

## EM2 – Champ électrostatique

### A – Travaux dirigés

#### EM21 – Champ électrostatique entre deux plaques

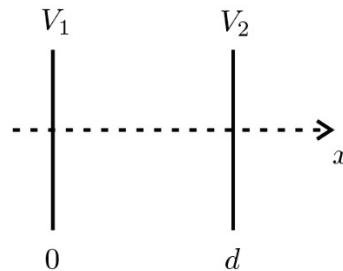
**1.** L'équation de Poisson en électrostatique s'écrit :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Laplace pour l'électrostatique est le cas particulier où la densité volumique de charges est nulle :

$$\Delta V = 0$$

**2.**



On néglige les effets de bord (c'est-à-dire que l'épaisseur  $d$  est faible devant les dimensions des plaques considérées comme infinies). Dans ces conditions la distribution est invariante par translation suivant  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , donc  $V$  aussi.

On en déduit que :

$$V = V(x)$$

Dans l'espace entre les plaques qui est vide de charge, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0$$

En coordonnées cartésiennes, on a  $\Delta V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$ . On a donc :

$$V = Ax + B.$$

#### Conditions aux limites

$V = V_1$  pour  $x = 0$  et  $V = V_2$  pour  $x = d$ .

On en déduit :  $\begin{cases} V_1 = B \\ V_2 = Ad + B \end{cases}$  soit  $A = \frac{V_2 - V_1}{d}$ .

Finalement, on a :

$$V = \frac{-(V_1 - V_2)}{d}x + V_1$$

On en déduit le champ électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{d} \vec{u}_x$$

Le champ est uniforme entre les armatures du condensateur.

**3.** Entre les armatures, le potentiel électrostatique vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$$

Une première intégration donne :  $\frac{dV}{dx} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}x + C_1$ .

Une deuxième intégration donne :  $V = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$ .

Les conditions aux limites donnent :

$$\begin{cases} V_1 = C_2 \\ V_2 = \frac{-\rho}{\varepsilon_0} \frac{d^2}{2} + C_1d + C_2 \end{cases}$$

D'où  $C_1 = \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$ .

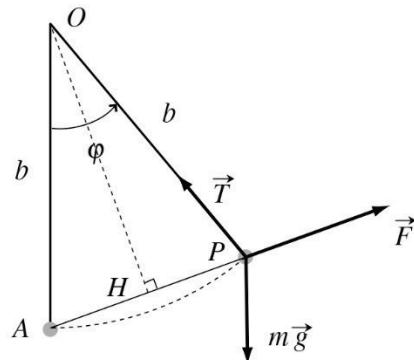
On obtient :

$$V = \frac{-\rho x^2}{2\varepsilon_0} + \left( \frac{V_2 - V_1}{d} + \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) x + V_1$$

Le champ électrostatique est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \left( \frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{V_2 - V_1}{d} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_x$$

## EM22 – Electromètre



**1.** Chaque sphère porte la charge  $\frac{Q}{2}$ . La force électrostatique qui s'exerce sur  $P$  est donc :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2/4}{AP^2} \vec{u}_{AP}. \text{ Pour calculer sa norme, on développe :}$$

$$AP^2 = AO^2 + OP^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OP} = 2b^2 - 2b^2 \cos \varphi = 4b^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right),$$

donc  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{16b^2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$ . Elle est dirigée de  $A$  vers  $P$ , c'est une force répulsive.

**2.** Le point  $P$  étant en rotation autour de l'axe fixe  $\Delta$ , horizontal et passant par  $O$ , on étudie son mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique par rapport à  $\Delta$ . Le point est soumis à la force électrostatique, à son poids et à la tension du fil. À l'équilibre la somme des moments par rapport à l'axe  $\Delta$  des forces s'exerçant sur le point  $P$  est nul.

- La droite d'action de la tension passe par  $O$  donc son moment par rapport à  $\Delta$  est nul.
- Le poids a tendance à faire diminuer l'angle  $\varphi$  et le bras de levier est  $b \sin \varphi$ , le moment du poids par rapport à  $\Delta$  est :

$$\mathcal{M}_\Delta(\text{poids}) = -mgb \sin \varphi.$$

- La force électrostatique a tendance à faire augmenter l'angle  $\varphi$  et le bras de levier est  $OH = b \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ , le moment de la force électrostatique par rapport à  $\Delta$  est :

$$\mathcal{M}_\Delta(F) = +Fb \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right).$$

