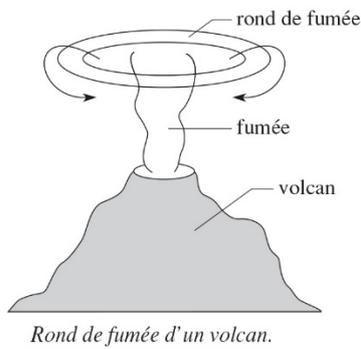
IV-5) – Ecoulement tourbillonnaire

a) Analogie magnétostatique

A l'aide des équations de la magnétostatique et des écoulements tourbillonnaires et incompressibles on peut dresser un tableau d'analogie.

	Magnétostatique	Ecoulement tourbillonnaire et incompressible
Tourbillonnaire	$\overline{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{j}$	$\overline{rot} \vec{v} = 2 \vec{\Omega} = \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{vorticité}}$
Incompressible	$div \vec{B} = 0$	$div \vec{v} = 0$
Théorème d'Ampère	$\oint_C \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I_{int}$	$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S 2 \vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$
Champ	$\frac{\vec{B}}{\mu_0}$	\vec{v}
Sources	\vec{j}	$\vec{\omega} = 2 \vec{\Omega}$
Symétries	Les propriétés de symétrie de \vec{B} se retrouvent pour ce type d'écoulement. <ul style="list-style-type: none"> - Plan de symétrie des sources : \vec{v} est orthogonal. - Plan d'antisymétrie des sources : \vec{v} est dans ce plan 	

Par exemple il y a analogie entre une spire de courant et un « rond de fumée ».



b) Retour sur la tornade

Le tourbillon de Rankine, ou tornade est l'analogie du cylindre infini chargée volumiquement tel que :

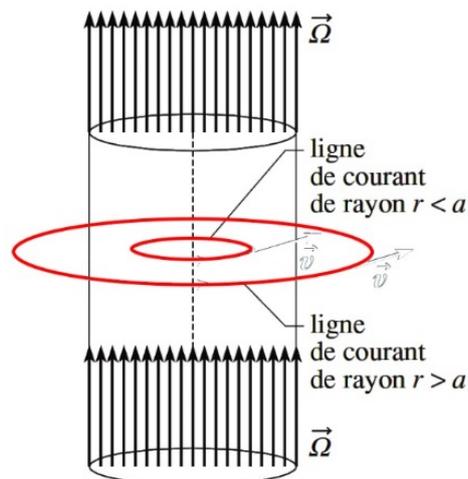
$$\begin{cases} \vec{\Omega}(r < a) = \Omega \vec{u}_z \\ \vec{\Omega}(r > a) = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{j}(r < a) = j \vec{u}_z \\ j(r > a) = \vec{0} \end{cases}$$

Symétries et invariances :

- Invariances par rotation autour de (Oz) et par translation suivant Oz entraîne : $v(r)$
- Plan de symétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ entraîne : $\vec{v} = v\vec{u}_\theta$

Appliquons le théorème d'Ampère :

- On choisit comme contour d'Ampère un cercle de rayon r :



L'application du théorème d'Ampère donne :

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint_S 2 \vec{\Omega} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } r < a : C = 2\pi r v = 2\Omega \pi r^2 \\ \text{Si } r > a : C = 2\pi r v = 2\Omega \pi a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(r < a) = r\Omega\vec{u}_\theta \\ v(r > a) = \Omega\frac{a^2}{r}\vec{u}_\theta \end{cases}$$

c) Retour sur le vortex

La circulation de la vitesse sur une ligne de courant extérieure à l'œil de la tornade est une constante qui caractérise la tornade. Le tourbillon est dit ponctuel (et nommé vortex) si $a \rightarrow 0$ tout en maintenant C constante. Le champ des vitesses d'un vortex ($a \rightarrow 0, \Omega \rightarrow \infty$) s'écrit alors :

$$\vec{v} = \frac{C}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

Ce résultat est en mettre en parallèle avec le fil infini :

$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$$

V – Densité volumique d'énergie magnétique

V-1) Inductance propre

Le champ créé par un circuit, appelé champ propre \vec{B} , est proportionnel au courant I qui le parcourt.

