EM2 – Champ électrostatique

La partie « Électrostatique » étudie les lois de l'électrostatique et quelques applications. Les calculs de champs doivent être motivés par l'utilisation de ces champs pour étudier des situations d'intérêt pratique évident. Ces calculs ne s'appuient sur la loi de Coulomb que pour des distributions de charges discrètes. Dans le cas des distributions continues, on se limite aux situations de haute symétrie permettant de calculer le champ par le théorème de Gauss et aux superpositions de champs ainsi obtenus. Cette rubrique permet aussi d'introduire et d'exploiter des analogies avec le champ gravitationnel qui a été étudié en PCSI dans le seul cas d'astres ponctuels.

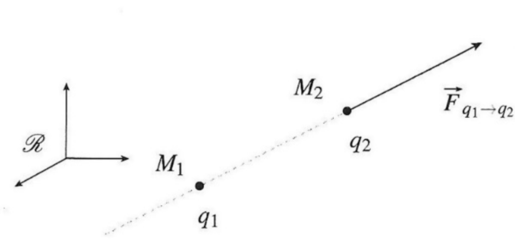
5.2. Électrostatique		
5.2.1. Champ électrostatique		
Loi de Coulomb. Champ et potentiel électrostatiques créés par une charge ponctuelle. Principe de superposition.	Exprimer le champ électrostatique et le potentiel créés par une distribution discrète de charges. Citer quelques ordres de grandeur de champs électrostatiques.	
Propriétés du champ électrostatique Symétries.	Exploiter les propriétés de symétrie des sources (translation, rotation, symétrie plane, conjugaison de charges) pour prévoir des propriétés du champ créé.	
Circulation du champ électrostatique. Potentiel électrostatique. Équations locales.	Relier l'existence d'un potentiel électrostatique à la nullité du rotationnel du vecteur champ électrostatique. Justifier l'orthogonalité des lignes de champ avec les surfaces équipotentielles et leur orientation dans le sens des potentiels décroissants.	On retrouve des propriétés vues en mécanique des fluides.
Théorème de Gauss et équation locale de Maxwell-Gauss.	Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.	On retiendra bien la méthode et pas seulement le théorème.
Lignes de champ électrostatique. Équipotentielles.	Justifier qu'une carte de lignes de champ puisse ou non être celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ et leur signe. Associer l'évolution de la norme du champ électrostatique à l'évasement des tubes de champ loin des sources. Relier équipotentielles et lignes de champ électrostatique. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de lignes équipotentielles.	

I – Charge ponctuelle

I-1) Loi de Coulomb

En 1785 Charles-Augustin effectue une étude quantitative de la force d'interaction entre deux particules chargées.

De toutes les expériences effectuées au XVIII$^{\text{ème}}$, on a pu déduire trois propriétés essentielles de la force d'interaction entre deux corps chargés ponctuels, M_1 et M_2, qui portent les charges q_1 et q_2 :

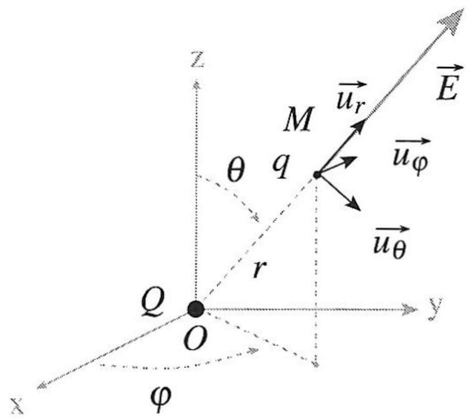


$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{1\to 2}$$

Où ε_0 est une constante dimensionnée, appelée **permittivité** électrique du vide. Sa valeur dans le système international d'unités est : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} Fm^{-1}$

I-2) Champ électrique créé par une charge ponctuelle

On envisage une charge ponctuelle Q située au point 0, origine du repère.



Si on place une charge q en un point M quelconque de l'espace, celle-ci subit la force :

$$\vec{F}(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$$

Pour étudier l'action d'une charge électrique Q, l'utilisation de la force qu'elle exerce sur une autre charge n'est pas pertinente puisque cette force dépend à la fois de la charge source et de la charge test. Pour ne faire apparaître que le rôle de la source et pas celui du détecteur, on est amené à définir le champ électrostatique créé en M par la charge Q située en O par la relation :

$$\vec{F}(M) = q\,\overrightarrow{E(M)}$$

Donc, le champ électrique que crée Q en M est :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}$$

L'unité du champ électrique dans le système international est le $V.m^{-1}$.

Application :

La norme du champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène au niveau de l'électron est :

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{1{,}6\ 10^{-19}}{4\pi * 8{,}85\ 10^{-12} * (52{,}9\ 10^{-12})^2} \sim 10^{11} V m^{-1}$$

I-3) Potentiel crée par une charge ponctuelle

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est égal à :

$$\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dOM} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\overrightarrow{u_r}.\ dr\overrightarrow{u_r}$$

$$\Leftrightarrow \delta W = -d\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM}\right)$$

Or : $\delta W_c = -dE_p \Rightarrow E_p(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM} + cste$

On choisit nulle, par convention, l'énergie potentielle quand les deux charges sont infiniment éloignées l'une de l'autre donc :

$$E_p(M) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM}$$

Comme précédemment, il est intéressant de faire apparaître une grandeur qui ne dépend que de la charge source et non de la charge test. On pose :

$$E_p(M) = qV(M) \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM}$$

Le potentiel électrostatique créé au point M par la charge ponctuelle Q située au point O s'écrit :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{OM} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