À l'équilibre :  $mgb \sin \varphi_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2 \cos \left( \frac{\varphi_e}{2} \right)}{16b \sin^2 \left( \frac{\varphi_e}{2} \right)}$ . En utilisant la formule  $\sin \varphi = 2 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)$ , on obtient :

$$\sin^3 \frac{\varphi_e}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{32mgb^2}.$$

**3.** Si on connaît  $\varphi_e$ , on peut déterminer  $Q$  d'après la relation précédente.

$$\mathbf{4.} Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \times 32mgb^2 \sin^3 \frac{\varphi_e}{2}}. \text{ L'application numérique donne : } Q = 4,00 \times 10^{-7} \text{ C.}$$

**5.** L'énergie potentielle de pesanteur du point  $P$  est :  $\mathcal{E}_p(\text{pesanteur}) = -mgb \cos \varphi + \text{cste.}$

L'énergie d'interaction électrostatique entre les deux charges est :  $\mathcal{E}_p(\text{élec}) = \frac{Q}{2} V_A(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8b \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$ . Au total :  $\mathcal{E}_p = -mgb \cos \varphi + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{8b \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)}$ .

**6.** Les positions d'équilibre éventuelles correspondent à des extrema de l'énergie potentielle. La courbe nous montre qu'il existe un minimum entre  $O$  et  $\pi/2$ , c'est donc une position d'équilibre stable. On détermine la valeur de l'angle en résolvant l'équation  $\mathcal{E}'_p(\varphi_e) = 0$ , c'est-à-dire :

$$mgb \sin \varphi - \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 \times 8b} \frac{\frac{1}{2} \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right)} = 0,$$

ce qui donne bien la même expression que précédemment (on lit d'ailleurs sur la courbe une valeur proche de 1, c'est-à-dire proche de  $\pi/3$ ).

## B – Exercices supplémentaires

### EM23 – Equation de Poisson

Considérons la surface fermée enveloppant le parallélépipède et appliquons le théorème de Gauss.

Le flux sortant du champ à travers cette surface fermée élémentaire est donné par (en ne faisant apparaître que les termes « utiles », c'est-à-dire en se limitant aux termes de même ordre non nul) :

$$\begin{aligned} &+ dx dy \cdot E_z(x, y, z + dz) + dy dz \cdot E_x(x + dx, y, z) \\ &\quad + dx dz \cdot E_y(x, y + dy, z) \\ &\quad - dx dy \cdot E_z(x, y, z) - dy dz \cdot E_x(x, y, z) - dx dz \cdot E_y(x, y, z). \end{aligned}$$

Cette quantité est égale à la charge élémentaire située à l'intérieur de ce volume :

$$dx dy dz \cdot \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right), \text{ soit } dx dy dz \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dx dy dz.$$

En utilisant la relation  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \vec{e}_y - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \vec{e}_z$ , nous

en déduisons  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  appelée équation de Poisson.

## EM24 – Topographie

**1)** Le champ électrique tend vers l'infini (comme  $1/r$ ) au voisinage des fils. Les fils coupent le plan de la figure aux points de convergence (ou de divergence) des lignes de champ, là où le champ tend vers l'infini.

Le plan du schéma est plan de symétrie, ainsi que le plan qui contient les trois fils. Le système est également invariant par translation parallèlement à la direction des fils.

**2)** D'après le sens des lignes de champ, le flux de  $\vec{E}$  à travers un cylindre qui entoure le fil de gauche est positif. On en conclut, d'après le théorème de Gauss, que ce fil est chargé positivement.

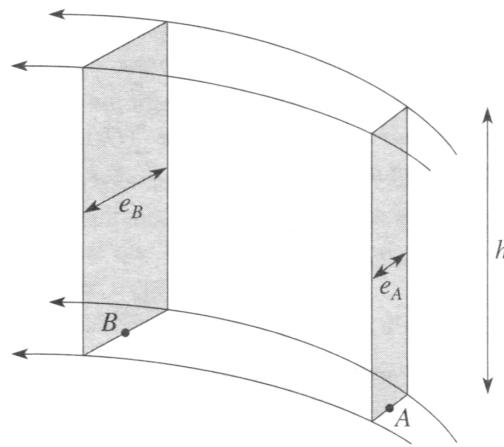
De même, on voit que le fil du milieu est chargé négativement, et le fil de droite positivement.

**3)** On considère un parallélépipède dont la base est constituée par le schéma, et de hauteur (parallèle aux fils) égale à  $h$ . Le flux de  $\vec{E}$  à travers les deux bases est nul ( $\vec{E}$  est parallèle au schéma) et, d'après l'orientation des lignes de champ aux points considérés, le flux de  $\vec{E}$  à travers les quatre autres faces est positif. D'après le théorème de Gauss, on peut en conclure que la somme des charges situées à l'intérieur du parallélépipède est positive. La charge totale des fils est positive.

