

EM3 – Exemples de champs électrostatiques

A – Travaux dirigés

EM31 – Faisceau de particules chargées à symétrie cylindrique

1°)

a) Le problème est à symétrie cylindrique d'où : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Donc, on applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r d'axe Oz et de hauteur h tel que :

$$\phi = E \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_{int}}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{u}_r$$

$$\text{Si } r < R : Q_{int} = \rho \pi r^2 h \Rightarrow \vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \vec{r}$$

$$\text{Si } r > R : Q_{int} = \rho \pi R^2 h \Rightarrow \vec{E}(r > R) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$$\text{b) Si } r < R : Q_{int} = \int_0^r \rho d\tau = \int_0^r \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta dz$$

$$\Leftrightarrow Q_{int} = \rho_0 \int_0^r \left(r + \frac{r^3}{R^2}\right) dr * 2\pi h = 2\pi \rho_0 h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \cdot r \left(1 + \frac{r^2}{2R^2}\right) \vec{u}_r$$

$$\text{Et Si } r > R : Q_{int} = \int_0^R \rho d\tau = \int_0^R \rho_0 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) r dr d\theta dz$$

$$\Leftrightarrow Q_{int} = \rho_0 \int_0^R \left(r + \frac{r^3}{R^2}\right) dr * 2\pi h = 2\pi \rho_0 h \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{4R^2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r > R) = \frac{3}{4} \cdot \rho_0 \frac{R^2}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

2°) Le conducteur filiforme est le cas limite précédent où $R \rightarrow 0$ d'où la conservation de la charge s'écrit :

$$\lambda h = \rho_0 \pi R^2 h \Rightarrow \frac{\lambda}{\pi} = \rho_0 R^2 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

3°) En appliquant le théorème de Gauss:

- Si $0 < r < R_1 : \vec{E}(r) = \vec{0}$
- Si $R_1 < r < R_2 : \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r}\right) \cdot \vec{u}_r$
- Si $r > R_2 : \vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 r} \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \vec{u}_r$

4°) Cette fois : $\rho_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) h = \sigma 2\pi R_1 h \Rightarrow \rho_0 (R_2^2 - R_1^2) = 2\sigma R_1 \Rightarrow \vec{E}(r < R_1) = \vec{0}$ et $\vec{E}(r > R_1) = \sigma \frac{R_1}{\epsilon_0 r} \vec{u}_r$

EM32 – Energie coulombienne de deux noyaux miroirs

1°) La sphère de rayon r a déjà été construite, elle porte la charge $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, l'opérateur va amener la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ (couronne sphérique concentrique) de l'infini à r . Par conséquent : $\delta W_{op} = dq (V(r) - V(\infty))$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = dq \left(\rho \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r} - 0 \right) = \rho 4\pi r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} \Rightarrow \delta W_{op} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4$$

Pour obtenir la sphère de rayon R , on intègre cette expression pour r variant de 0 à R , il vient :

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \frac{R^5}{5}$$

$$\text{Or : } Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho^2 = \frac{9}{16\pi^2 R^6} Q^2$$

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \times \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \times \frac{R^5}{5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}$$

L'énergie électrostatique de constitution d'un noyau atomique est égale à :

$$E_{noyau} = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} > 0$$

2. On applique le résultat précédent avec $Q = Z_1 e$ ou $Z_2 e$. On en déduit :

$$B_2 - B_1 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} (Z_2^2 - Z_1^2)$$

d'où

$$R = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z_2^2 - Z_1^2)}{B_2 - B_1} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{A}{B_2 - B_1}.$$

Les valeurs de R calculées à partir de l'expression précédente sont données dans le tableau ci-dessous.

A	17	19	21	23	25
$R (10^{-15} \text{ m})$	4,1	3,6	3,7	3,7	3,9

L'énergie électrostatique du noyau 2 est plus forte que celle du noyau 1, ce qui diminue son énergie de liaison.

$$\mathbf{3.} E_{pe} = \frac{3}{5} \frac{e^2 Z^2}{4\pi\epsilon_0 r_C A^{1/3}} \text{ en joules et } E_{pe} = \frac{3 \times 10^{-6}}{5} \frac{eZ^2}{4\pi\epsilon_0 r_C A^{1/3}} \text{ en MeV.}$$

Avec $r_C = 1,3 \times 10^{-15} \text{ m}$, on obtient pour l'oxygène, $E_p = 16,5 \text{ MeV}$ (13% de B_1) et pour l'uranium, $E_p = 907,7 \text{ MeV}$ (52% de B_1). L'influence de l'énergie potentielle électrostatique sur l'énergie de liaison croît avec le nombre atomique.