Le flux de ce champ propre à travers le circuit lui-même, appelé flux propre ϕ , est également proportionnel au courant I , avec un facteur de proportionnalité positif, appelé inductance propre du circuit, noté L :

L'inductance propre d'un circuit relie le champ propre au courant traversant le circuit par :

$$\phi = LI = \iint_{\text{circuit}} \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Dans le cas d'une spire du solénoïde infini on a :

$$\phi_1 = \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot \vec{dS} = B \iint_{\text{spire}} dS = B\pi a^2$$

⇒ Dans le cas du solénoïde infini on a :

$$\begin{aligned} \phi &= N\phi_1 = N \times \mu_0 n I \times \pi a^2 \\ \Leftrightarrow \phi &= \mu_0 N^2 \pi \frac{a^2}{l} I \\ \Rightarrow L &= \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{l} \end{aligned}$$

V-2) Densité volumique d'énergie magnétique

Or,

$$\begin{aligned} E_{\text{bobine}} &= \frac{1}{2} L I^2 \\ \Leftrightarrow E_{\text{bobine}} &= \frac{1}{2} \mu_0 N^2 \frac{\pi a^2}{l} I^2 \end{aligned}$$

De plus :

$$I = \frac{B}{\mu_0 N} l \Rightarrow E_{\text{bobine}} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi a^2 l$$

On retrouve le volume du solénoïde fini : $V = \pi a^2 l$ par conséquent l'énergie volumique magnétique s'écrit :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

On admet, la généralisation de ce résultat.

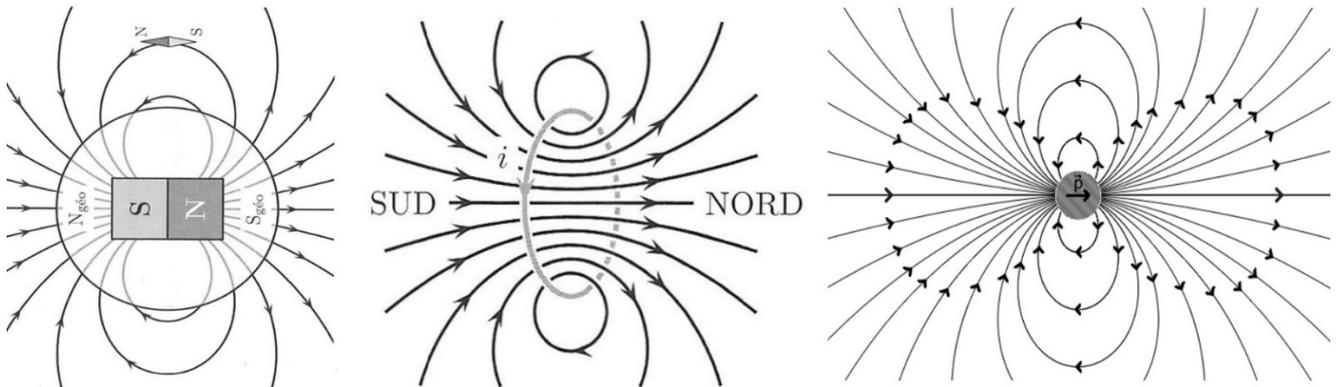
La densité volumique d'énergie magnétique, s'exprime, dans le cas général par :

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

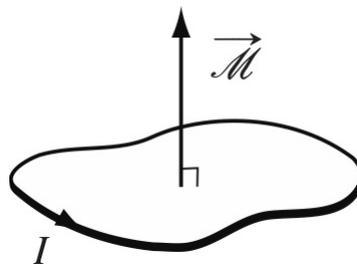
VI – Moment magnétique

VI-1) Moment magnétique d'un dipôle

La comparaison des cartes de lignes de champ magnétique créé par une spire, une bobine longue ou un aimant montre que le champ à grande distance a la même allure. Par ailleurs, ces lignes de champ ressemblent également aux lignes de champ électrostatique d'un dipôle électrostatique.



