

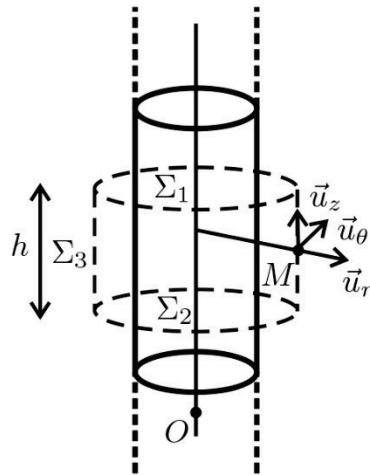
EM4 – Dipôle électrostatique

A – Travaux dirigés

EM41 - Champ et potentiel créés par deux fils infinis

1.

Calcul du champ électrostatique en trois étapes



- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges (sources du champ), donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation d'axe Oz , donc \vec{E} aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 2\pi r h$$

Les trois surfaces formant (Σ) sont : (Σ_1) surface supérieure, (Σ_2) surface inférieure et (Σ_3) surface latérale. Le flux à travers la surface supérieure et la surface inférieure est nul car le champ électrostatique est orthogonal au vecteur élément de surface.

Le point M est nécessairement à l'extérieur du fil. La charge intérieure est :

$$Q_{int} = \lambda h.$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Interprétation physique :

Le champ électrostatique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

2. On en déduit directement le potentiel électrostatique à partir de la

relation $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$.

On considère un déplacement quelconque dans l'espace :

$$d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

On a alors :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(r)\vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z) = -E(r) dr$$

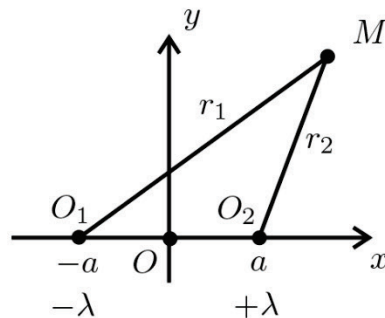
Soit :

$$dV = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

On intègre la relation précédente :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + cte$$

La distribution est infinie. On ne peut donc pas choisir : $V(\infty) = 0$.
L'énoncé ne précise pas la constante dans cette question.

3.

On applique le théorème de superposition.

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_2 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + cte' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2} + cte'$$

D'après l'énoncé, $V = 0$ si $r_1 = r_2$. On a donc :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$$

4°) On a :

$$\begin{cases} r_1^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta \\ r_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = r \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 \sim r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) \\ \frac{1}{r_2} \sim \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)^2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} \sim 1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta$$

Or :

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \sim \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times 2 \frac{a}{r} \cos \theta$$

$$\Rightarrow V = \frac{\lambda a}{\pi\epsilon_0 r} \cos \theta$$

EM42 – Interaction d'une charge ponctuelle et d'un dipôle électrostatique

1. La charge q crée le champ électrostatique $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$. Le dipôle subit un moment $\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}$: il sera en équilibre par rapport aux mouvements de rotation si ce moment est nul donc si \vec{p} et \vec{E} sont colinéaires. Le dipôle s'oriente selon les lignes de champ c'est-à-dire radialement par rapport à la charge. L'équilibre est stable si les deux vecteurs sont de même sens donc si $\vec{p} = p\vec{u}_r$, avec $p > 0$.

2. D'après la formule fournie :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = \left(p \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \right) = -\frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r.$$

Le dipôle, une fois qu'il est aligné sur le champ électrostatique de la charge ponctuelle, est attiré par celle-ci.

3. Le dipôle électrostatique situé en M crée en O le champ électrostatique :

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \overrightarrow{MO}) \overrightarrow{MO} - OM^2 \vec{p}}{OM^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(-pr)(-r\vec{u}_r) - r^2 p \vec{u}_r}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \vec{u}_r.$$

La charge q subit donc la force : $\vec{F}' = q\vec{E}' = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$. Elle est attirée par le dipôle.

