

EM3 – Exemples de champs électrostatiques

5.2.2 Exemples de champs électrostatiques		
Plan infini uniformément chargé en surface.	Établir l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé en surface.	Partie qui sort souvent aux oraux des concours.
Condensateur plan. Capacité. Densité volumique d'énergie électrostatique.	Établir l'expression du champ créé par un condensateur plan. Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur plan. Citer l'ordre de grandeur du champ disruptif dans l'air. Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan à partir de celle de l'énergie du condensateur.	Le théorème de Gauss mal appliqué est fortement sanctionné au concours.
Énergie de constitution d'un noyau atomique modélisé par une boule uniformément chargée.	Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.	
5.2.3 Analogies avec le champ gravitationnel		
Analogies entre champ électrostatique et champ gravitationnel.	Utiliser les analogies entre les forces électrostatique et gravitationnelle pour déterminer l'expression de champs gravitationnels.	Il faut autant savoir l'appliquer que celui sur l'électrostatique.

I – Méthodes de calcul du champ \vec{E}

I-1) Les différentes méthodes

Les méthodes de calcul de champ à notre programme sont les suivantes :

- Calcul direct : on effectue le calcul du champ et du potentiel à partir de la loi de Coulomb. Utile des distributions discrètes.
- Théorème de Gauss : si l'étude des symétries nous permet de connaître a priori la direction \vec{E} et de quelle(s) variable(s) il dépend, un choix judicieux d'une surface fermée à travers laquelle on peut facilement exprimer le flux de \vec{E} nous permettra d'utiliser le théorème de Gauss pour déterminer \vec{E} . On en déduira V .
- Résolution de l'équation de Maxwell-Gauss : si nous connaissons l'expression de la divergence ; la résolution directe de l'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ peut se révéler dans certains cas la méthode la plus simple.

- Résolution de l'équation de Poisson : quand ce sera nécessaire, l'expression du laplacien scalaire sera fournie et l'on obtiendra V puis \vec{E} .

I-2) Etude des symétries et invariances

- Dans tous les cas, l'étude préalable des invariances et des symétries de la distribution et de leurs conséquences sur le champ et le potentiel est indispensable. Elle nous permet de connaître la direction \vec{E} et de quelle(s) variable(s) il dépend.
- La surface de Gauss est choisie pour que le calcul du flux à travers elle soit immédiat. On choisira donc une surface composée de surfaces ou bien tangentes au champ ou bien perpendiculaires au champ et telles que le champ électrostatique soit uniforme sur ces surfaces. Ainsi on aura :

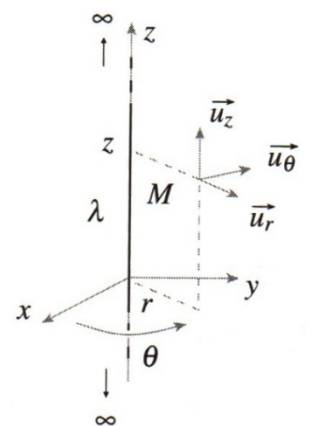
$$\text{Soit } \phi = 0, \text{ soit } \phi = \pm ES$$

- La surface de Gauss, et les plans de symétrie ou d'antisymétrie doivent contenir le point où on cherche à calculer le champ. **(On ne prendra pas de points particuliers pour calculer le champ)**

I-3) Exemple : Distribution cylindrique

a) Fil infini

La distribution de charges, source du champ électrostatique est un fil infini chargé uniformément. On note λ la densité linéique de charge.



- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cylindrique est le mieux adapté à la situation.

Les coordonnées cylindriques d'un point M de l'espace sont (r, θ, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges, donc le champ électrique en M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

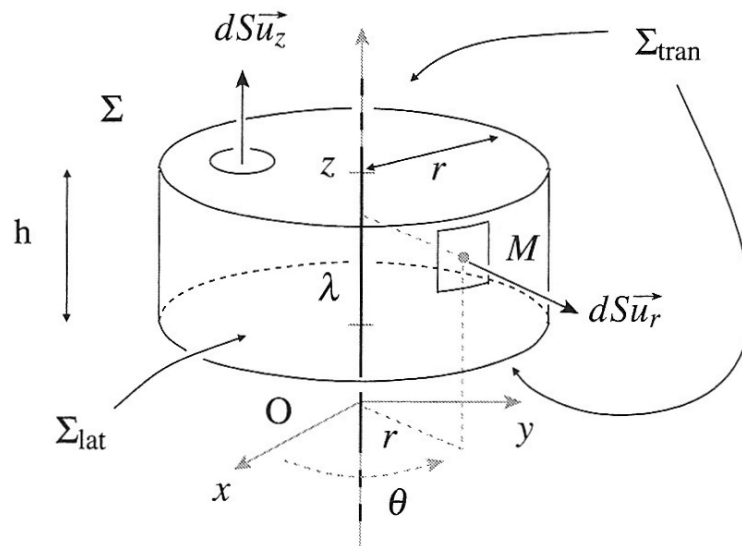
- Étude des invariances

La distribution est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) et translation selon (Oz), donc le champ électrique ne dépend que de r en valeur :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$$

De même le potentiel V ne dépend que de r, $V(M) = V(r)$.