I-4) Lien entre $\vec{E}$ et V

$$Par\ définition : \begin{cases} E_p(M) = qV(M) \\ dE_p = -\vec{F}.\overrightarrow{dOM} = -q\vec{E}.\overrightarrow{dOM} \end{cases}$$

$$\Rightarrow dE_p = q dV(M) = -q\vec{E}.\overrightarrow{dOM}$$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dOM}$$

Par définition de l'opérateur gradient :

$$dV = \overrightarrow{grad}\, V\,.\overrightarrow{dOM}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$$

On généralise cette relation à tout champ électrostatique :

$$\underbrace{\vec{E}}_{vecteur} = -\overrightarrow{grad} \underbrace{V}_{scalaire}$$

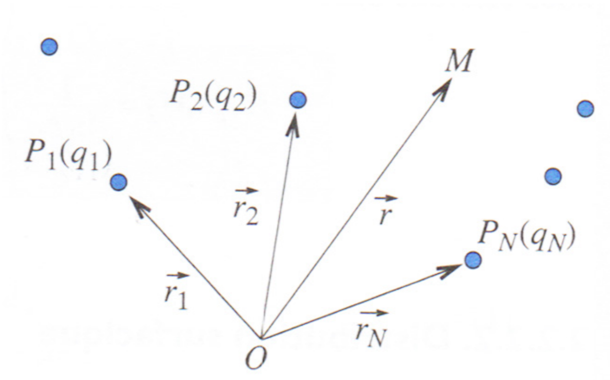
II – Distribution de charges

II-1) Principe de superposition

L'expérience conduit à postuler que les interactions électrostatiques ont des effets linéaires c'est-à-dire :

La force subie par une charge q de la part d'un ensemble de N charges $\{q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N\}$ est la somme des N forces qu'exercent individuellement les charges q_i lorsqu'elles sont mises seules en présence de q.

$$\vec{F}_{ext\to q} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{q_i\to q}$$



II-2) Distribution discrète

A l'aide du principe de superposition on en déduit :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_{q_i \to q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

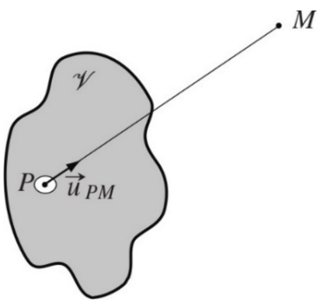
De même le potentiel électrostatique s'écrit :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i\,(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{P_i M}$$

Remarque :

Le point P représente souvent le point descriptif des sources et M le point de calcul du champ.

II-3) Distribution volumique



On s'intéresse maintenant au champ créé par une distribution de charges D contenue dans le volume V, dont la densité volumique est ρ(P). Chaque petit élément de volume mésoscopique $d\tau_P$ est assimilable à une charge ponctuelle et crée en un point M le champ :

$$d\overrightarrow{E_p(M)} = \frac{dq_P}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

A l'aide du principe de superposition, et en tenant compte que l'on a affaire à une distribution continue on a :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V d\overrightarrow{E_p(M)} = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau$$

Une distribution volumique de charges fixes crée en M :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \iiint_V \dfrac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}d\tau = \iiint_V \dfrac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{u_{P\to M}}}{PM^2}d\tau \\ V(M) = \iiint_V \dfrac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{PM}d\tau \end{cases}$$

II-4) Autres distributions

a) Distribution surfacique

Une distribution surfacique de charges fixes crée en M :

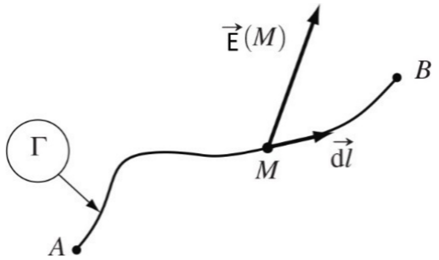
$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \iint_S \dfrac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dS = \iint_S \dfrac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{u_{P\to M}}}{PM^2}dS \\ V(M) = \iint_S \dfrac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{PM}dS \end{cases}$$

b) Distribution linéique

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \int_\Gamma \dfrac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dl = \int_\Gamma \dfrac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{u_{P\to M}}}{PM^2}dl \\ V(M) = \int_\Gamma \dfrac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{PM}dl \end{cases}$$

III – Equation de Maxwell-Faraday

III-1) Circulation d'un champ de vecteur



La circulation champ de vecteurs $\vec{E}$ le long d'un chemin Γ est :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

En général, C dépend du chemin Γ, pas uniquement de A et de B.

III-2) Circulation du champ électrostatique

Dans le cas du champ électrostatique on a :

$$C = \int_{\Gamma} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = -\int_{\Gamma} \overrightarrow{grad}\, V.\overrightarrow{dl} = -\int_{\Gamma} dV = V(A) - V(B)$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi mais que des points A et B.

La circulation du champ électrostatique entre deux points ne dépend que de ces deux points et pas du chemin le long duquel on calcule la circulation.