4. On a donc $\vec{F}' = -\vec{F}$: le principe des actions réciproques est donc respecté.

B – Exercices supplémentaires

EM43 - Deux sphères de densité opposée

1. On applique le principe de superposition. Le champ créé par une sphère de rayon R , de centre O , de charge volumique ρ est :

$$\begin{cases} \text{pour } r < R : \vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM}, \\ \text{pour } r > R : \vec{E}(M) = \frac{3\rho R^3}{\epsilon_0(OM)^3} \overrightarrow{OM}. \end{cases}$$

Donc :

- à l'intérieur des deux sphères, c'est-à-dire pour $r < R$ puisque $a \ll R$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2M} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1O_2},$$

- à l'extérieur des deux sphères, c'est-à-dire pour $r > R$:

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0(O_1M)^3} \overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0(O_2M)^3} \overrightarrow{O_2M},$$

À l'intérieur, le champ est uniforme.

2. À l'extérieur, on reconnaît l'expression du champ créé par deux charges ponctuelles, l'une positive, égale à $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ située en O_1 , l'autre négative, égale à $-Q = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ située en O_2 . Comme $r \gg a$ (puisque $r > R$ et que $R \gg a$), nous sommes exactement dans le cadre de l'approximation dipolaire et le champ à l'extérieur est celui d'un dipôle de moment dipolaire :

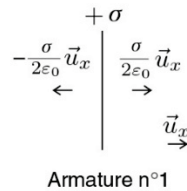
$$\vec{p} = Q \overrightarrow{O_2O_1} = 4\pi R^3 \frac{\rho a}{3} \vec{u}_z.$$

EM44 – Dipôle électrostatique et condensateur plan

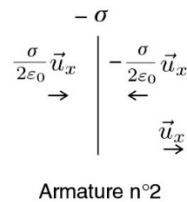
1. On applique le théorème de superposition pour calculer le champ créé par les deux armatures qui sont assimilées à des plans infinis situés en $x = 0$ et $x = e$.

Distribution D_1 : armature de charge Q et de densité surfacique de charges $+\sigma$

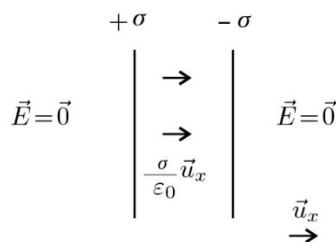
On a vu dans l'exercice sur le condensateur plan que la norme du champ électrostatique créé par un plan infini est $\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$. Comme le champ diverge à partir des charges positives, on en déduit le champ dans les deux régions de l'espace.



Distribution D_2 : armature de charge $-Q$ et de densité surfacique de charges $-\sigma$.



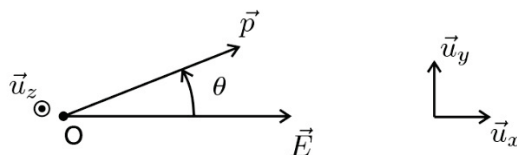
Distribution D (condensateur) : armature n°1 de charge Q , de densité surfacique de charges $+\sigma$ située en $x = 0$ et armature n°2 de charge $-Q$, de densité surfacique de charges $-\sigma$ située en $x = e$.



Le champ électrique est nul à l'extérieur du condensateur.

Dans le condensateur, le champ vaut $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$.

2.



Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

Première méthode : utilisation du moment des forces

Le moment des forces est $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pE \sin \theta \vec{u}_z$.

À l'équilibre, $\vec{\Gamma} = \vec{0}$.

Il y a deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, c'est-à-dire \vec{p} et \vec{E} colinéaires.

Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle du dipôle est : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos \theta$.

L'énergie potentielle est extrême à l'équilibre.

On retrouve bien les deux positions d'équilibre : $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

3. L'équilibre est stable si en écartant le système de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à le ramener vers sa position d'équilibre.

L'équilibre est instable si en écartant le système de sa position d'équilibre, les actions mécaniques ont tendance à l'écartier de sa position d'équilibre.

Il y a deux méthodes pour étudier l'équilibre :

Première méthode : utilisation du moment des forces

- On écarte le dipôle de la position d'équilibre $\theta = 0$.



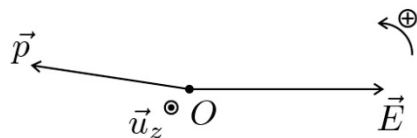
Sur le schéma représenté ci-dessus, $\theta > 0$ et $\Gamma_z < 0$: le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite).

Si on écarte le dipôle dans l'autre sens ($\theta < 0$) de sa position d'équilibre, on montre de la même façon que le couple a tendance à le faire tourner dans le sens trigonométrique et à le ramener vers sa position d'équilibre.