EM33 – Champ dans une cavité sphérique

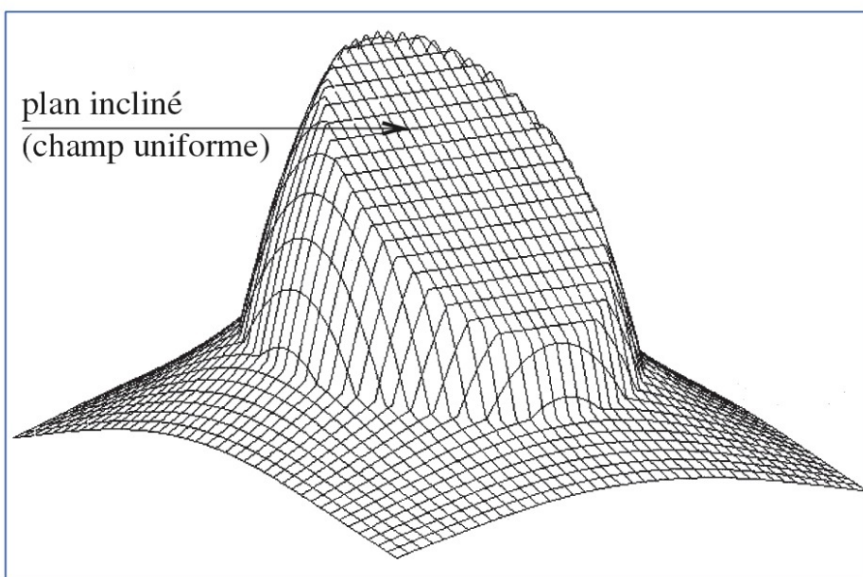
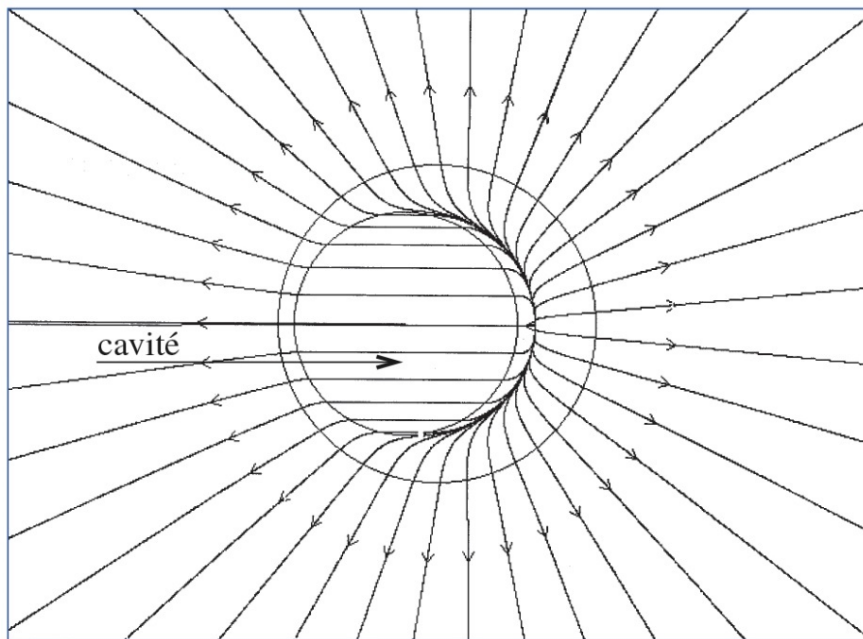
Cette distribution correspond à la superposition de deux distributions $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

$\mathcal{D}_1$ correspondant à une charge volumique ρ uniformément répartie dans la sphère de centre O_1 et de rayon a , et $\mathcal{D}_2$ à une charge volumique $-\rho$ dans la sphère de centre O_2 et de rayon b . Dans la cavité, donc à l'intérieur de ces deux sphères, $\mathcal{D}_1$ crée le

$$\text{champ } \vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1M} \text{ et } \mathcal{D}_2 \text{ le champ } \vec{E}_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2M}.$$

Le champ total dans la cavité est donc égal à $\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1O_2}$.