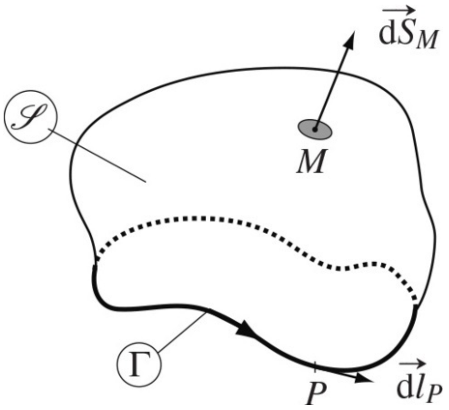
$$\Rightarrow C = \oint_{\Gamma_{fermé}} \vec{E}.\overrightarrow{dl} = 0$$

On dit que le champ $\vec{E}$ est à circulation conservative.

- Si un champ est à circulation conservative, alors il s'écrit comme le gradient d'un champ scalaire.

III-3) Equation de Maxwell-Faraday

Le théorème de Stokes nous dit que la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{E}$ le long d'un contour orienté Γ est égale au flux du rotationnel de $\vec{E}$ à travers une surface S s'appuyant sur Γ et orientée comme selon la règle de la main droite :



Théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_{P\in\Gamma} \vec{E}.\overrightarrow{dl}_P = \iint_{M\epsilon S} \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\,.\overrightarrow{dS}_M$$

Par conséquent :

- $\vec{E}$ à circulation conservative $\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$
- Le rotationnel d'un champ de gradient est toujours nul donc on retrouve le résultat : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

Equation de Maxwell-Faraday en électrostatique :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$$

D'où le lien entre $\vec{E}$ et V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$

Et celui entre $\vec{F}$ et E_p : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$ avec $E_p = qV$

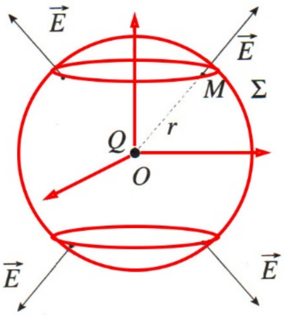
IV – Equation de Maxwell-Gauss

IV-1) Théorème de Gauss

a) Charge ponctuelle

On constate que la charge ponctuelle Q crée un champ électrique radial, qui varie comme l'inverse de la distance au carré.

En calculant le flux du champ créé par cette charge ponctuelle à travers la sphère S de rayon r qui passe par M, comme le montre la figure, on établit sur un cas particulier d'une propriété fondamentale du champ électrique.



$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \oiint_S \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r}.4\pi r^2\,\overrightarrow{u_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Le flux du champ électrique à travers la sphère de rayon r ne dépend que de la charge Q, il ne dépend pas du rayon de la sphère.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

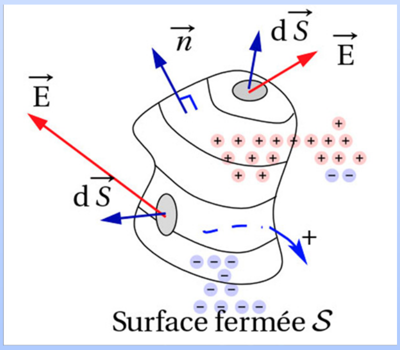
Cette propriété, établie dans le cas particulier d'une charge ponctuelle et d'une sphère dont elle est le centre, est une propriété tout à fait générale du champ électrique, connue sous le nom de théorème de Gauss.

b) Énoncé

On admet que le résultat précédent se généralise au cas d'une surface fermée quelconque, à l'intérieur de laquelle se trouve une distribution de charge.

Le flux du champ électrique $\vec{E}$, à travers une surface fermée S qui délimite un volume V, est égal à la charge intérieure au volume, divisé par ε_0 :

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



Cette relation constitue le théorème de Gauss.

Remarque :

On appelle surface de Gauss la surface fermée choisie pour appliquer le théorème de Gauss.

Conséquences du théorème de Gauss :

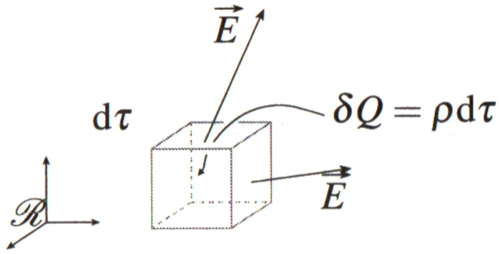
- Les charges situées en dehors de la surface de Gauss ne participent pas au flux du champ électrique ;
- La position des charges à l'intérieur du volume n'a pas d'influence sur le flux sortant du champ électrique ;

IV-2) Equation locale de Maxwell Gauss

Le théorème de Gauss n'impose aucune condition sur le volume délimité par la surface de Gauss. On choisit alors de l'appliquer sur un volume mésoscopique $d\tau$ fixe du référentiel dans lequel est défini la distribution de charge définie par la densité volumique de charge ρ.

En notant dϕ, le flux du champ électrique sortant du volume mésoscopique dτ, attendu que la charge contenue dans le volume dτ est δQ=ρdτ, le théorème de Gauss s'écrit :

$$d\phi = \frac{\delta Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}\tau$$



Or, la définition intrinsèque de la divergence est :

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} = div\,\vec{E}\;d\tau$$

En égalant les deux expressions de $d\phi$ on obtient :

Equation de Maxwell-gauss :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Maxwell Gauss relie le champ électrique $\vec{E}$ et la densité volumique de charge ρ.