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème



On construit la surface de Gauss en limitant le cylindre d'axe (Oz) à un tronçon de hauteur h , sa surface latérale Σ_{lat} réunie avec les deux surfaces transversales Σ_{tran} qui sont les disques de rayon r d'axe (Oz) constituent une surface fermée, qui convient comme surface de Gauss Σ . Le flux de \vec{E} sortant des surface transversales est nul puisque leur normale est selon \vec{u}_z ; et le champ est partout radial.

Le théorème de Gauss mène à :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_{tran}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_{lat}} E(r) \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

- Calcul du potentiel électrostatique

On calcule le potentiel électrostatique $V(r)$ en intégrant :

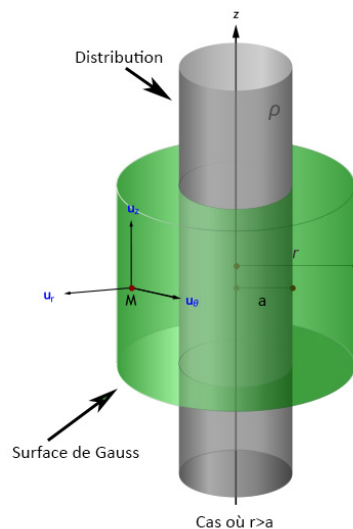
$$dV = -E dr \Rightarrow V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln(r) + K$$

K est la constante d'intégration. Finalement :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \text{ avec } V(r_0) = 0$$

Le potentiel n'est pas défini en $r = 0$ ni en $r \rightarrow \infty$.

- b) Cylindre infini chargé volumiquement



La symétrie étant la même on se retrouve avec :

$$E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Or:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } r < a : Q_{int} = \iiint_{V_{Gauss}} \rho_0 d\tau = \rho_0 \pi r^2 h \\ \text{si } r > a : Q_{int} = \iiint_{V_{Gauss}} \rho_0 d\tau = \iiint_{V_{Distri}} \rho_0 d\tau = \rho_0 \pi a^2 h \end{array} \right.$$

Par conséquent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < a) = \frac{\rho_0 \pi r^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r > a) = \frac{\rho_0 \pi a^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} \vec{u}_r = \frac{\rho_0 a^2}{2\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

On remarque que le champ est à la fois défini dans tout l'espace mais aussi continu.

c) Cylindre infini chargé surfaciquement

La symétrie étant la même on se retrouve avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \text{si } r < a : Q_{int} = 0 \\ \text{si } r > a : Q_{int} = Q_0 = \sigma 2\pi a h \end{array} \right.$$

Par conséquent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r < a) = \vec{0} \\ \vec{E}(r > a) = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{\sigma 2\pi a h}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

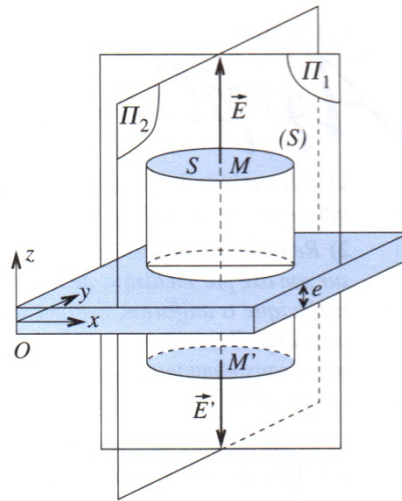
Comme prévu le champ n'est pas défini sur la distribution, mais on observe une discontinuité :

$$\vec{E}(a^+) - \vec{E}(a^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

II - Champ électrostatique créé par un plan chargé

II-1) Distribution volumique

a) Théorème de Gauss



- Choix d'un repérage adapté

Ici le repérage cartésien est le mieux adapté. Les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace sont (x, y, z)

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans contenant la droite (M, \vec{u}_z) sont des plans de symétrie de la distribution de charge, donc le champ électrique en M est dirigé selon \vec{u}_z et s'écrit : $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_z$

- Étude des invariances

La distribution de charges est invariante par toute translation selon (Ox) et selon (Oy) , donc la valeur du champ électrique ne dépend que de z : $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

On construit la surface de Gauss en réunissant une portion Σ_1 de Σ' d'aire S, autour du point M, avec la surface Σ_2 , d'aire S, autour du point M' symétrique de M par rapport à la distribution de charges, car le champ électrique est le symétrique du champ en M, et on ferme la surface par la

surface latérale.