Ces constatations amènent à définir le moment magnétique \vec{M} d'une boucle de courant plane comme étant un dipôle magnétostatique.



Un dipôle magnétostatique est une petite spire plane et filiforme parcourue par un courant d'intensité I . Le moment magnétique d'un dipôle est :

$$\vec{M} = I \vec{S} \quad (\text{en } Am^2)$$

où \vec{S} est le vecteur surface, orienté dans le sens positif par rapport au courant I .

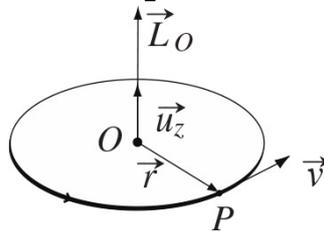
Remarque :

La notion de moment magnétique est étendue aux aimants puisque les lignes de champ magnétique d'un aimant et d'une boucle de courant à grande distance sont identiques.



VI-2) Moment magnétique atomique

Intéressons-nous au modèle planétaire de l'atome :



On considère que l'électron génère une boucle de courant circulaire parcourue par un courant $I = \frac{q}{T}$ où q est la charge de l'électron et T la période de son mouvement d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} = I \vec{S} = \frac{q}{T} \pi r^2 \vec{u}_z \\ \vec{L}_o = OM \wedge m\vec{v} = mrv \vec{u}_z \\ T = \frac{2\pi r}{v} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{qvr}{2} \vec{u}_z = \frac{q}{2m} L_z \vec{u}_z$$

À tout moment cinétique \vec{L} est associé un moment magnétique \vec{M} tel que : $\vec{M} = \gamma \vec{L}$ où γ est appelé rapport gyromagnétique.

Pour le mouvement orbital de l'électron autour du noyau,

$$\gamma = \frac{-e}{2m}$$

VI-3) Magnéton de Bohr

Nous allons bâtir une unité de moment magnétique à l'échelle atomique, que l'on note μ_B et que l'on appelle magnéton de Bohr.

Les grandeurs physiques qui interviennent dans son expression sont :

- La charge élémentaire e .
- La masse de l'électron m .
- La constante de Planck h . (En effet Bohr a démontré que le moment cinétique atomique était quantifié :

$$L = n\hbar$$

On cherche donc :

$$\begin{aligned}
 [\mu_B] &= \alpha e^a m^b h^c \\
 \text{où } \left\{ \begin{array}{l} [e] = IT \\ [m] = M \\ [h] = [action] = [Energie]T = ML^2T^{-1} \\ [\mu_B] = IL^2 \end{array} \right. \\
 \Rightarrow IL^2 = I^a T^a M^b M^c L^{2c} T^{-c} &\Rightarrow IL^2 = I^a T^{a-c} M^{b+c} L^{2c} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \\
 \Rightarrow \mu_B = \alpha \frac{eh}{m}
 \end{aligned}$$

La quantification du moment cinétique orbital, entraîne la quantification du moment magnétique :

$$M = -n\mu_B \text{ où } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 \sim 10^{23} \text{ Am}^2$$

VI-4) Moment magnétique d'un aimant permanent

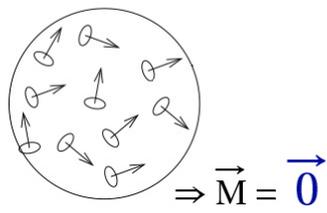
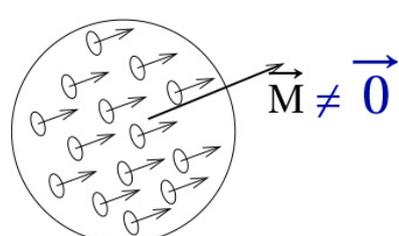
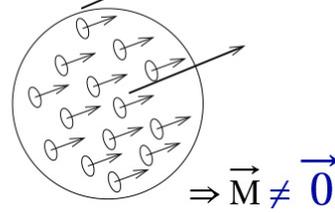
Les électrons décrivent des orbites autour du noyau atomique : ils se comportent comme des boucles de courant.