L'équation de Maxwell-Gauss est la traduction locale du théorème de Gauss. Elle relie localement, c'est-à-dire en un point M quelconque, le champ électrique et la densité volumique de charge.

IV-3) Existence et continuité du champ électrique

- Si la distribution de charge est strictement volumique, le champ électrique est défini, continu et dérivable en tout point de l'espace.
- Par contre, en des points d'une distribution surfacique, linéique ou ponctuelle de charges, pour lesquelles la

modélisation entraîne un passage à la limite, l'équation de Maxwell Gauss n'est pas valide, car la densité volumique de charge n'y est pas définie.

En un point d'une distribution surfacique, linéique ou ponctuelle, le champ électrique n'est pas défini.

IV-4) Équations de Poisson et de Laplace

Des deux équations vues précédemment, Maxwell-Gauss d'une part, et le lien entre le champ électrique et le potentiel d'autre part :

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \; et \; \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \; Equation\ de\ Poisson$$

Equation de Poisson et Laplace :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow Si\ \rho = 0, \Delta V = 0$$

V – Propriétés de symétrie

V-1) Invariance par translation

a) Définition

Une distribution, illimitée dans la direction de l'axe Δ, est invariante par translation suivant Δ si, pour tout point M et son translaté M', sa densité de charge vérifie : $\rho(M) = \rho(M')$

Si Δ=(Oz) alors $\boldsymbol{\rho(x, y, z + n\,\Delta z) = \rho(x, y, z)}$ où $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Ex : Un cylindre infini ou ρ=cste.

b) Principe de Curie

Les éléments de symétrie des causes se retrouvent dans les effets.

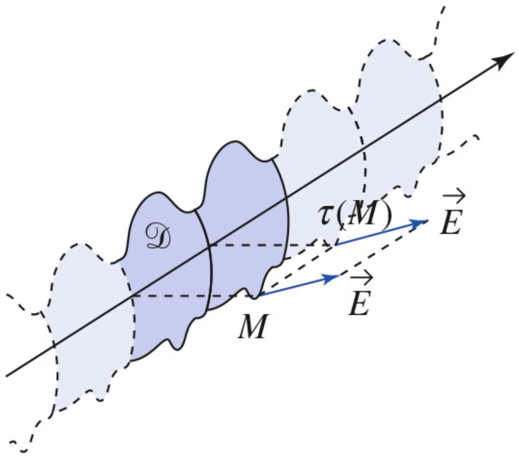
C'est un principe général que l'on rencontre dans tous les domaines de la physique. Ici, il se traduit par : les éléments de symétrie des distributions de charges se retrouvent dans le champ électrostatique et dans le potentiel créés.

c) Conséquence pour le champ

Lorsqu'une distribution D est invariante par translation de Δz, un observateur percevra la même distribution s'il est au point de coordonnées (x,y,z) ou au point translaté (x,y,z+nΔz) où n est un entier. Le champ sera donc identique en ses points.

Pour une distribution invariante par translation de Δz on a :

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y,z+n\Delta z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$



Pour une distribution invariante par **toute** translation de Δz on a :

$$\forall \Delta z, \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y,z+\Delta z) = \vec{E}(x,y)$$

C'est le cas du cylindre infini par exemple.

V-2) Invariance par rotation

On a invariance par rotation autour de Δ=(Oz) si la densité volumique de charges vérifie :

$$\rho(r,\theta,z) = \rho(r,\theta + n\Delta\theta, z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

$$\overset{Curie}{\Longrightarrow} \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta + n\Delta\theta, z) \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

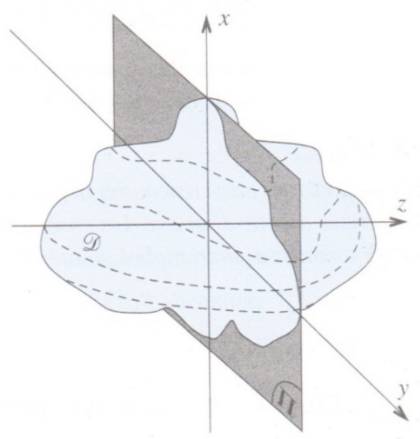
Pour une distribution invariance par **toute** rotation autour de (Oz) :

$$\forall \Delta\theta, \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,\theta + \Delta\theta, z) = \vec{E}(r,z) \,,$$