Le flux du champ électrique à travers Σ_{lat} est nul, car le champ électrique est perpendiculaire à la normale à la surface en tout point.

On applique le théorème de Gauss :

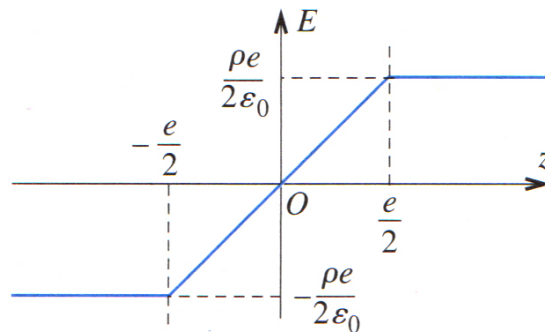
$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \iint_{\Sigma_{\text{lat}}} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_r + \iint_{\Sigma_1} E(z) \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z + \iint_{\Sigma_2} E(-z) \vec{u}_z \cdot dS (-\vec{u}_z)$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow 2E(z)S_0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{cases} \text{Si } |z| > \frac{e}{2}: Q_{\text{int}} = \rho e S_0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z \\ \text{Si } |z| < \frac{e}{2}: Q_{\text{int}} = \rho(2z)S_0 \Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$



b) Equation de Maxwell-Gauss

Soit :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Vu les symétries et invariances du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \text{ si } |z| > \frac{e}{2} \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ si } |z| < \frac{e}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{z > e/2} = A \text{ et } E_{z < -e/2} = C \\ E = \frac{\rho z}{\epsilon_0} + B \text{ si } |z| < \frac{e}{2} \end{cases}$$

Le plan (xOy) étant un plan de symétrie :

$$E(z) = -E(-z) \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = -C \end{cases}$$

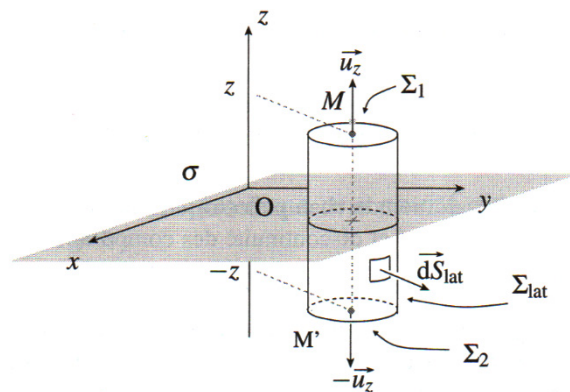
La distribution étant volumique le champ E est continu d'où

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{en } z = \frac{e}{2} : \frac{\rho e}{\varepsilon_0 2} = A \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \left(-\frac{e}{2}\right) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } |z| > \frac{e}{2} : \vec{E}(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z \\ \text{Si } |z| < \frac{e}{2} : \vec{E}(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

II-2) Distribution surfacique

a) Calcul du champ

La distribution de charges source du champ électrostatique est le plan (0,x,y) chargé uniformément avec une densité surfacique de charges σ .



Les symétries et invariances restent inchangées, on applique le théorème de Gauss :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow 2E(z)S_0 = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0} \\ \Leftrightarrow \vec{E} &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z \end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat à partir du calcul précédent :

$$Q_{\text{int,surfacique}} = \sigma S_0 \text{ et } Q_{\text{int,volumique}} = \rho e S_0$$

$$\Rightarrow \sigma = \rho e \text{ si } e \rightarrow 0$$

Donc :

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z \text{ devient :}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) \vec{u}_z \text{ si } e \rightarrow 0$$

b) Calcul du potentiel

$$\text{On a } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Leftrightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{sign}(z) = -\frac{dV}{dz}$$

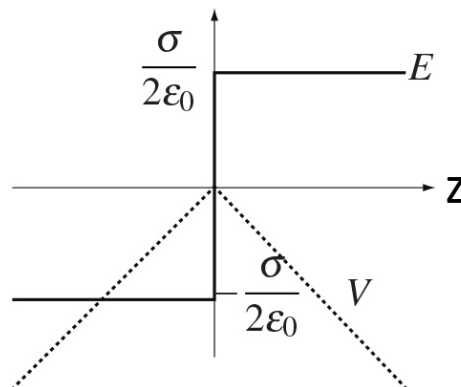
$$\Rightarrow \begin{cases} V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + A' \\ V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + A'' \end{cases}$$