Dans la majorité des milieux magnétiques, les orientations des dipôles sont aléatoires de telle façon qu'il n'existe aucune

aimantation moyenne en absence de champ magnétique extérieur appliqué. Néanmoins, les dipôles de certains milieux interagissent entre eux et s'orientent naturellement dans une direction privilégiée (cas de l'oxyde de fer Fe_3O_4 appelé magnétite).

On peut distinguer trois types de milieux :

- Milieu ferromagnétique : matériaux magnétique possédant un moment dipolaire magnétique moyen non nul même en l'absence d'excitation magnétique : on peut donc les utiliser comme aimants permanents.
- Milieu diamagnétique : milieux ne possédant pas de moment magnétique microscopique.
- Milieu paramagnétique : milieux possédant des moments magnétiques microscopiques dont l'orientation est aléatoire.

Milieux paramagnétiques	Milieux ferromagnétiques
$\vec{B} = \vec{0}$  $\Rightarrow \vec{M} = \vec{0}$	$\vec{B} = \vec{0}$  $\Rightarrow \vec{M} \neq \vec{0}$
$\vec{B} \neq \vec{0}$  $\Rightarrow \vec{M} \neq \vec{0}$	

Le moment magnétique sera maximal quand tous les petits moments atomiques seront parallèles.

S'il y a n atomes par unité de volume, le moment magnétique volumique ($M = \frac{dM}{d\tau}$) maximal M_{max} sera égal à :

$$M_{max} = n \mu_B$$

$$\Rightarrow M_{max} = 10^{29} \times 10^{-23} = 10^6 Am^{-1}$$

Le moment magnétique volumique maximal d'un aimant permanent est :

$$M_{max} = n \mu_B = 10^6 Am^{-1}$$

VII – Action d'un champ magnétique extérieur sur le dipôle magnétostatique

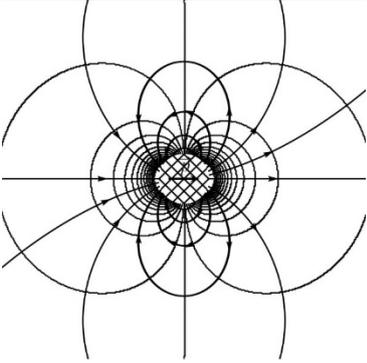
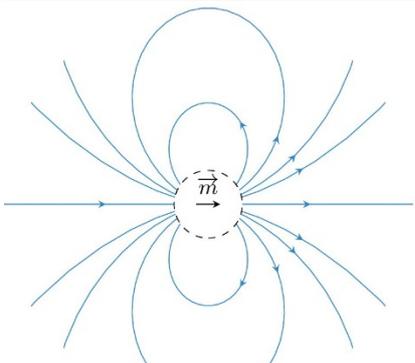
VII-1) Force subie dans un champ extérieur uniforme

Dans un champ extérieur \vec{B}_{ext} la boucle de courant est soumise à la force de Laplace :

$$\vec{F} = \oint_{spire} I \vec{dl} \wedge \vec{B} = \oint_{spire} \vec{dl} \wedge (I\vec{B}), \quad \text{or } \oint_{spire} \vec{dl} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$$

On admettra par analogie, avec le dipôle électrostatique, les autres résultats.