C'est le cas du cylindre infini

V-3) Symétrie plane

a) Définition



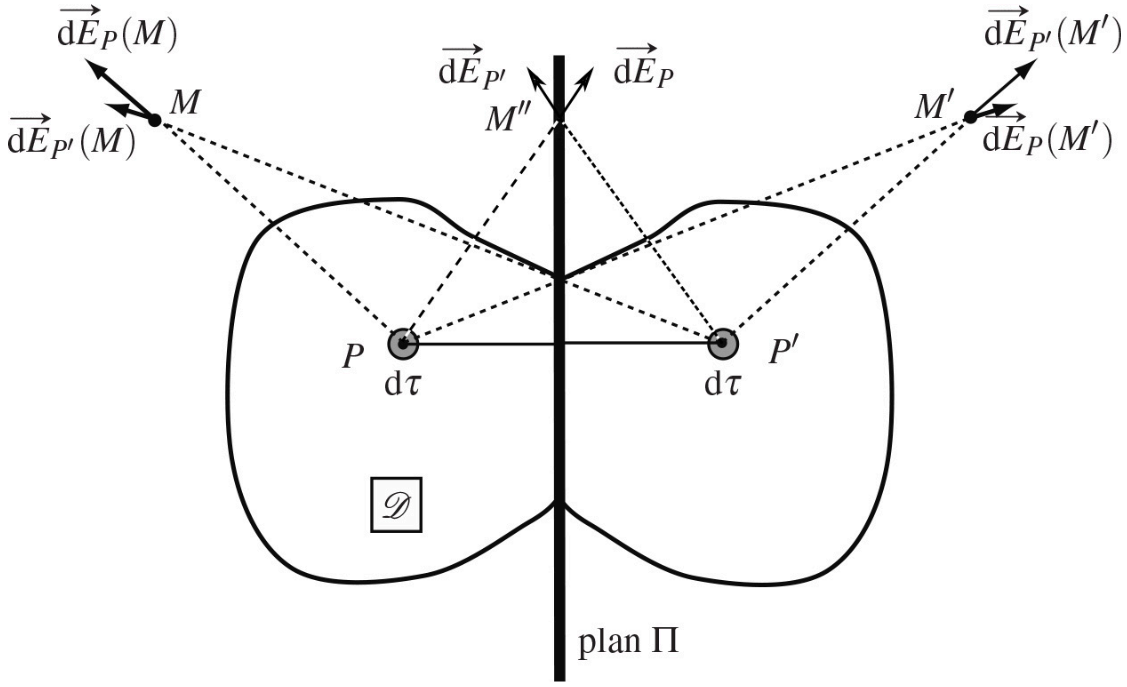
Pour que Π soit plan de symétrie pour une distribution de charge, il faut que pour tout point P portant une charge q, le point P' symétrique de M par rapport à P porte la même charge q.

Symétrie plane :

- $\forall P \in D, si\ P' = sym_{\Pi}(P)\ \ alors\ \rho(P') = \rho(P)$

b) Conséquences

Représentons les champs élémentaires provenant des éléments de volumes situés autour de P et P' en trois points différents : M, $M' = sym_{\Pi}(M)$ et M'' un point du plan de symétrie.



En effectuant la somme des champs élémentaires on en déduit que :

$$\vec{E}(M') = sym_{\Pi}\,\vec{E}(M) \text{ et } \vec{E}(M'') \in (\Pi)$$

Conclusion :

- Le champ électrostatique créé par une distribution de charge est **symétrique** par rapport à un plan de symétrie de la distribution de charge ;
- Si le point M appartient à un plan de symétrie de la distribution de charge, le champ électrostatique en M'' **appartient** au plan de symétrie.

V-4) Antisymétrie plane

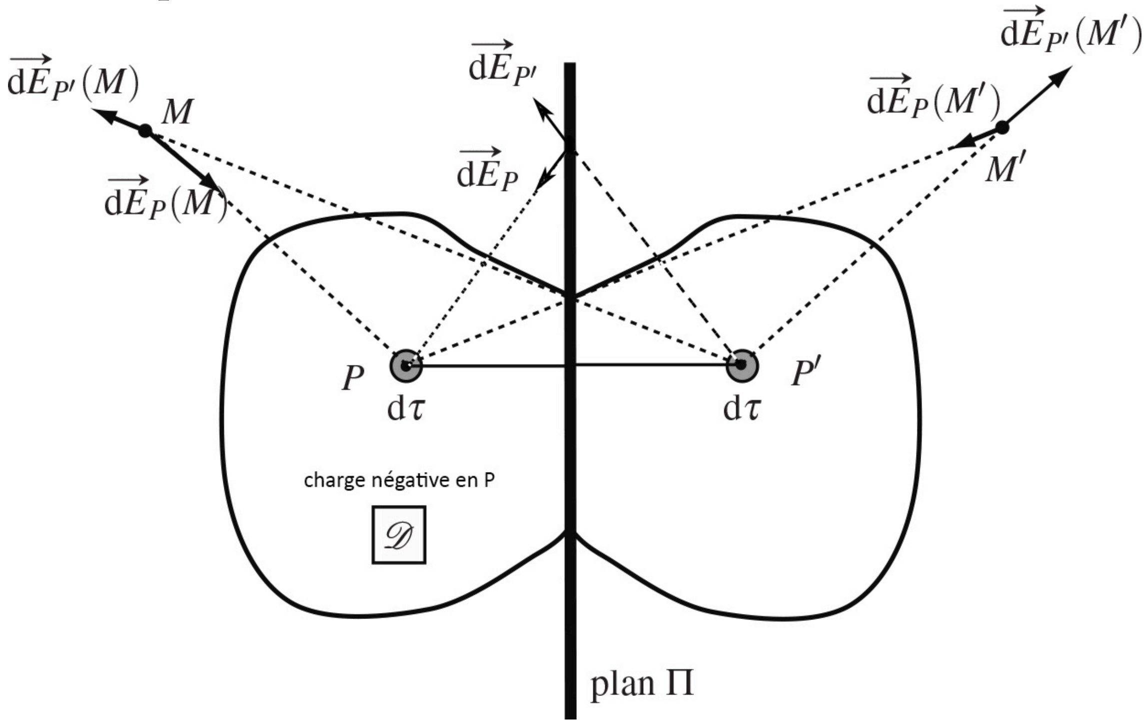
a) Définition

Pour que Π soit plan d'antisymétrie pour une distribution de charge, il faut que pour tout point P portant une charge q, le point P' symétrique de M par rapport à P porte la charge opposée -q.

