EM4 – Dipôle électrostatique

A – Travaux dirigés

EM41 - Champ et potentiel créés par deux fils infinis

On considère un fil infini d'axe Oz portant une densité linéique de charge constante λ.

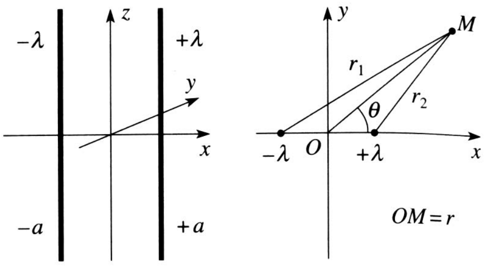
1°) Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$.

2°) En déduire le potentiel électrostatique V.

3°) On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz situés en (x = -a, y = 0) et (x = a, y = 0) portant respectivement des densités linéiques de charges -λ et +λ. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances r_1 et r_2 aux deux fils, en choisissant V=0, à égale distance des deux fils.

4°) En déduire que pour $r \gg a$:

$$V(M) = \frac{\lambda a}{\pi\varepsilon_0 r}\cos\theta$$



Rép : 1°) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ 2°) $V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cste$ 3°) $V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$ 4°) Développements limités…

EM42 – Interaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle électrostatique

On place un dipôle électrostatique rigide $\vec{p}$ en un point M, à proximité d'une charge ponctuelle q située en O.

1°) Montrer que le dipôle s'oriente radialement par rapport à la charge q.

2°) Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle, en supposant qu'il s'est préalablement orienté selon la direction de la question précédente. On rappelle qu'un dipôle dans un champ électrostatique subit la force : $\vec{F} = \left(\vec{p}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{E}$

3°) Même question pour la charge q.

4°) Que peut-on en conclure ?

Rép : 1°) Cf Cours 2°) $\vec{F} = -\frac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r}$ 3°) $\overrightarrow{F'} = \frac{2pq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\overrightarrow{u_r}$ 4°) Troisième loi de Newton

B – Exercices supplémentaires

EM43 – Deux sphères de densité opposée

Deux sphères, de centre O_1 et O_2, de même rayon R, sont chargées uniformément en volume avec des densités volumiques de charge opposées +ρ et −ρ. Leurs centres sont décalés de a : $\overrightarrow{O_1O_2} = a\,\overrightarrow{u_z}$, avec $a \ll R$.

1°) Déterminer le champ électrostatique dans tout l'espace intérieur et dans tout l'espace extérieur aux deux sphères (la zone intérieure à l'une et extérieure à l'autre est trop petite pour être intéressante).

2°) Montrer que l'on peut définir un moment dipolaire $\vec{p}$ pour l'ensemble tel que le champ à l'extérieur soit égal à celui que crée ce dipôle.

Rép : 1°) $\overrightarrow{E_{int}} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$ et $\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{O_1M}}{O_1M^3} - \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M^3}$ 2°) $\vec{p} = Q\,\overrightarrow{O_2O_1}$ où $Q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$

EM44 – Dipôle électrostatique et condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques très fines, de surface S, situées en x=0 et x=e. L'isolant entre les deux armatures a une permittivité ε_0. On néglige les effets de bord. Les densités surfaciques de charges portées par les deux armatures sont uniformes et opposées. On rappelle que pour un dipôle rigide placé dans un champ électrique extérieur $\vec{E}$, l'énergie potentielle est $E_p = -\vec{p}.\vec{E}$ et le moment du couple subi par ce dipôle est $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.

1°) Déterminer le champ électrostatique à l'intérieur du condensateur en utilisant le champ créé par un plan infini.

2°) On place à l'intérieur du condensateur un dipôle électrostatique de moment d'inertie J en un point O d'abscisse $x = \frac{e}{2}$. Il peut tourner autour de l'axe Oz. Déterminer les positions d'équilibre.

3°) Étudier la stabilité de l'équilibre.

4°) Etablir l'équation différentielle en θ liée à la rotation du dipôle autour de l'axe Oz. Étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre stable.

Rép : 1°) $\overrightarrow{E_{ext}} = \vec{0}$ et $\vec{E}_{int} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_x}$ 2°) $\theta = 0$ et π 3°) $\theta = \pi$ est instable et $\theta = 0$ stable 4°) $\ddot{\theta} + \frac{pE}{J}\sin\theta = 0$

EM45 – Cristal de NaCl soumis à un champ

L'application d'un champ électrique à un monocristal de chlorure de sodium se traduit par des déplacements des ions qui le composent. Soit $\vec{E} = E_0\,\overrightarrow{u_x}$, le champ électrostatique imposé aux ions du cristal, par exemple en appliquant une tension à des électrodes planes plaquées sur les faces opposées d'un échantillon parallélépipédique. Sous l'effet de ce champ, les ions Na^+ se déplacent en bloc selon Ox de δ^+ et les ions Cl^- de δ^-, le centre de masse de l'ensemble restant immobile. On posera $x = \delta^+ - \delta^-$. Avant tout déplacement le moment dipolaire global du cristal est nul par symétrie de la répartition. On note N le nombre d'ions sodium et chlorure par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron.

1°) Montrer que ces déplacements ioniques se traduisent par un moment dipolaire réparti dans le volume du cristal, de densité volumique $\vec{P} = P\,\overrightarrow{u_x}$ et exprimer P en fonction de la charge élémentaire e, de x et du nombre N de paires d'ions Na^+Cl^- par unité de volume.

2°)

a) L'expérience montre que la relation entre P et E est linéaire, de la forme $P = \varepsilon_0\chi_{ion}E$ où χ_{ion} est un coefficient positif caractéristique du cristal. En déduire que le groupe d'ions Na^+ est soumis à des forces de rappel élastique dont la moyenne par ion est de la forme $\vec{f} = -Kx\,\overrightarrow{u_x}$, les ions Cl^- étant soumis à des forces opposées.

b) Exprimer la constante K en fonction de N, e, ε_0 et χ_{ion}.

3°)

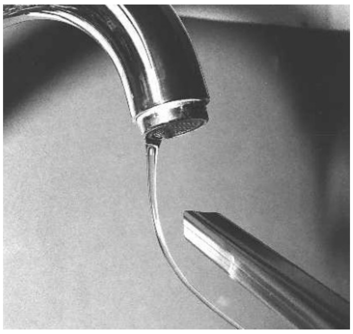
a) Après suppression du champ $\vec{E}$, les deux groupes d'ions évoluent librement. Écrire l'équation du mouvement d'un ion Na^+ et celle d'un ion Cl^- ; on désignera par m^+ et m^- leur masse respective.

b) Montrer que leur mouvement relatif des deux ions est une oscillation à une pulsation $\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\chi_{ion}}}$. Pour cela, on fera les combinaison linéaires des équations du mouvement des deux ions qui permettent d'obtenir les équations vérifiées par : $x_G = \frac{m^+\delta^+ + m^-\delta^-}{m^+ + m^-}$ et par x.

Rép : 1°) $P = Nex$ 2a)... 2b) $K = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0\chi_{ion}}$ 3a) $m^+\ddot{\delta}^+ = -Kx$ et $m^-\ddot{\delta}^- = +Kx$ 3b) $\omega_T = \sqrt{\frac{K}{m}}$ où $m = \frac{m^+m^-}{m^+ + m^-}$

EM46 – Filet d'eau

Un morceau de matière plastique, frotté sur un chiffon sec, est approché d'un filet d'eau coulant d'un robinet. Le résultat, assez spectaculaire, de cette expérience est représenté sur l'image. Comment interpréter ce phénomène ?



Rép : L'eau est une molécule polaire...