VII-2) Analogie dipôle \vec{E} / dipôle \vec{B}

	dipôle \vec{E}	dipôle \vec{B}
Moment	$\vec{p} = q \vec{NP}$	$\vec{M} = I \vec{S}$
Potentiel ($r \gg a$)	$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	Hors-Programme
Champ créé ($r \gg a$)	$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p})$	$\vec{B}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3(\vec{M} \cdot \vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{M})$
Lignes de champ (et équipotentiellles)		
Force subie dans un champ extérieur	$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{grad}) \vec{E}_{ext}$ $= \vec{0} \text{ si } \vec{E}_{ext} = \vec{cste}$	$\vec{F} = (\vec{M} \cdot \vec{grad}) \vec{B}_{ext}$ $= \vec{0} \text{ si } \vec{B}_{ext} = \vec{cste}$
Couple subi dans un champ extérieur	$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{ext}$	$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_{ext}$
Energie potentielle du dipôle	$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$	$E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_{ext}$

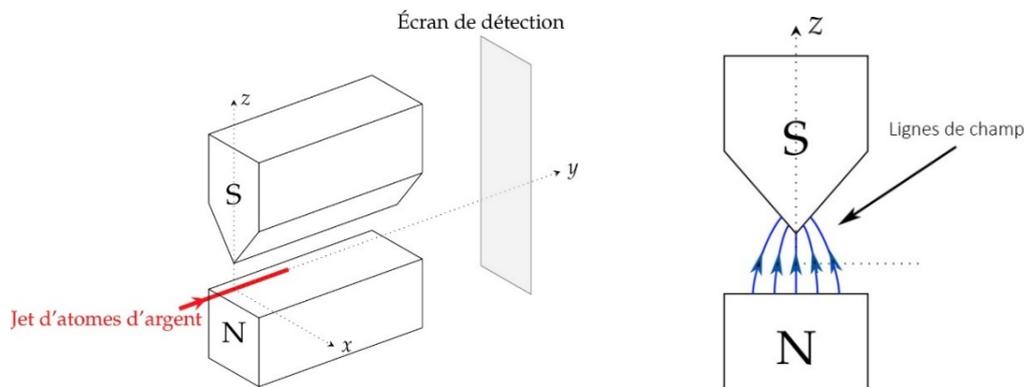
Le couple tend à aligner le dipôle avec le champ extérieur et une résultante entraine le dipôle vers les zones de fort champ (si le champ est non-uniforme).

VIII – Expérience de Stern et Gerlach

VIII-1) Présentation

a) Résultats de l'expérience

En 1922, Otto Stern et Walter Gerlach mettent en place une expérience pour déterminer si le moment cinétique électronique est quantifié comme le propose Sommerfeld. Pour cela, ils envoient des atomes d'argent à travers l'entrefer d'un électroaimant, zone où règne un champ magnétique inhomogène dirigé suivant une direction (Oz) orthogonale à la vitesse initiale des atomes.



Tout le dispositif est placé dans un vide poussé où règne une pression inférieure au millipascal. Des atomes d'argent s'échappent par un petit orifice de l'enceinte (la source) chauffée à haute température. Ils se déplacent en ligne droite jusqu'à une fente (D) qui sélectionne les atomes qui ont une vitesse parallèle à l'axe des y .

Le jet atomique pénètre alors dans l'entrefer d'un électroaimant dont la forme est choisie pour que le champ magnétique ne soit pas uniforme. Le jet atomique est dévié par ce champ inhomogène. Quand il sort de l'électroaimant, il continue en ligne droite jusqu'à un écran où sont repérés les impacts des atomes. La figure suivante donne le résultat attendu par la mécanique classique ainsi que le résultat obtenu expérimentalement :