Il est uniforme dans la cavité.



Les simulations ci-dessus montrent le tracé des lignes de champ et des équipotentielles du système de charges, ainsi que les variations du potentiel : le champ est bien uniforme à l'intérieur de la cavité.

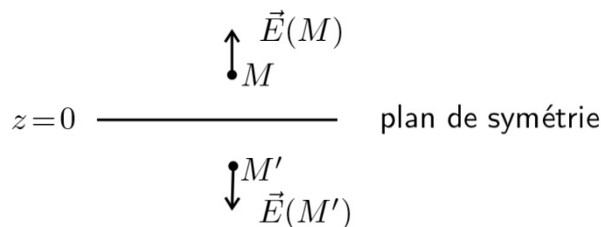
B – Exercices supplémentaires

EM34 – Distribution volumique entre deux plans

Structure du champ et du potentiel

- Les plans $P = (M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $Q = (M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ électrostatique, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E}/\vec{u}_z$.
- La distribution D de charge est invariante par translation suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, donc $\vec{E}$ et V aussi. Les coordonnées du champ ne dépendent pas de x et y . Le potentiel ne dépend pas x et y . Bilan :
 $\vec{E} = E(z) \vec{u}_z$ et $V = V(z)$.

Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie.



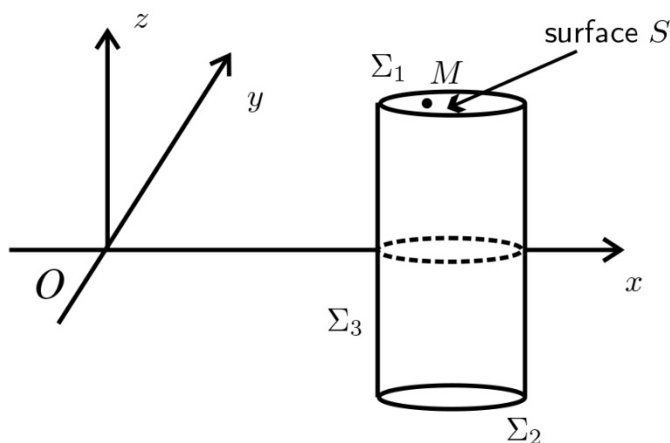
Le champ en M' est le symétrique du champ en M par rapport au plan $z = 0$, d'où :

$$\vec{E}(M') = \text{sym}(\vec{E}(M)) = -E(z) \vec{u}_z \text{ et } V(M') = V(M)$$

Soit un point M appartenant au plan $z = 0$. Les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$, $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont des plans de symétrie, donc $\vec{E}(M)$ appartient à leur intersection, donc $\vec{E} = \vec{0}$ pour $z = 0$.

1. Première méthode : Utilisation du théorème de Gauss

Calcul du champ avec le théorème de Gauss :



On considère un point M dans la région $z > 0$. La surface de Gauss est un cylindre passant par M représenté sur la figure ci-dessus. Le théorème de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{1ext} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{2ext} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{3ext}$$

Le flux à travers la surface latérale Σ_3 est nul car le champ est orthogonal au vecteur élément de surface orienté vers l'extérieur. On a donc :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} (-E(z)) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

On a donc : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z)S$.

Il y a plusieurs cas pour calculer la charge intérieure :

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho a S$, on a donc $E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho 2z S$, on a donc $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.

On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, alors $E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.

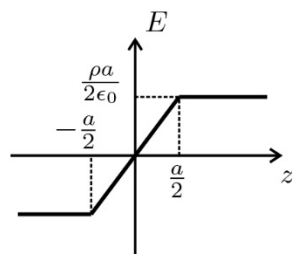
On a donc : $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = 2E(z)S$.

Il y a plusieurs cas pour calculer la charge intérieure :

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho a S$, on a donc $E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, $Q_{int} = \rho 2z S$, on a donc $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.

On en déduit le champ dans la région $z < 0$ par symétrie :

- Si $z \leq -\frac{a}{2}$, alors $E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq 0$, alors $E = -\frac{\rho |z|}{\varepsilon_0} = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.



