EM3 – Exemples de champs électrostatiques

A – Travaux dirigés

EM31 – Faisceau de particules chargées à symétrie cylindrique

1°) A l'intérieur d'un cylindre infini, d'axe z'z, de rayon R, se trouve un faisceau de particules chargées réparties avec une densité volumique de charge ρ. Déterminer le module du champ électrique E(r) en un point intérieur et extérieur au faisceau cylindrique dans les deux hypothèses :

a) $\rho = \rho_0 = constante$ b) $\rho = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$

2°) En déduire le champ $\vec{E}$ créé par un conducteur filiforme infini, uniformément électrisé avec une densité linéique λ.

3°) On considère maintenant le faisceau de particules chargées, réparties uniformément avec une densité volumique de charge ρ_0, entre deux cylindres de même axe z'z et de rayons R_1 et R_2 ($R_2>R_1$). Calculer le champ électrique en un point M à la distance r de l'axe z'z, r variant de 0 à l'infini.

4°) En déduire le champ créé en un point M par un tube cylindrique de rayon R_1, uniformément électrisé avec une densité surfacique σ.

Rép : 1°) a) $\vec{E}(r<R) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{r}$ et $\vec{E}(r>R) = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ b) $\vec{E}(r<R) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}.r\left(1+\frac{r^2}{2R^2}\right)\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{E}(r>R) = \frac{3}{4}.\rho_0\frac{R^2}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ 2°) $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$ 3°) Si $0<r<R1$: $\vec{E}(r) = \vec{0}$, si $R1<r<R2$: $\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right).\overrightarrow{u_r}$ et si $r>R_2$: $\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}.(R_2^2 - R_1^2).\overrightarrow{u_r}$ 4°) $\vec{E}(r<R1) = \vec{0}$ et $\vec{E}(r>R1) = \sigma\frac{R_1}{\varepsilon_0 r}\overrightarrow{u_r}$

EM32 – Energie coulombienne de deux noyaux miroirs

1°) On cherche à déterminer l'énergie de constitution d'une sphère de rayon R et de charge Q uniformément répartie dans son volume. Cette énergie est définie comme le travail qu'il faut fournir pour construire la sphère en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on la construit. On la construit par couches sphériques concentriques successives. On considère qu'on construit la sphère très lentement et que le travail que l'on doit fournir ne sert pas à la modification de l'énergie cinétique des charges, que l'on supposera donc à chaque instant en équilibre sous l'action de l'opérateur qui construit la sphère et de l'interaction électrostatique avec la portion de sphère déjà créée. Établir alors l'expression de cette énergie en fonction de Q, R et ε_0.

2°) On utilise le résultat précédent pour estimer le rayon d'un noyau atomique de nombre de masse A impair ; pour cela, on considère les énergies de liaison B_1 et B_2 des deux noyaux « miroirs » de nombre de masse A et de numéros atomiques respectifs $Z_1 = \frac{A-1}{2}$ et $Z_2 = \frac{A+1}{2}$. On admettra que la charge du noyau est uniformément répartie dans une sphère dont le rayon *R* ne dépend que de *A* et que la contribution de l'interaction forte à l'énergie de liaison est la même pour les deux noyaux « miroirs ». Comparer B_1 et B_2 et exprimer *R* en fonction de A, B_1 et B_2. Calculer *R* pour les noyaux donnés dans le tableau ci-dessous. Commenter.

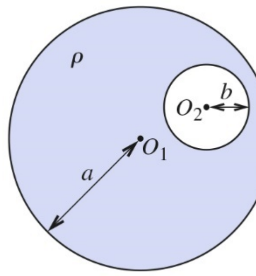
A	Z_1	Noyau 1	B_1 (MeV)	Z_2	Noyau 2	B_2 (MeV)
17	8	$^{17}_{8}O$ (stable)	131,76	9	$^{17}_{9}F$ (instable)	128,22
19	9	$^{19}_{9}F$ (stable)	143,57	10	$^{19}_{10}Ne$ (instable)	139,06
21	10	$^{21}_{10}Ne$ (stable)	162,72	11	$^{21}_{11}Na$ (instable)	157,88
23	11	$^{23}_{11}Na$ (stable)	181,41	12	$^{23}_{12}Mg$ (instable)	176,06
25	12	$^{25}_{12}Mg$ (stable)	199,96	13	$^{25}_{13}Al$ (instable)	194,39

3°) En admettant la loi $R = r_C A^{\frac{1}{3}}$ où $r_C = 1{,}3 fm$, déterminer l'influence relative de l'énergie de constitution sur l'énergie de liaison pour les noyaux $^{17}_{8}O$ et $^{238}_{92}U$; commenter.

On donne l'énergie de liaison du noyau $^{238}_{92}U$: B=1759,4 MeV.