Antisymétrie plane :

- $\forall P \in D$, si $P' = sym_{\Pi}(P)$ alors $\rho(P') = -\rho(P)$

b) Conséquences



En effectuant la somme des champs élémentaires on en déduit que :

$$\vec{E}(M') = -sym_{\Pi}\,\vec{E}(M)\ et\ \vec{E}(M'') \perp (\Pi)$$

- Le champ électrique créé par une distribution de charge est **antisymétrique** par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge ;
- Si le point M appartient à un plan d'antisymétrie de la distribution de charge, le champ électrique en M'' est **perpendiculaire** au plan d'antisymétrie.

V-5) $\vec{E}$ un vecteur polaire

$\vec{E}$ est un objet tridimensionnel ayant les propriétés de symétrie d'un vecteur polaire c'est-à-dire qu'il a les mêmes propriétés de symétrie que la distribution qui le crée.

Tous les vecteurs « physiques » : $\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \vec{F}$ ...sont polaires comme $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ il est normal de retrouver ses propriétés de symétrie. On verra plus tard que pour le champ magnétique c'est différent.

VI - Propriétés topographiques

VI-1) Définitions

En utilisant les différentes propriétés du champ électrique et du potentiel, ainsi que les relations qui les lient, on peut constater un ensemble de propriétés topographiques du champ électrique qui permettent d'interpréter les cartes de lignes de champ et de surfaces équipotentielles.

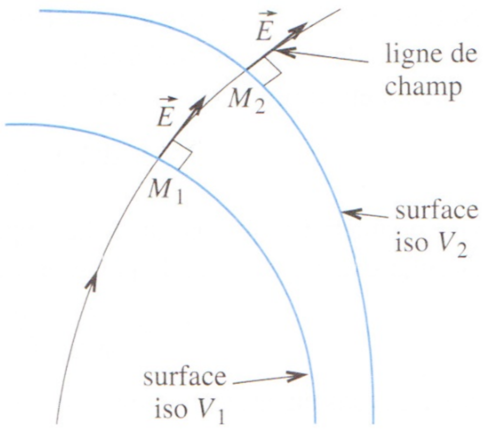
Une ligne de champ électrique est une courbe en tout point tangente au champ électrique, orientée comme le champ électrique.

Le long d'une ligne de champ : $\vec{E} \wedge \overrightarrow{dl} = \vec{0}$

Une surface équipotentielle est une surface formée d'un ensemble de points au même potentiel, son équation est donnée par : $V(M) = V_0$, où V_o est constant.

VI-2) Le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants

Le lien entre le champ électrique et le potentiel, $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$, montre que le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.



En effet on suppose $V_1 > V_2$:

$$dV = \overrightarrow{grad}\,V.\overrightarrow{M_1M_2} = -\vec{E}.\overrightarrow{M_1M_2} < 0$$

$$\Rightarrow \vec{E} \text{ de même sens que } \overrightarrow{M_1M_2} \text{ avec } V(M_1) > V(M_2)$$

Si la ligne de champ qui relie le point M_1 au point M_2 est orientée de M_1 vers M_2 alors $V_2 < V_1$, le potentiel en M_2 est strictement inférieur au potentiel en M_1, ainsi les points M_1 et M_2 possèdent deux potentiels différents, ils ne peuvent être confondus.

Conclusion

- En régime statique, le champ électrique est orienté vers les potentiels décroissants.
- En régime statique, une ligne de champ électrique n'est pas fermée sur elle-même.

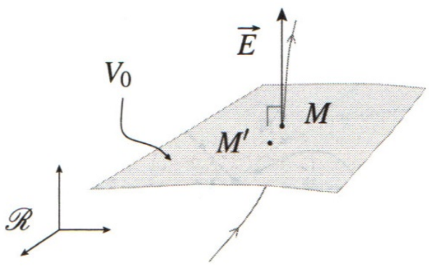
VI-3) Le champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles

Soient M et M' deux points voisins sur la surface équipotentielle de potentiel V_0, comme le montre la figure, ils sont au même potentiel et très proches l'un de l'autre. En effectuant le passage à la limite $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ qui tend vers le vecteur nul, on peut écrire :

$$V(M') - V(M) \sim dV = \overrightarrow{grad}\,V.\overrightarrow{MM'} = -\vec{E}.\overrightarrow{MM'} = 0$$

et donc finalement :

$$\vec{E}.\overrightarrow{MM'} = 0$$



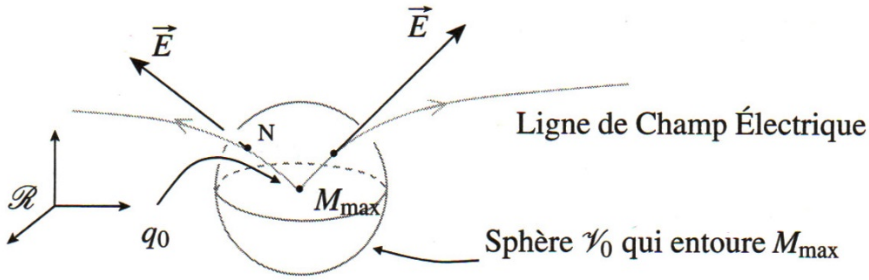
On en déduit que le champ électrique est perpendiculaire en tout point à la surface équipotentielle.