La continuité de V en $z=0$ impose $A' = A'' = 0$

D'où :

$$\begin{cases} V(z < 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \\ V(z > 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \end{cases}$$

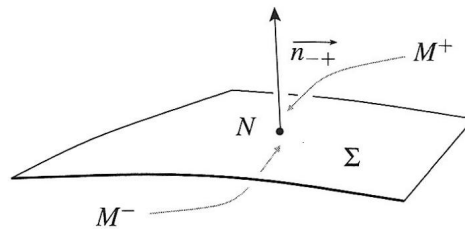
c) Discontinuité de E



On constate que le champ électrique est discontinu au passage de la surface chargée :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

Cette propriété établie pour un plan chargé est valable pour toute surface chargée.



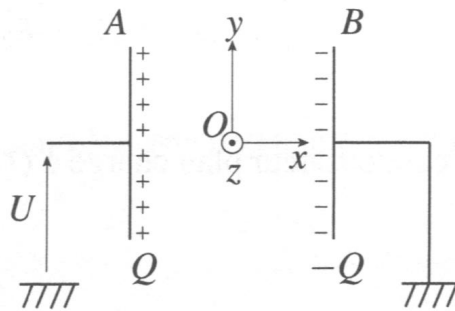
A la traversée d'une distribution surfacique on a :

$$\vec{E}(M^+) - \vec{E}(M^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{-+}$$

\Rightarrow Continuité de la composante tangentielle de E et discontinuité de la composante normale

II-3) Le condensateur plan

a) Champ électrique



Les paramètres géométriques du condensateur sont sa surface S et la distance e entre ses armatures. On impose à ses bornes une différence de potentiel $U = V_A - V_B$, on note Q la charge portée par l'armature A.

Pour faire cette étude, on modélise le condensateur comme un ensemble de deux plans A et B distants de e et portant respectivement les densités surfaciques de charges $\sigma = \frac{Q}{S}$ pour A et $-\sigma$ pour B. Cette modélisation revient à négliger les effets de bord.

- Symétries et invariances :

Les plans $\Pi(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $\Pi'(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont plans de symétrie pour la distribution de charge du condensateur d'extension finie ; si on néglige les effets de bords. On en déduit qu'en tout point M où le champ est défini, le champ est porté par \vec{u}_x :

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{u}_x$$

De plus, en considérant les armatures comme des plans infinis, la distribution de charge est invariante par translation selon \vec{u}_y et \vec{u}_z , on en déduit :

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{u}_x$$

- Calcul de \vec{E}

En dehors des armatures, l'espace entre les armatures est vide de charge, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

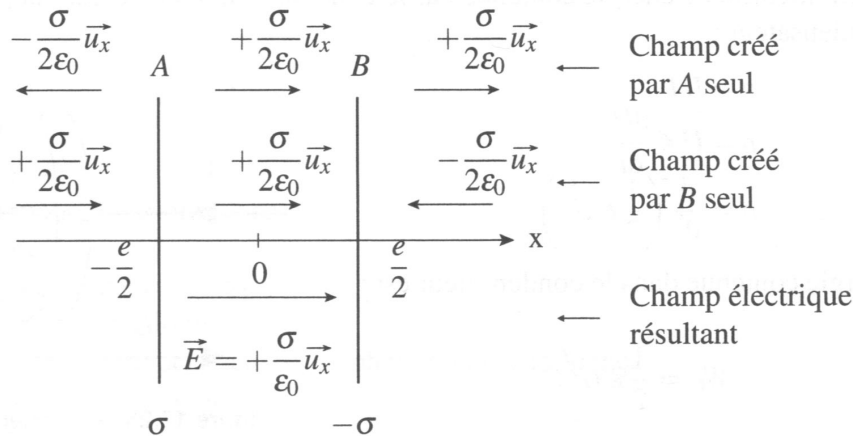
$$\text{div } \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dE}{dx} = 0$$

On en déduit que dans chacune des trois zones : $x < -\frac{e}{2}$, $-\frac{e}{2} < x < \frac{e}{2}$ et $x > \frac{e}{2}$ le champ électrique est uniforme et vaut respectivement : E_-, E_0, E_+ .

