EM2 – Champ électrostatique

A – Travaux dirigés

EM21 – Champ électrostatique entre deux plaques

On considère un condensateur plan formé de deux plaques parallèles infinies et distantes de d. L'ensemble est placé dans le vide. Les plaques sont maintenues respectivement aux potentiels V_1 et V_2. On néglige les effets de bord.

1°) Rappeler les équations de Poisson et de Laplace pour l'électrostatique.

2°) Déterminer le potentiel et en déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ qui règne entre les armatures de ce condensateur.

3°) Ce condensateur est placé dans un milieu où règne une densité volumique de charges ρ uniforme. Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrostatique.

Rép : 1°) $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} (Poisson)\ et\ \Delta V = 0\ (Laplace)$ 2°) $V = \frac{V_2 - V_1}{d} x + V_1$ 3°) $\vec{E} = \left(\frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{V_2 - V_1}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\right)\overrightarrow{u_x}$

EM22 – Electromètre

Un électromètre est constitué de deux boules métalliques identiques de masse m et de rayon r suffisamment petit pour qu'elles puissent être considérées comme ponctuelles. Elles sont suspendues à un même point O par deux fils isolants de même longueur b. Une boule notée A est fixe, le point A est sur la verticale passant par O. L'autre notée P est mobile. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur supposé uniforme. On donne :

$$b = 12{,}0\ cm, \quad m = 2{,}55\ g, \quad g = 9{,}81\ m.s^{-2}\ et\ \varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F.m^{-1}.$$

Dans un premier temps, la boule P n'est pas chargée et la boule A porte la charge électrique Q. On met les deux boules en contact. La charge Q se répartit de manière égale entre les deux boules. II en résulte une déviation du fil OP d'un angle φ par rapport à la verticale.

1°) Donner l'expression de l'intensité F de la force électrostatique qui s'exerce sur P. Quelle est sa direction ?

2°) Déterminer l'expression de l'angle φ_e à l'équilibre.

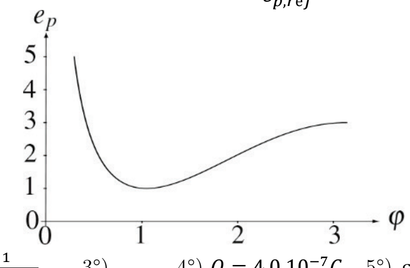
3°) Montrer que la mesure de l'angle φ_e à l'équilibre permet de mesurer la valeur de la charge Q.

4°) On mesure $\varphi_e = 60\,°$. En déduire la valeur numérique de la charge Q.

5°) Calculer l'énergie potentielle ε_p de P.

6°) Retrouver l'expression de φ_e et étudier la stabilité de l'équilibre.

On s'aidera de la courbe suivante, où on a tracé la fonction $e_p = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_{p,réf}}$ en fonction de φ, avec $\varepsilon_{p,réf} = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 b}$.



Rép : 1°) $F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{16b^2 sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ 2°) $\sin^3\left(\frac{\varphi_e}{2}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{32\ mg\ b^2}$ 3°)… 4°) $Q = 4{,}0\ 10^{-7} C$ 5°) $\varepsilon_p = -mgb\cos\varphi + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{8\ b\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ 6°) A l'aide des formules trigonométriques comme : $\sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

B – Exercices supplémentaires

EM23 – Equation de Poisson

Nous établirons ici l'expression de cette loi en coordonnées cartésiennes. Considérons le parallélépipède rectangle élémentaire représenté sur le schéma. Les points A et B ont pour coordonnées cartésiennes respectives (x, y, z) et (x+dx, y+dy, z+dz). La charge volumique du milieu est notée ρ.

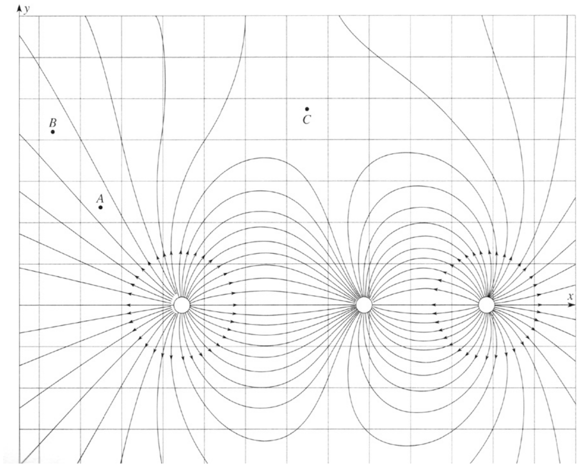
- En appliquant le théorème de Gauss au parallélépipède, établir :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- En déduire l'équation différentielle liant le potentiel à la densité volumique de charges, appelée équation de Poisson.