Les lignes de champ du champ électrostatique sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

VI-4) Théorème de l'extrémum

Une conséquence importante du théorème de Gauss est l'existence d'extrema relatifs du potentiel là où se trouvent des charges. On démontre cette propriété en utilisant le théorème de Gauss :

Soit un point M_{max} où le potentiel électrostatique présente un maximum relatif.



Cela signifie que pour tous les points qui entourent M_{max}, le potentiel est plus faible. Comme le champ électrique est dirigé vers les potentiels décroissants, on peut représenter le champ électrique en différents points voisins de M_{max}, et si on place autour de M, un petit volume sphérique $d\tau$, le flux du champ électrique sortant de V_0 est positif.

$$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} > 0 \Rightarrow q_{int} > 0$$

On peut reprendre un raisonnement rigoureusement identique en un point M_{min} où le potentiel présente un minimum relatif, on y trouve une charge négative.

En un point M_{max} où le potentiel est un maximum relatif, se trouve une charge positive. En un point M_{min} où le potentiel est un minimum relatif se trouve une charge négative.

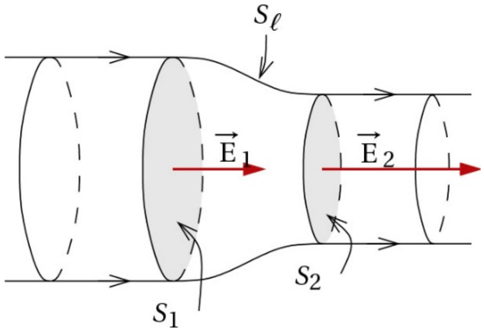
VI-5) Intersection des lignes de champ électrique

Lorsqu'on trace les lignes de champ électrique d'une distribution de charges, on observe parfois des points d'intersection de lignes de champs, cela correspond à deux cas singuliers :

- Au point où se trouve une charge ponctuelle, les lignes de champ sont concourantes, puisque le potentiel est y est extrémal, on remarque qu'en ce point le champ électrique n'est pas défini, il est infini.
- Lorsque plusieurs lignes de champ différentes se croisent en un point où il n'y a pas de charge ponctuelle, le champ électrique est le vecteur nul, seul vecteur qui puisse avoir les différentes directions des lignes de champ qui se croisent.

VI-6) Conservation du flux électrique en un lieu vide de charge

Dans une zone de l'espace où ρ=0, l'équation de Maxwell Gauss s'écrit : $div\,\vec{E} = 0$



Le flux du champ électrostatique sortant du tube de champ de section variable délimité par les sections S_1, S_2 et la surface latérale S_l est :

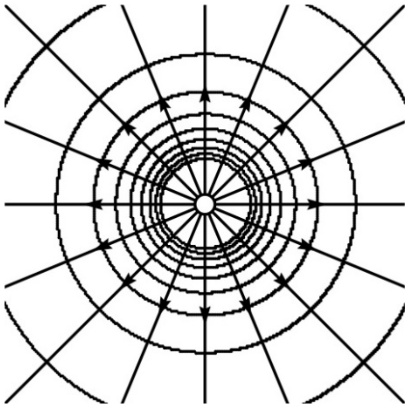
$$\underset{tube}{\oiint} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = -S_1E_1 + S_2E_2 + 0 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{S_2}{S_1}$$

Dans une zone vide de charges, là où les lignes de champ électrique se resserrent, le champ électrique est plus intense.

VI-7) Valeur du champ et surfaces équipotentielles successives

Les équipotentielles représentées sur la figure correspondent à des valeurs du potentiel variant de 4 (à l'extérieur) à 20 (à l'intérieur) par sauts de 2 dans une unité arbitraire.



On constate que les équipotentielles sont plus espacées quand on s'éloigne des charges, c'est-à-dire quand la norme du champ diminue, ce qui est parfaitement compatible avec la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$

Si deux équipotentielles consécutives, de potentiels respectifs $V_1\ et\ V_2\ tels\ que\ V_2 = V_1 + \delta V\ où\ |\delta V| \ll V_1$ sont distantes de δl on peut assimiler la petite variation du potentiel à sa différentielle et écrire :

$$E\ \delta l = -\delta V$$

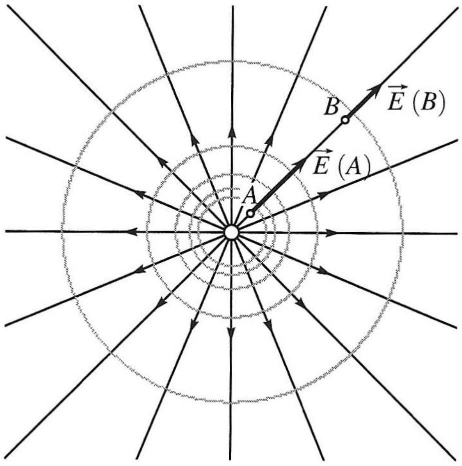
Ainsi, la donnée des valeurs du potentiel sur un réseau d'équipotentielles permet de calculer la valeur du champ électrostatique entre deux équipotentielles.