Pour déterminer E_-, E_0, E_+ , on applique un raisonnement par superposition, en utilisant les résultats établis sur le plan chargé uniformément. Ainsi chaque plan A et B, contribue de la façon suivante :

$$A \begin{cases} \vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x > -\frac{e}{2} \\ \vec{E}_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x < -\frac{e}{2} \end{cases}, \quad B \begin{cases} \vec{E}_B = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x > \frac{e}{2} \\ \vec{E}_B = -\frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ si } x < \frac{e}{2} \end{cases}$$

On construit le champ total par superposition :



Finalement, on en déduit : $E_- = E_+ = 0$ et $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Un condensateur plan chargé à Q crée :

- A l'intérieur des armatures, un champ électrique uniforme $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{Q \rightarrow -Q}$
- A l'extérieur des armatures un champ nul.

b) Le potentiel :

On établit la relation entre la valeur du champ électrique et la tension U entre ses bornes, en calculant la circulation du champ électrique d'une armature à l'autre :

$$\begin{aligned}
 U &= V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot dx \vec{u}_x \\
 \Rightarrow U &= \int_A^B \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dx \\
 \Rightarrow U &= E_0 e \frac{\sigma}{\epsilon_0}
 \end{aligned}$$

c) Capacité

La capacité C du condensateur plan, qui porte la charges Q lorsqu'il est soumis à la différence de potentiels U est définie par :

$$C = \frac{Q}{U}$$

Le condensateur plan a une capacité :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{E_0 e} = \frac{E_0 \epsilon_0 S}{E_0 e}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

En insérant un matériau isolant entre les armatures d'un condensateur, on augmente sa capacité. Le matériau isolant, nommé diélectrique, est caractérisé par un coefficient noté ϵ_r sans dimension, appelé permittivité relative.

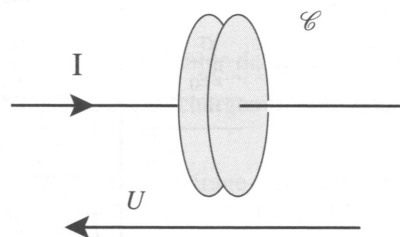
$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$$

Quelques valeurs de ϵ_r :

Matériau	Paraffine	Porcelaine	Bakélite	Plexiglas	Air (sec)
ϵ_r	2,2	5 à 6	5 à 6	3,3	1

d) Energie du condensateur

On peut identifier l'énergie contenue par le condensateur en calculant la puissance reçue par le condensateur :



$$p = U I \Leftrightarrow p = UC \frac{dU}{dt} \Leftrightarrow p = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CU^2 \right)$$

L'énergie contenue dans le condensateur est :

$$W_C = \frac{1}{2} CU^2$$

Cette énergie est contenue dans le condensateur sous la forme d'énergie électrique, associée au champ électrique qui règne entre les

armatures. Comme ce champ électrique est uniforme, on déduit de l'énergie W_c la densité volumique u_e d'énergie électrique, en fonction de E_0 :

$$u_e = \frac{\delta W_c}{\delta \tau} = \frac{W_c}{Se} = \frac{\frac{1}{2}CU^2}{Se} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 S}{e}U^2}{Se} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 U^2}{e^2}$$

$$\text{or } \frac{U}{e} = E_0 \text{ d'où : } u_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2$$

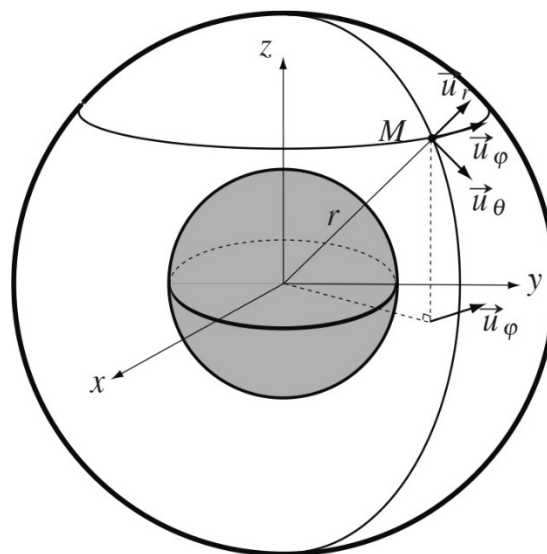
Généralisation :

La densité volumique d'énergie électrique en un point où existe un champ électrique \vec{E} est :

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \text{ (en } Jm^{-3}\text{)}$$

III – Champ électrostatique créé par une boule chargée uniformément

III-1) Champ et potentiel électrostatique



La distribution de charge envisagée dans cet exemple est une boule de rayon R , de charge Q homogène, centrée en O origine du

repère.