La position $\theta = 0$ est donc un équilibre stable.

Le dipôle va s'aligner dans le même sens que le champ extérieur.

- On écarte le dipôle de la position d'équilibre $\theta = \pi$.



$\Gamma_z < 0$, le couple a tendance à le faire tourner dans le sens horaire (règle de la main droite).

La position $\theta = \pi$ est donc un équilibre instable.

Deuxième méthode : utilisation de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle est égale à $E_p = -pE \cos \theta$.

L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire pour $\theta = 0$.

L'équilibre est instable si l'énergie potentielle est maximale, c'est-à-dire pour $\theta = \pi$.

4. Il y a deux méthodes pour obtenir l'équation différentielle du mouvement.

Première méthode : utilisation du théorème du moment cinétique

On écrit le théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans le référentiel $\mathfrak{R} = (O; \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z, t)$ galiléen :

$$J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_z = -pE \sin \theta$$

On en déduit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \sin \theta = 0$$

Deuxième méthode : raisonnement énergétique

Comme on a un système conservatif à une dimension, l'énergie mécanique se conserve. On obtient directement l'équation différentielle en écrivant que

$$\frac{dE_m}{dt} = 0.$$

L'énergie mécanique est égale à : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}J\omega^2 - pE \cos \theta$.

Comme $\omega = \dot{\theta}$, alors $E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - pE \cos \theta$.

On en déduit : $\frac{dE_m}{dt} = 0 = J\dot{\theta}\ddot{\theta} + pE\dot{\theta} \sin \theta$.

En simplifiant par $\dot{\theta}$, on en déduit :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \sin \theta = 0$$

Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta \ll 1$, on peut effectuer un développement limité de $\sin \theta$ au premier ordre. On a alors :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{J} \theta = 0$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique.

On définit la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{pE}{J}}$.

La solution est de la forme : $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \phi)$ ou de la forme $A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

La deuxième forme est plus pratique à utiliser avec les conditions initiales.

EM45 – Cristal de NaCl soumis à un champ

1. Le moment dipolaire global est nul avant le déplacement. Après le déplacement, la variation du moment dipolaire pour une paire d'ions est : $d\vec{p} = (e\delta_+ - e\delta_-)\vec{u}_x = ex\vec{u}_x$ donc globalement $\vec{P} = Nex\vec{u}_x$.

2. a. À la position d'équilibre, un ion sodium est soumis à deux forces : la force électrique et une autre force f qui l'empêche de s'éloigner d'avantage (force de rappel).

b. La relation d'équilibre projetée sur Ox entraîne :

$$0 = eE + f \Rightarrow f = -eE = -\frac{eP}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}} = -\frac{Ne^2}{\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}x.$$

3. a. La projection de la relation fondamentale de la dynamique en absence de champ pour les deux ions donne :
$$\begin{cases} m_+\ddot{\delta}_+ = -Kx = -K(\delta_+ - \delta_-) \\ m_-\ddot{\delta}_- = Kx = -K(\delta_- - \delta_+) \end{cases}$$

b. La somme des deux équations entraîne $m_+\ddot{\delta}_+ + m_-\ddot{\delta}_- = 0$, ce qui prouve que le mouvement du centre de gravité de l'ensemble est une translation uniforme (ou qu'il est immobile). Pour avoir le mouvement relatif des ions par rapport au centre de gravité, on peut combiner les deux équations en divisant la première par m_+ et en soustrayant la seconde divisée par

m_- , ce qui donne : $\ddot{x} = -\frac{K}{m}x \Rightarrow \ddot{x} + \omega_T^2x = 0$, où $\omega_T = \sqrt{\frac{K}{m}}$ avec $m = \frac{m_+m_-}{m_+ + m_-}$.

Finalement :
$$\omega_T = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0\chi_{\text{ion}}}}.$$

EM46 – Filet d'eau

La tige de plastique est électrisée, et ses charges créent un champ électrostatique dont l'intensité croît lorsque l'on s'approche du matériau chargé. L'eau est constituée de molécules H_2O polaires. Sous l'effet du champ de la tige chargée, ces dipôles s'orientent dans le sens du champ, et sont attirés alors vers les zones de champ plus intense. Le filet d'eau dévie ainsi nettement de la verticale pour se rapprocher de la tige chargée.