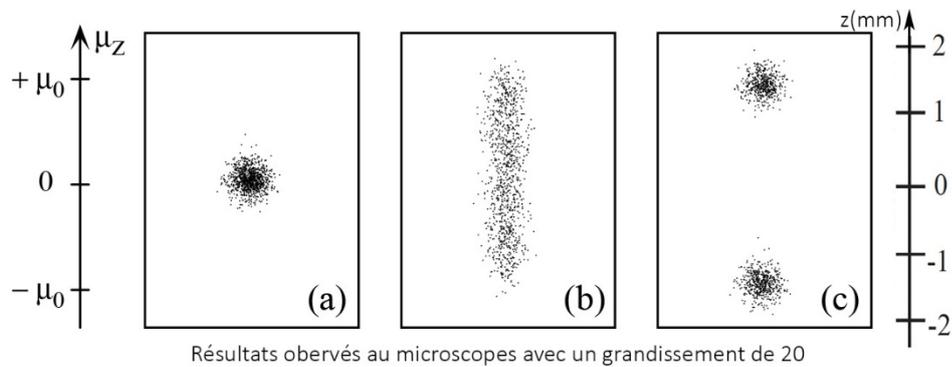
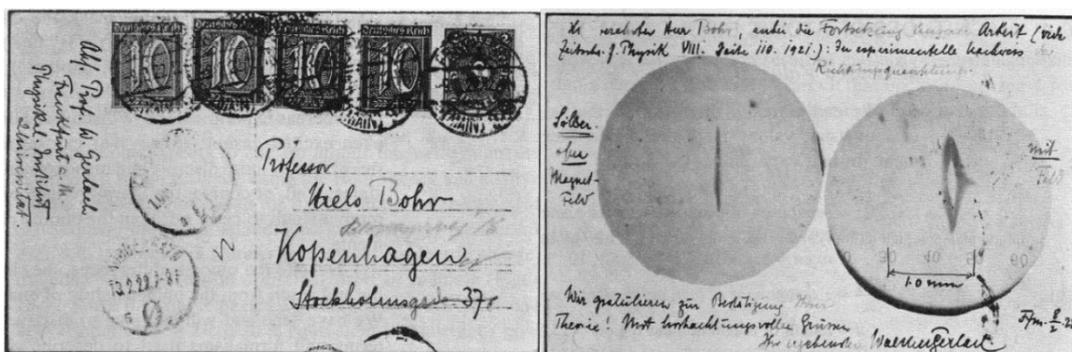


Photo (a) : En absence de gradient magnétique, aucune déflexion des trajectoires atomiques ne se produit et les atomes forment une tache unique autour du point $x = z = 0$; chaque point représente l'impact d'un atome sur l'écran de détection.

Photo (b) : Simulation du résultat attendu classiquement, en supposant que tous les atomes portent le même moment magnétique $\mu_0 = M_0$ avec une orientation aléatoire ; la distribution de la composante selon z du moment magnétique est alors uniforme entre $-\mu_0$ et $+\mu_0$.

Photo (c) : Simulation du résultat trouvé expérimentalement avec des atomes d'argent : l'expérience, qui peut être considérée comme une mesure de la composante selon z du moment magnétique, n'admet que deux résultats $\mu_z = \pm\mu_0$.

Historiquement Gerlach a posté ses résultats à Bohr qui avait prédit ce résultat, sans pouvoir le vérifier : (A droite une seule tache est visible par rapport à la position centrale).