- Choix d'un repérage adapté

Le repérage sphérique est le mieux adapté à la situation. La distribution de masse est caractérisée par la charge volumique $\rho(r)$ tel que : $\rho(r > R) = 0$ et $\rho(r < R) = \rho_0$.

- Étude des symétries et des antisymétries

Tous les plans qui contiennent 0 et M sont plans de symétrie de la distribution de masse. On en déduit que :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$$

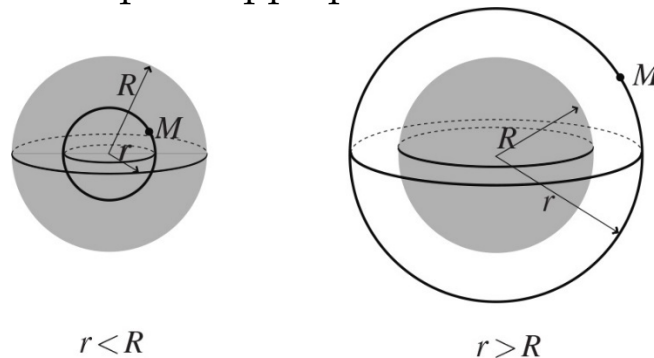
- Étude des invariances

La distribution de charge est invariante par rotation autour de tous les axes qui passent par 0, on en déduit que :

$$E(M) = E(r).$$

- Choix d'une surface de Gauss et utilisation du théorème

Sur la sphère de centre 0 et rayon r , le champ de gravitation prend en tout point la même valeur. On choisit comme surface de Gauss donc la sphère Σ de volume V pour appliquer le théorème de Gauss.



D'après le théorème de Gauss :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dS} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{Or } \begin{cases} Q_{int}(r > R) = Q \\ Q_{int}(r < R) = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3} \pi R^3} \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \end{cases}$$

On remarque que la boule vue de l'extérieur est équivalente à une charge ponctuelle situé au centre.

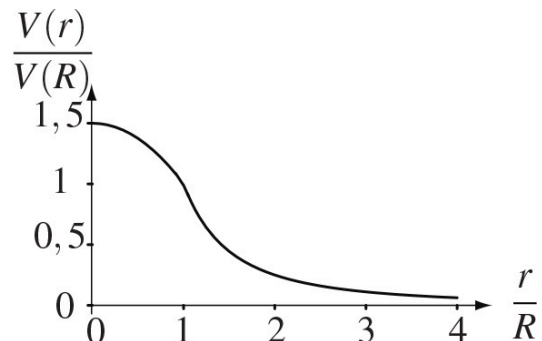
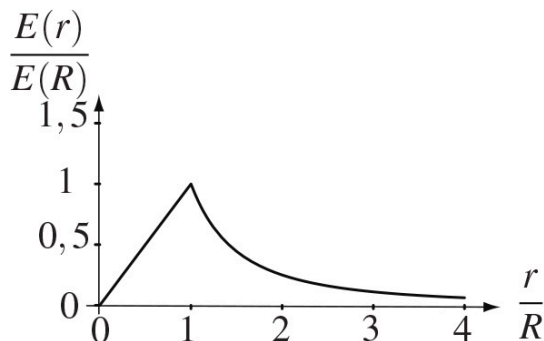
$$\text{Or : } \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -E dr$$

$$\text{d'où } \begin{cases} V(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + A \\ V(r < R) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \end{cases}$$

Par convention : $A=0$ et, on calcule B par continuité de V :

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{QR^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + B \Leftrightarrow B = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} V(r > a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ V(r < a) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \end{cases}$$



III-2) Energie de constitution du noyau

a) Analyse dimensionnelle

On cherche à exprimer l'énergie de constitution d'une sphère uniformément chargée, c'est-à-dire l'énergie qu'il faut fournir pour la construire en prenant toutes les charges qui le composent à l'infini. Cette sphère chargée peut modéliser un noyau atomique.