Rép : 1°) Calculer le flux à travers les six faces… 2°) $\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

EM24 – Topographie



Le schéma représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.

1°) Où sont situés les points d'intersection des fils avec le plan du schéma ?

2°) Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?

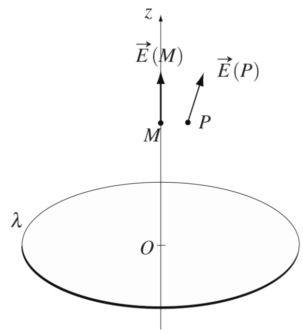
3°) Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?

4°) La norme du champ en A est de 100 V.m^{-1} . Calculer une valeur approchée du champ en B.

5°) Que peut-on dire du champ au voisinage de point C ?

Rep : 1°)... 2°) Fils de gauche et droite positifs, celui du milieu négatif 3°) Positive. 4°) Environ 55V.m^{-1} 5°) Champ très faible.

EM25 – Anneau chargé



Soit la distribution suivante formée d'un anneau chargé linéiquement avec la densité uniforme λ.

Le champ sur l'axe de l'anneau, en un point M de cote z, est de la forme $\vec{E} = E_0(z)\,\overrightarrow{u_z}$. On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point P défini par des coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec $r \ll a$ où a est le rayon de l'anneau, c'est aussi la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ $\vec{E}$. De manière générale :

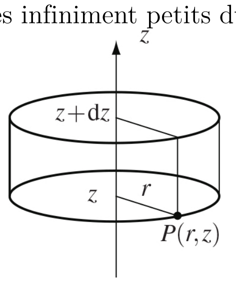
$$\vec{E}(P) = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\overrightarrow{u_z}$$

1°) Montrer par des arguments de symétrie, qu'en *P*, $E_\theta(r,\theta,z) = 0$

2°) Montrer que $E_r(r,\theta,z)$ et $E_z(r,\theta,z)$ ne dépendent que de *r* et *z*.

3°) Montrer qu'au voisinage de l'axe, le flux du champ $\vec{E}$ est conservatif. Que peut-on dire de sa circulation le long d'un contour fermé ?

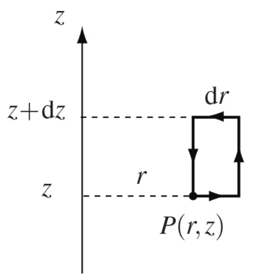
4°) On choisit r et dz tels que r/a et dz/a soient des infiniment petits du premier ordre.



Calculer le flux du champ électrostatique à travers ce cylindre et en déduire l'expression de $E_r(r,z)$ en fonction de la dérivée par rapport à z de $E_0(z)$.

5°) Justifier le fait que $E_z(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre deux en *r*.

6°) On considère le rectangle ci-dessous :



On choisit r/a infiniment petit d'ordre 1, dr/a et dz/a infiniment petits d'ordre 2. En calculant la circulation de $\vec{E}$ le long de ce rectangle, montrer que :

$$E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{2}\frac{d^2E_0(z)}{dz^2}$$

7°) Récapituler l'expression de $\vec{E}(P)$ au premier ordre en *r*, puis au deuxième ordre en *r*.

Rép : 1°)... 2°)... 3°) Par de densité volumique de charges 4°) $E_r(r,z) = -\frac{r}{2}E_0'(z)$ 5°) Invariance par rotation autour de (Oz)...

6°) $E_z(r,z) = E_0(z) - \frac{r^2}{2}E_0''(z)$ 7°) $\vec{E}(P) = -\frac{r}{2}E_0'(z)\overrightarrow{u_r} + E_0(z)\overrightarrow{u_z}$ et $\vec{E}(P) = -\frac{r}{2}E_0'(z)\overrightarrow{u_r} + \left(E_0(z) - \frac{r^2}{2}E_0''(z)\right)\overrightarrow{u_z}$