VI-8) Cartes de lignes de champs

a) Charge ponctuelle

On considère un premier exemple introductif, celui du champ créé par une charge ponctuelle positive.

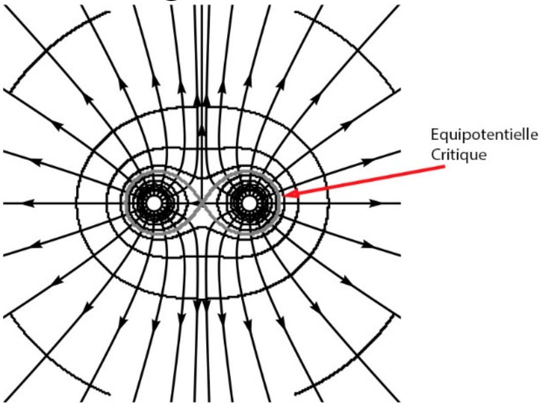
La figure représente, dans le plan de coupe de la figure, les surfaces équipotentielles (en gris), avec la variation de potentiel d'une ligne équipotentielle à l'autre constante, et les lignes de champ électrique (en noir) créées par une charge ponctuelle positive placée au centre de la figure.



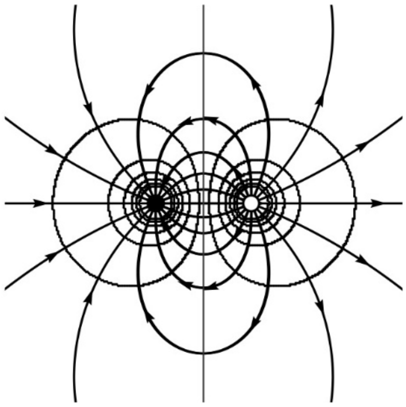
On observe que :

- Les lignes de champ sont radiales orientées du centre vers la périphérie
- Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.
- Le champ est plus intense en A car les lignes de champ sont plus resserrées au voisinage de A qu'en B.
- Le champ est plus intense en A car, à écart de potentiel constant, les surfaces équipotentielles sont plus resserrées en A qu'en B.

b) Deux charges de même valeur absolue



Deux charges de même signe

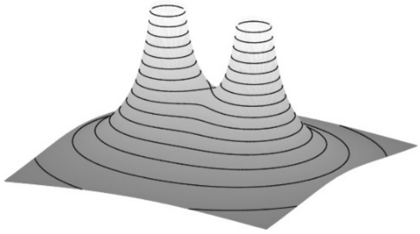


Deux charges de signe contraire

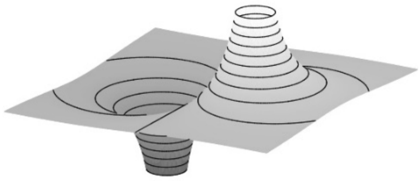
- Sur les deux figures, on observe bien que les lignes de champ et les équipotentielles sont orthogonales entre elles.
- Les équipotentielles sont plus resserrées près des charges, là où le champ est le plus intense.
- On constate que les lignes de champ divergent d'un point où se trouve une charge négative et qu'elles convergent vers un point où se trouve une charge positive. On peut ainsi à partir d'une carte de lignes de champ repérer d'éventuelles sources du champ et connaître leur signe. Sur la figure de droite, la charge positive est à droite et la charge négative à gauche.

Sur la figure de gauche, on remarque deux familles d'équipotentielles : celles qui entourent une seule charge et celles qui entourent les deux. On a tracé une équipotentielle particulière en traits plus gros et plus clair. C'est l'équipotentielle critique, elle passe par le point de champ nul (au milieu des deux charges) et sépare les deux familles d'équipotentielles. Cette situation se rencontrera chaque fois qu'il y aura un point où le champ est nul. Sur la figure de droite, le champ créé par la distribution n'est jamais nul, il n'y a pas d'équipotentielle critique.

Pour mieux voir cela, on représente sur la figure suivante, la surface V(x,y) dans les deux cas.

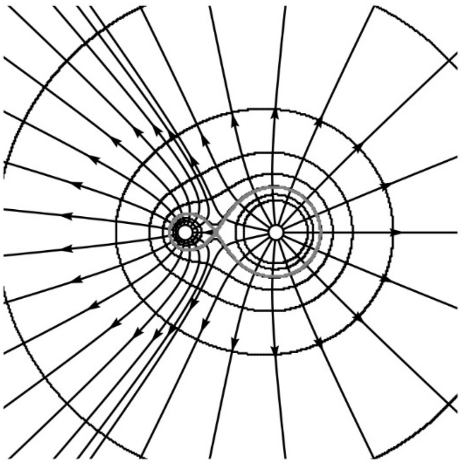


Deux charges positives.



Deux charges de signe contraire.

c) Charges de valeurs différentes



On remarque :

- Il y a deux charges, toutes les deux positives puisque les lignes de champ divergent à partir de deux points.
- Un point de champ nul, là où l'équipotentielle critique se croise elle-même. Si on mesure sa position, il est deux fois plus près de la charge de gauche que de celle de droite : on peut en déduire que la charge de droite est quatre fois plus grande que celle de gauche.

$$\frac{Q_g}{r_g^2} = \frac{Q_d}{r_d^2} \Rightarrow \frac{Q_g}{Q_d} = \frac{r_g^2}{r_d^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

- Loin des deux charges, les équipotentielles se rapprochent de celles créés par une charge unique.