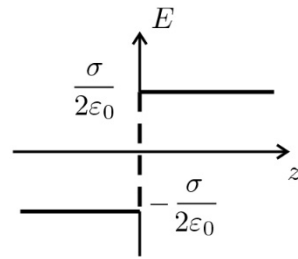
Si l'épaisseur a tend vers 0, on peut considérer la distribution comme surfacique. On peut définir une densité surfacique de charges σ .

- Distribution surfacique : on considère une charge située en $z = 0$ et de surface S . La charge est $Q = \sigma S$.
- Distribution volumique : on considère une charge située dans un volume de surface S et de hauteur a . La charge est $Q = \rho S a$.

Les deux charges doivent être égales. On a donc :

$$\sigma = \rho a$$

On retrouve bien le champ créé par un plan infini avec une discontinuité en $z = 0$.



Calcul du potentiel :

La distribution est infinie. On ne peut pas choisir : $V(\infty) = 0$. On choisit d'après l'énoncé $V(0) = 0$.

Comme la distribution est volumique, le potentiel est continu en tout point de l'espace.

On a vu que le potentiel est une fonction paire de z . Il suffit de le calculer dans la région $z \geq 0$.

On utilise la relation : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ pour calculer le potentiel.

On considère un déplacement quelconque du point M :

$$d\vec{l} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

On a donc :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E(z)\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = -E(z)dz$$

- Si $0 \leq z \leq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho z}{\epsilon_0}dz$. On intègre entre 0 et z : $V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ puisque $V(0) = 0$. Le potentiel vaut en $z = \frac{a}{2}$:

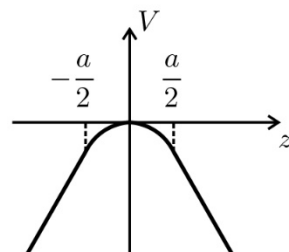
$$V\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$$

- Si $z \geq \frac{a}{2}$, alors $dV = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}dz$. On intègre entre $\frac{a}{2}$ et z :

$$V - \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

$$\text{D'où : } V = \left(-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}\right) - \frac{\rho a}{2\epsilon_0}\left(z - \frac{a}{2}\right)$$

On en déduit le graphe représentant V en fonction de z :



2. Deuxième méthode : Équation de Maxwell-Gauss

On a vu que le champ électrique ne dépend que de z .

L'équation de Maxwell-Gauss est :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{dE}{dz}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, donc $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} + cte$. On a vu que $E = 0$ pour $z = 0$. Soit $E = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$.
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$ (localement il n'y a pas de charge), donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = \frac{a}{2}$ puisqu'on a une distribution volumique, donc $E = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz} = 0$, donc $E = cte$. Le champ est continu pour $z = -\frac{a}{2}$, donc $E = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

3. Troisième méthode : Équation de Poisson

L'équation de Poisson est :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} V$$

Soit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

On a vu que le champ et le potentiel sont nuls pour $z = 0$. Comme le potentiel ne dépend que de z , l'équation de Poisson s'écrit :

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Si $-\frac{a}{2} \leq z \leq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, donc $\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}z + A$ et $V = -\frac{\rho}{2\epsilon_0}z^2 + Az + B$. Le champ électrostatique est $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dz}\vec{u}_z$. On a : $E = -\frac{dV}{dz} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} - A$.
Or $V = 0$ et $E = 0$ pour $z = 0$. On a donc : $A = 0$ et $B = 0$. On obtient finalement : $E = \frac{\rho z}{\epsilon_0}$
- Si $z \geq \frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A'z + B'$ et $E = -A'$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = \frac{a}{2}$. On a donc $A' = -\frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} = A' \left(\frac{a}{2}\right) + B'$, d'où $B' = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$.
- Si $z \leq -\frac{a}{2}$: $\frac{d^2V}{dz^2} = 0$. On a donc $V = A''z + B''$ et $E = -A''$. Le champ et le potentiel sont continus pour $z = -\frac{a}{2}$. On a donc $A'' = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}$ et $-\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} = A'' \left(-\frac{a}{2}\right) + B''$, d'où $B'' = -\frac{\rho a^2}{8\epsilon_0} + \frac{\rho a^2}{4\epsilon_0} = \frac{\rho a^2}{8\epsilon_0}$.