Cette énergie va dépendre de la charge Q , du rayon R et très certainement de ε_0 . (En lien avec u_e)

$$\Rightarrow E_{Noyau} = \alpha Q^a R^b \varepsilon_0^c \text{ où } \alpha = \text{cste}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} [E] = ML^2T^{-2} \\ [Q] = IT \\ [\varepsilon_0] = \frac{[Q]^2}{L^2[F]} = \frac{I^2T^2L^{-2}}{MLT^{-2}} = M^{-1}L^{-3}T^4I^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-2} = \alpha M^{-c}L^{-c}T^{4c}I^{2c}I^aT^aL^b$$

$$\Rightarrow ML^2T^{-2} = \alpha M^{-c}L^{b-c}T^{4c+a}I^{2c+a}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} c = -1 \\ b - c = 2 \Leftrightarrow b = -1 \\ 2c - a = 0 \Leftrightarrow a = 2 \\ 4c + a = -2 \text{ Vérifiée} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$E_{Noyau} = \alpha \frac{Q^2}{\varepsilon_0 R}$$

b) Calcul de E_{Noyau}

L'énergie de constitution de cette sphère est définie comme le travail qu'il faut fournir, de manière quasistatique, pour la construire en prenant les charges à l'infini.

On va considérer qu'on construit la sphère très lentement et on supposera à chaque instant le système à l'équilibre sous l'action de l'opérateur qui construit la sphère et de l'interaction électrostatique avec la portion de sphère déjà créée.

La sphère de rayon r a déjà été construite, elle porte la charge $q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, l'opérateur va amener la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$ (couronne sphérique concentrique) de l'infini à r .

Par conséquent : $\delta W_{op} = dq (V(r) - V(\infty))$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = dq \left(\rho \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{4\pi \epsilon_0 r} - 0 \right) = \rho 4\pi r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \delta W_{op} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4$$

Pour obtenir la sphère de rayon R , on intègre cette expression pour r variant de 0 à R , il vient :

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{3\epsilon_0 \cdot 5}$$

$$\text{Or : } Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho^2 = \frac{9}{16\pi^2 R^6} Q^2$$

$$\Rightarrow E_{noyau} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \times \frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \times \frac{R^5}{5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R}$$

L'énergie électrostatique de constitution d'un noyau atomique est égale à :

$$E_{noyau} = \frac{3}{5} \times \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} > 0$$

La stabilité du noyau peut-elle s'interpréter à partir de cette énergie ? Non car elle est positive. Donc l'état où les nucléons sont condensés dans le noyau correspond à un état moins stable que les nucléons infiniment éloignés puisque son énergie est plus grande. Il existe une autre interaction qui stabilise les noyaux atomiques, c'est **l'interaction forte**.

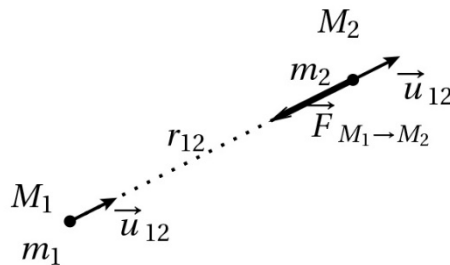
Application numérique :

On considère un modèle de noyau dans lequel la charge électrique Ze est uniformément répartie dans le volume d'une sphère de rayon $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ où $R_0 = 1,3 fm$. D'où pour ${}^{60}_{27}Co$ on obtient :

$$E_{noyau} = \frac{3}{5} \times \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R_0 A^{1/3}} = 120 MeV$$

IV – Champ de gravitation

IV-1) Analogie avec le champ électrostatique



Deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 distants de r_{12} exercent l'un sur l'autre une force telle que :

$$\overrightarrow{F}_{1 \rightarrow 2} = - \frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \overrightarrow{u}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{g}$$

La force d'interaction gravitationnelle entre deux masses et la force d'interaction électrique entre deux charges ont des expressions formellement identiques, ce sont deux forces en $1/r^2$.

Par analogie au champ électrique on peut définir un champ de gravitation :

Le champ de gravitation $\vec{g}(M)$, créé en M par une distribution de masse D est reliée à la force \vec{F} exercée par D sur une masse m placée en M par :

$$\vec{F} = m\vec{g}(M)$$

Un raisonnement par analogies permet d'appliquer à la gravitation les résultats de l'étude du champ électrique et inversement.

Il est possible de calculer le champ de gravitation créé par une distribution de masse qui présente de fortes symétries avec le théorème de Gauss.

Analogie		
Type	Electrostatique	Gravitationnel
Sources	q_1 et ρ	m_1 et μ
Force : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$	$-\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$
Constante :	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$-G$
Champ :	$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$	$-\frac{Gm_1}{r_{12}^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$
Théorème de Gauss :	$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = Q_{int} / \epsilon_0$	$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}_{ext} = -4\pi G M_{int}$
Maxwell-Gauss :	$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$div \vec{g} = -4\pi\mu G$

IV-2) Théorème de Gauss de la gravitation

Une fois l'analogie établie, on l'exploite pour établir le théorème de Gauss gravitationnel : Le flux du champ de gravitation \vec{g} à travers une surface fermée S qui délimite un volume V est égal à la masse intérieure au volume multipliée par la constante $-4\pi G$:

Théorème de Gauss de la gravitation :

$$\oiint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}_{ext} = -4\pi G M_{int}$$

IV-3) Champ gravitationnel d'un astre sphérique

On retrouve les mêmes propriétés de symétrie que la boule électriquement chargée volumiquement.