Rép : 1°) $E_p = \frac{\frac{3}{5}Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$ 2°) $R = \frac{\frac{3}{5}e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{A}{B_1 - B_2}$ 3°) L'influence de l'énergie potentielle électrostatique sur l'énergie de liaison croît avec le nombre atomique

EM33 – Champ dans une cavité sphérique



Une boule de rayon a portant la charge volumique uniformément répartie ρ possède une cavité sphérique de rayon b vide de charges. Déterminer le champ dans la cavité.

Rép : $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$

B – Exercices supplémentaires

EM34 – Distribution volumique entre deux plans

On considère une distribution volumique D de charges ρ uniforme, d'extension infinie, comprise entre deux plans $z = -\frac{a}{2}$ et $z = \frac{a}{2}$ dans le référentiel $R = \{0, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\}$.

Calculer le champ électrostatique et le potentiel électrostatique par 3 méthodes : théorème de Gauss, équation de Maxwell-Gauss et équation de Poisson. On prendra V(0) = 0. Étudier le cas particulier où $a \rightarrow 0$.

Rép : $\overrightarrow{E_{int}} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0} sign(z)\,\overrightarrow{u_z}$ $avec\ \sigma = \rho a$

EM35 – Champ créé par une boule

On considère une boule de centre C, de rayon R uniformément chargée de densité volumique de charges ρ.

1°) Exprimer la charge Q de la boule en fonction de ρ et de R.

2°) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3°) Exprimer l'énergie électrostatique de cette sphère en fonction de Q et R.

Rép : 1°) $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ 2°) $\vec{E}(r < R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\,\overrightarrow{u_r}$ et $\vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{u_r}$ 3°) $W_{tot} = \frac{3}{20}\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 r}$

EM36 - Recherche d'une distribution de charges

Le potentiel créé par une distribution de charges a pour expression, en coordonnées sphériques : $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$

1°) Quelles sont les dimensions de Q et de a ?

2°) Déterminer le champ $\vec{E}$ résultant.

3°) Déterminer la distribution de charges associée à ce potentiel.

Rép : 1°) [a]=L et [Q]=AT 2°) $\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.e^{-\frac{r}{a}}.\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right]\overrightarrow{u_r}$ 3°) $\rho(r) = -\frac{Qe^{-\frac{r}{a}}}{4\pi a^2 r} + une\ charge\ Q\ en\ r = 0$

EM37 – Distribution volumique entre deux sphères concentriques

On considère une charge q positive répartie en volume entre deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2. On appelle ρ(r) la densité volumique de charges entre R_1 et R_2. Le champ électrostatique se met sous la forme : $\vec{E} = a(r - R_1)\overrightarrow{u_r}$ pour $R_1 \leq r \leq R_2$ avec a une constante. On donne, pour un champ à symétrie sphérique :

$$div\,\vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + \frac{2E_r}{r}\ avec\ E_r = E(r)\overrightarrow{u_r}$$

1°) Déterminer ρ(r) en fonction de a,r, R_1 et ε_o.

2°) Déterminer a en fonction de q, ε_o, R_1 et R_2.

3°) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace. Représenter graphiquement E_r en fonction de r.

Rép : 1°) $\rho = a\varepsilon_o\left(3 - 2\frac{R_1}{r}\right)$ 2°) $a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2(R_2 - R_1)}$ 3°)…

EM38 - Champ dans une cavité cylindrique

Un cylindre infini d'axe O_1z possédant une charge volumique uniforme ρ, présente une cavité cylindrique infinie (d'axe O_2z avec O_2 différent de O_1) vide de charges. Montrer que le champ électrostatique est uniforme dans la cavité.

Rép : $\vec{E} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{H_1H_2}$

EM39 – Étude d'un champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ E à symétrie cylindrique, défini en coordonnées cylindriques par : $E_r(r \leq r_0) = \frac{E_0 r}{r_0}$, $E_r(r > r_0) = \frac{E_0 r_0}{r}$, $E_\theta = 0$ et $E_z = 0$

a) Déterminer les lignes de champ. Comment varie $\vec{E}$ le long d'une ligne ?

b) Calculer $div\left(\vec{E}\right)$ pour ce ty en tout point. Pour un champ radial en coordonnées cylindriques, quelle loi de dépendance avec r permet d'assurer une divergence nulle ?

c) Exprimer, le flux $\phi = \iint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS}$, où Σ est un cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.

d) Si $\vec{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charges le problème correspond-il ?

e) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

Données : $div\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Rép : a) Les lignes de champ sont des droites « radiales » b) $div\left(\vec{E}\right) = \frac{2E_0}{r_0}$ $si\ r < r_0\ et\ div(E) = 0\ si\ r > r_0$ c) $\phi = 2\pi r\,E(r)$

d) $\rho = \varepsilon_0\,div\left(\vec{E}\right)$ e) $rot\,\vec{E} = \vec{0}$