On retrouve les mêmes résultats qu'avec la méthode 1.

EM35 – Champ créé par une boule

1. La densité volumique de charges est uniforme, la charge totale vaut donc : $Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$.

2. Calcul du champ électrostatique en trois étapes :

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotations d'angle θ et ϕ , donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : sphère passant par M et de rayon r .

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \oiint_{\Sigma} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2$$

Il y a deux cas :

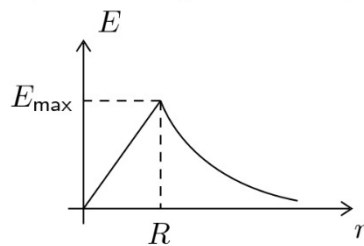
Si M est à l'extérieur de la sphère ($r \geq R$) :

$$dq = \rho d\tau, \text{ donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = Q. \text{ On a donc : } \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Si M est à l'intérieur de la sphère ($r \leq R$) :

$$Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3, \text{ donc}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\frac{3Q}{4\pi R^3} r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{u}_r$$



Le champ est maximal pour $r = R$ et vaut : $E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

Interprétation physique :

Si $r \geq R$, le champ est le même que celui créé par une charge ponctuelle Q situé au point O .

Le potentiel et le champ sont continus en tout point de l'espace. C'est normal car on a une distribution volumique.

Le champ diverge à partir des charges positives. Il est normal aux surfaces équipotentiellles et dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

Les surfaces équipotentiellles sont des sphères de centre O . Les lignes de champ sont des droites qui divergent à partir de O si $Q > 0$. Les lignes de champ sont des droites qui convergent vers O si $Q < 0$.

3. La densité volumique d'énergie électrostatique est $u_{el} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

Il y a deux cas :

Si $r \leq R$:

Le champ électrostatique est : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{u}_r = E_{\max} \frac{r}{R} \vec{u}_r$. On a alors :

$$\begin{aligned} W_1 &= \iiint \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{\max} \frac{r}{R} \right)^2 dr r d\theta r \sin \theta d\phi = \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{4\pi}{R^2} \int_{r=0}^R r^4 dr \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{4\pi}{R^2} \frac{R^5}{5} \end{aligned}$$

D'où :

$$W_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0 R^3}{5} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2$$

Si $r \geq R$:

Le champ électrostatique est : $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r = E_{\max} \frac{R^2}{r^2} \vec{u}_r$. On a alors :

$$\begin{aligned} W_2 &= \iiint \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{\max} \frac{R^2}{r^2} \right)^2 dr r d\theta r \sin \theta d\phi \\ W_2 &= \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} 4\pi R^4 \int_{r=R}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\varepsilon_0 E_{\max}^2}{2} 4\pi R^4 \frac{1}{R} = 2\pi\varepsilon_0 E_{\max}^2 R^3 \end{aligned}$$

D'où :

$$W_2 = 2\pi\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 R^3$$

$$\text{Bilan : } W = W_1 + W_2 = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{8} \right) = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \frac{6}{40}, \text{ d'où :}$$

$$W = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R} \frac{3}{20}.$$

EM36 - Recherche d'une distribution de charges

1) Une exponentielle, ainsi que son argument, sont des grandeurs sans dimension.

a est donc une longueur.

On sait par ailleurs que $\frac{\text{charge}}{\epsilon_0 \times \text{distance}}$ est homogène à un potentiel. Q est donc une charge électrique.

2) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$; en coordonnées sphériques, on en déduit $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, avec :

$$E(r) = -\frac{dV}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}.$$

3) Le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère de rayon r est donc :

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}.$$

D'après le théorème de Gauss, $Q(r) = \epsilon_0 \Phi(r)$, si $Q(r)$ est la charge contenue dans la sphère de rayon r .