**4)** Les deux lignes de champ qui encadrent  $A$  (et  $B$ ) permettent de définir un tube de champ avec deux sections rectangulaires d'aires  $S_A = h e_A$  et  $S_B = h e_B$ . Le flux de  $\vec{E}$  à travers ces deux sections a la même valeur. Si les largeurs  $e_A$  et  $e_B$  sont prises orthogonales au champ, et si on suppose que le champ est quasi uniforme sur chaque section :

$$E(A) h e_A \approx E(B) h e_B .$$

On mesure sur le schéma :  $e_A \approx 6 \text{ mm}$  et  $e_B \approx 11 \text{ mm}$ . Donc  $E(B) \approx 55 \text{ V.m}^{-1}$ .



**5)** Les tubes de champ issus d'une des charges deviennent très larges au voisinage du point  $C$  ; le champ y est donc très faible, en comparaison du champ dans les autres zones.

*Remarque : Il existe, près du point  $C$ , un point de champ nul où les trois champs ont une somme nulle.*

## EM25 – Anneau chargé

**1.** Le plan contenant le point  $P$  et l'axe  $Oz$  est plan de symétrie de la distribution de charges. Or ce plan a pour vecteurs directeurs les vecteurs  $\vec{u}_r$  et  $\vec{u}_z$  donc le champ  $\vec{E}$  en  $P$  qui appartient à ce plan n'a pas de composante suivant  $\vec{u}_\theta$ .

**2.** La distribution de charges est invariante par rotation d'axe  $Oz$  donc les composantes de  $\vec{E}$  sont indépendantes de  $\theta$ .

**3.** Une surface fermée au voisinage de l'axe ne contient pas de charges. D'après le théorème de Gauss, le flux à travers cette surface est nul. Le champ  $\vec{E}$  est à flux conservatif en dehors des charges.

**4.** Le flux de  $\vec{E}$  à travers ce cylindre est :

$$\begin{aligned}\Phi_E &= -E_z(0, z)\pi r^2 + E_r(r, z)2\pi r dz + E_z(0, z+dz)\pi r^2 \\ &= \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z)dz\pi r^2 + E_r(r, z)2\pi r dz.\end{aligned}$$

À la question précédente, nous avons vu que ce flux est nul. On en déduit, après simplification par  $rdz$  :

$$E_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z}(0, z) = -\frac{r}{2} E'_0(z).$$

**5.** Le développement limité de  $E_z(r, z)$  en fonction de  $r$  ne comporte que des termes de puissances paires à cause de l'invariance par rotation autour de l'axe  $Oz$ . Donc  $E_z(r, z) - E_z(0, z)$  est au moins d'ordre deux en  $r$ .

### Remarque

Au premier ordre en  $r$ ,  $E_z(r, z) = E_z(0, z) = E_0(z)$ .

**6.** La circulation de  $\vec{E}$  le long du rectangle est nulle. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_E &= E_r(r, z)dr + E_z(r+dr, z)dz - E_r(r, z+dz)dr - E_z(r, z)dz = 0 \\ &= -\frac{\partial E_r}{\partial z}(r, z)dzdr + \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, z)drdz.\end{aligned}$$

On en déduit, après simplification par  $drdz$  :

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, z) = \frac{\partial E_r}{\partial z}(r, z).$$

En utilisant l'expression de  $E_r(r, z)$  établie à la question précédente, on obtient :

$$\frac{\partial E_z}{\partial r}(r, z) = -\frac{r}{2}E_0''(z),$$

qui s'intègre entre 0 et  $r$  en :

$$E_z(r, z) = E_0(z) - \frac{r^2}{4}E_0''(z).$$

**7. Sur l'axe :**  $\vec{E}(M) = E_z(0, z)\vec{u}_z = E_0(z)\vec{u}_z$ .

Au voisinage de l'axe :

- au premier ordre en  $r$  :  $\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}E_0'(z)\vec{u}_r + E_0(z)\vec{u}_z$  ;
- au deuxième ordre en  $r$  :  $\vec{E}(M) = -\frac{r}{2}E_0'(z)\vec{u}_r + \left(E_0(z) - \frac{r^2}{4}E_0''(z)\right)\vec{u}_z$ .

Les lignes de champ dans un plan contenant l'axe ont l'allure suivante :