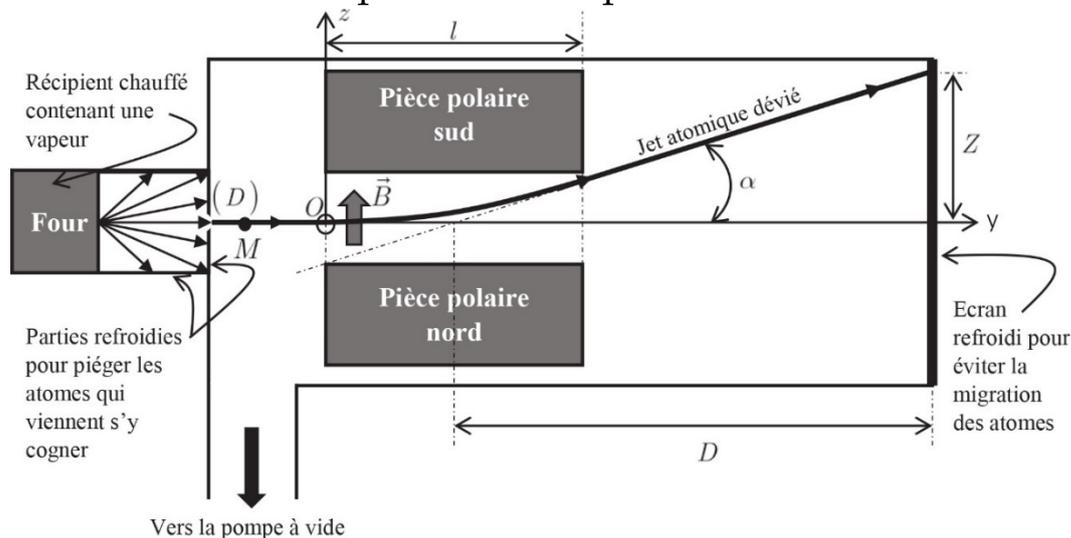
Traduction :

Cher Monsieur Bohr, Ci-joint la suite de notre travail concernant la preuve expérimentale de la quantification directionnelle.

- [À gauche] : argent [silber], sans champ magnétique [ohne magnet feld]
- [À droite] : avec champ [mit feld]

Nous vous félicitons pour la confirmation de votre théorie ! Avec mes salutations respectueuses. Bien à vous. Walther Gerlach.

b) Données numériques sur l'expérience



Caractéristiques de l'expérience :

- Taille de la fente d'entrée : $b=1\text{mm}$; Longueur de l'électroaimant : $l=3,5\text{cm}$
- Distance entre le milieu de l'électroaimant et l'écran : $D=1,8\text{cm}$ (Echelle non respectée)
- Pression dans l'enceinte : $p=1,0\text{mPa}$
- Température du jet à la sortie du four : $T=1270\text{K}$
- Gradient de champ magnétique : $\frac{\partial B}{\partial z} = 500 \text{ T m}^{-1}$
- Argent : $M = 107 \text{ g.mol}^{-1}$, $Z = 47$, $R_{Ag} = 160 \text{ pm}$
- $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$, $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
- $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$

VIII-2) Déviation des particules

Appliquons le PFD à la particule d'Argent dans le référentiel galiléen :

$$\begin{cases} m\ddot{z} = F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \\ m\ddot{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} t \\ v_x = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{t^2}{2} \\ x = ut \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = \frac{\mu_z}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \frac{(x)^2}{2}$$

Donc en sortie d'aimant :

$$\tan \alpha = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_l = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} l \text{ avec } Z = (\tan \alpha) X$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{mu^2} \frac{\partial B}{\partial z} l D$$

$$\text{Or } u^2 = 3k_B T \Rightarrow Z = \frac{\mu_z}{3k_B T} \frac{\partial B}{\partial z} l D \Rightarrow \mu_z = \frac{3k_B T}{\frac{\partial B}{\partial z} l D} Z$$

$$\Rightarrow \mu_z \sim \frac{3 \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 1270}{500 \times 3,5 \times 1,8 \times 10^{-4}} Z \sim 1,67 \cdot 10^{-19} Z$$

Or sur la simulation numérique : $Z = \frac{1,50}{20} \cdot 10^{-3} m$

$$\Rightarrow \mu_z = 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2 = \pm \mu_B$$

VIII-3) Introduction du spin

Pour l'atome d'argent on a : $[Ag] = [Kr]3d^{10}5s^1$, par conséquent l'électron 5s est le seul électron de valence.

Or pour un électron 5s : $n=5$, $l=0$ et $m_l = 0 \Rightarrow L_z = 0$. Par conséquent ce n'est pas la quantification du moment magnétique orbital qui explique les deux tâches obtenues.

Il faudra donc introduire un quatrième nombre quantique : le spin.