On en déduit $Q(r) = Q \left(1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}.$

- $Q(0) = Q$: il y a donc une charge ponctuelle Q à l'origine des coordonnées.
- $Q \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$: la charge totale est donc nulle.
- Chaque pellicule sphérique d'épaisseur dr a une charge $dQ = \rho(r) 4\pi r^2 dr$, si $\rho(r)$ est la densité volumique de charge. On peut donc calculer $\rho(r)$ pour $r > 0$:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ}{dr} ; \text{ soit } \rho(r) = -\frac{Q}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

EM37 – Distribution volumique entre deux sphères concentriques

1. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Comme $\vec{E} = a(r - R_1) \vec{u}_r$, alors :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_r}{dr} + 2 \frac{E_r}{r} = a + \frac{2a(r - R_1)}{r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

On en déduit : $\rho = \varepsilon_0 \left(a + 2a - \frac{2aR_1}{r} \right)$, soit : $\rho = a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right)$

2. On connaît la charge totale q . On peut l'exprimer en fonction de a en utilisant ρ .

$$q = \iiint_{\text{distribution}} \rho d\tau = \int_{r=R_1}^{R_2} \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_{r=R_1}^{R_2} a\varepsilon_0 \left(3 - 2\frac{R_1}{r} \right) 4\pi r^2 dr$$

On a alors : $q = 4\pi\varepsilon_0 a [r^3 - R_1 r^2]_{R_1}^{R_2} = 4\pi\varepsilon_0 a (R_2^3 - R_1 R_2^2 - R_1^3 + R_1^3)$

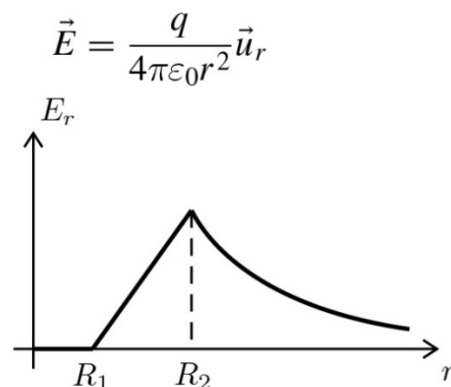
$$\text{Finalement, on a : } a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2 (R_2 - R_1)}$$

3.

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi)$ sont des plans de symétrie des sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et ϕ , donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et ϕ . Bilan : $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à une sphère de centre O et de rayon r s'écrit : $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \iint_S E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

Si $r \leq R_1$, $Q_{int} = 0$, donc $\vec{E} = \vec{0}$.

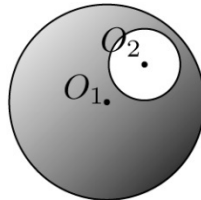
Si $r \geq R_2$, $Q_{int} = q$. Tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle. Le champ vaut alors :



EM38 - Champ dans une cavité cylindrique

a) La distribution D est la superposition de la distribution D_1 et de la distribution D_2 .

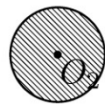
Distribution D : Cylindre infini de densité volumique de charges ρ avec une cavité cylindrique infinie.



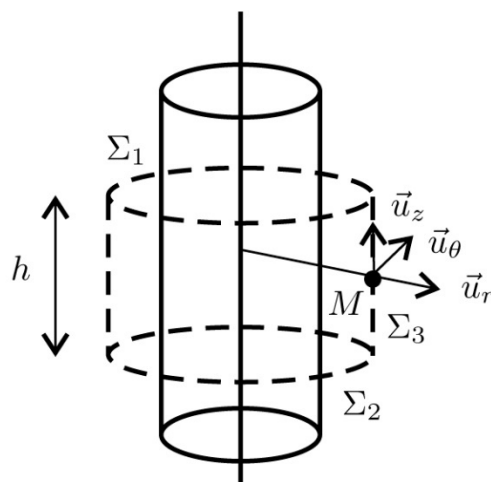
Distribution D_1 : Cylindre illimité d'axe O_1z de rayon R_1 de densité volumique de charges ρ .



Distribution D_2 : Cylindre illimité d'axe O_2z de rayon R_2 de densité volumique de charges $-\rho$.



b) Calcul du champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon R uniformément chargé en volume. On appelle ρ la densité volumique de charges.



Calcul du champ électrostatique en trois étapes :

- Les plans $P = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $Q = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour les charges, sources du champ, donc $\vec{E}(M) \in (P \cap Q)$, soit $\vec{E} // \vec{u}_r$.
- La distribution D de charges est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant $\vec{u}_z$, donc $\vec{E}$ aussi. Ses coordonnées ne dépendent pas de θ et z . Bilan :

$$\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$$

- Théorème de Gauss appliqué à la surface fermée (Σ) : cylindre de hauteur h passant par M et de rayon r .