D'après l'analogie :

$$\begin{cases} \vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \\ \vec{E}(r < R) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{g}(r > R) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r \\ \vec{g}(r < R) = -\frac{Gmr}{R^3} \vec{u}_r \end{cases}$$

Vu de l'extérieur le champ gravitationnel est équivalent au champ créé par une masse ponctuelle de masse m situé au centre de l'astre. (Résultat souvent utilisé en mécanique)

L'énergie de constitution de l'astre sphérique s'écrit, par analogie :

$$E_g = -\frac{3}{5} \frac{Gm^2}{R} < 0$$

A l'inverse, l'énergie de constitution de l'astre sphérique est négative, et elle peut expliquer la stabilité de l'astre.

V – Ecoulement irrotationnel

V-1) Analogie électrostatique

Dans une région vide de charges le champ électrostatique vérifie :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Cela rappelle les propriétés d'un écoulement irrotationnel et incompressible :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 2 \vec{\Omega} = \vec{0} \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

	Electrostatique	Ecoulement irrotationnel et incompressible
Irrotationnel	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$	$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 2 \vec{\Omega} = \vec{0}$
Incompressible et zone absente de sources	$\text{div} \vec{E} = 0$	$\text{div} \vec{v} = 0$
Théorème de Gauss	$\oiint_{\Sigma} (\epsilon_0 \vec{E}) \cdot \vec{dS} = Q_{int}$	$\oiint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{dS} = D_v$
Champ	$\epsilon_0 \vec{E}$	\vec{v}
Sources	Q_{int}	D_v
Potentiel	$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$	$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$
Equation de Laplace	$\Delta V = 0$	$\Delta \phi = 0$
Symétries	Les propriétés de symétrie de \vec{E} se retrouvent pour ce type d'écoulement. <ul style="list-style-type: none"> - Plan de symétrie des sources : \vec{v} est dans ce plan. - Plan d'antisymétrie des sources : \vec{v} est orthogonal. 	

V-2) Fil infini

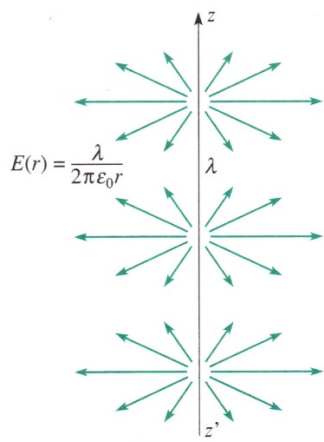
Le problème du calcul du champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé avec la densité linéique λ est l'analogie du puits bidimensionnel. Un fin tuyau d'arrosage percé d'une multitude de petits trous uniformément répartis sur sa surface donne une bonne image de la source étudiée.

On a vu que :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{D_{vl}}{2\pi r} \vec{u}_r$$

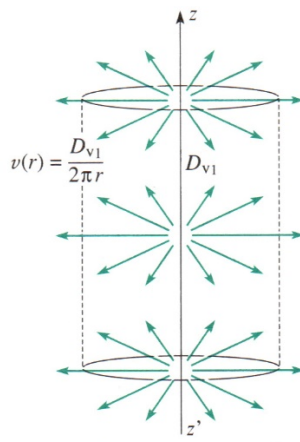
Comme on a introduit une charge linéique dans le cas de l'électrostatique, on a ici introduit un débit linéique de fluide (Débit volumique par unité de longueur). C'est ce débit qui émet le fluide et rend compte de ce type d'écoulement.

On vérifie que le champ des vitesses n'est pas défini en $r=0$.



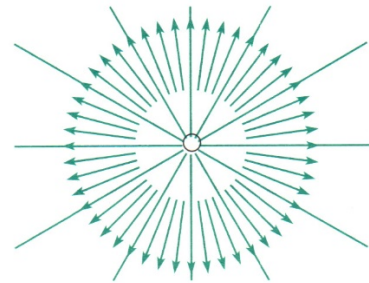
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

champ \vec{E} créé par un fil infini uniformément chargé



$$v(r) = \frac{D_{vl}}{2\pi r}$$

champ \vec{v} créé par une source infinie de débit linéique uniforme



Champ des vitesses d'une source bidimensionnelle.