Le flux du champ électrostatique à travers Σ_1 et Σ_2 est nul car les vecteurs éléments de surface sont orthogonaux au champ électrostatique.

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{\Sigma_3} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = E(r) 2\pi r h$$

D'après l'exercice, le point M se situe à l'intérieur de la cavité. On a donc $r \leq R$, soit $Q_{int} = \rho \pi r^2 h$.

Le champ électrostatique est donc :

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

Pour chaque cylindre, on a une origine différente pour les coordonnées cylindriques.

c) Pour le cylindre de centre O_1 , on définit H_1 le projeté orthogonal de M sur l'axe $O_1 z$. On a : $\overrightarrow{H_1 M} = r_1 \vec{u}_{r1}$, donc :

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho r_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_{r1} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_1 M}$$

Pour le cylindre de centre O_2 , on définit de même H_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe $O_2 z$. Il suffit de remplacer H_1 par H_2 et ρ par $-\rho$, soit :

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_2 M}$$

$$\text{Donc : } \vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \overrightarrow{H_1 H_2}$$

EM39 – Étude d'un champ électrique à distribution cylindrique

La surface définie par $r = r_0$ est un cylindre ; la définition du champ est donc différente selon que l'on se place à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre.

a) En tout point le champ est radial, les lignes de champ sont donc des demi-droites orthogonales à l'axe Oz (Fig. 17). À l'intérieur du cylindre défini ci-dessus, le champ croît linéairement avec la distance à l'axe, puis il décroît de façon hyperbolique.

b) Le calcul de la divergence du champ doit être mené en coordonnées cylindriques à l'aide du formulaire dans lequel on ne retient que le terme

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r}, \text{ les autres étant nuls.}$$

Pour $r < r_0$, $\boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = 2 \frac{E_0}{r_0}} \text{ constante.}$

En revanche, si $r > r_0$ $\boxed{\operatorname{div}(\vec{E}) = 0}$. Ainsi, le fait de rencontrer un champ radial dont la valeur varie avec r n'entraîne pas nécessairement l'existence d'une divergence : si la variation est en $1/r$ la divergence s'annule.

c) Une des méthodes consiste à compléter la surface pour obtenir une surface fermée. On peut donc adjoindre deux disques orthogonaux à l'axe Oz servant à fermer le cylindre (couvercles). Le flux à travers ces disques est nul car le champ est radial et la normale colinéaire à Oz ; le flux cherché s'identifie donc au flux sortant de cette surface fermée, c'est aussi l'intégrale de volume de la divergence. Si le rayon de Σ est inférieur à r_0 , cette intégrale vaut

$$2 \frac{E_0}{r_0} \pi r^2 h ; \text{ mais si le rayon } r \text{ excède } r_0, \text{ il ne faut intégrer que sur la portion pour laquelle la divergence n'est pas nulle, c'est-à-dire le cylindre de rayon } r_0. \text{ L'intégrale est alors } 2 \frac{E_0}{r_0} \pi r_0^2 h = 2 E_0 \pi r_0 h.$$

L'autre méthode consiste en un calcul direct du flux. En tout point de la surface, le champ est colinéaire à l'élément $\vec{dS}$ et d'autre part la valeur $E(r)$ est constante sur la surface du cylindre. On déduit : $\Phi = E(r) \iint_{\Sigma} dS = 2\pi r h E(r)$.

En remplaçant $E(r)$ par sa valeur dans chaque domaine, on retrouve les expressions précédentes.

d) Cet exercice vise bien entendu à une familiarisation avec l'utilisation du théorème d'Ostrogradski ; mais il apparaît que cette situation n'est pas sans signification physique : la divergence renseigne sur l'existence d'une densité

volumique de charge en vertu de l'équation de Maxwell-Gauss : $\boxed{\rho = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}}$. La configuration étudiée est celle d'une distribution uniforme des charges dans un cylindre.

e) En utilisant une nouvelle fois le formulaire en coordonnées cylindriques, il apparaît que le rotationnel de ce champ radial est nul en tout point (il ne fait intervenir que des dérivées de E_r par rapport aux coordonnées θ et z).

