EM1 – Sources du champ électromagnétique

A – Travaux dirigés

EM11 – Modèle de Drüde

1) Le courant I est donné par :

$$I = |jS| = n|e|vS.$$

Il faut déterminer le nombre d'électrons libre n par unité de volume. Pour cela, on utilise la masse volumique du métal et comme le nombre d'électrons libre est égal aux nombre d'atome de cuivre par unité de volume, on a :

$$n = \frac{\mathcal{N}_A \mu}{M}.$$

$$n = \frac{6{,}02\ 10^{23} \times 8{,}9\ 10^{3}}{64.10^{-3}} = 8{,}4.10^{28}\ \mathrm{e^-.m^{-3}}.$$

On en déduit donc la vitesse de dérive des électrons $v = \frac{I}{n|e|S} = \frac{IM}{\mathcal{N}_A \mu |e| S}$.

L'application numérique donne :

$$v = \frac{10 \times 64.10^{-3}}{6{,}02\ 10^{23} \times 8{,}9\ 10^{3} \times 1{,}6\ 10^{-19} \times 10^{-6}}$$

$$v = 0{,}75\ \mathrm{mm.s^{-1}}.$$

La vitesse d'agitation thermique est donnée par la relation suivante pour les électrons de conduction dont on peut négliger les interactions et utiliser la formule du gaz parfait monoatomique soit $\frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$.

$$v_T = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mathcal{N}_A m}}.$$

L'application numérique donne :

$$v_T = \sqrt{\frac{3 \times 8{,}32 \times \times 300}{6{,}02.10^{23} \times 9{,}1\ 10^{-31}}}$$

$$v_T = 1{,}2.10^{5}\ \mathrm{m.s^{-1}}.$$

La vitesse de dérive v est donc très inférieure à la vitesse d'agitation thermique v_T.

2) En appliquant la deuxième loi de Newton à un électron de conduction, on obtient la relation suivante :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau}.$$

Cette équation admet comme solution particulière $\vec{v}_{lim} = \frac{-e\tau\vec{E}}{m}$.

✓ On ne s'intéresse pas à la solution générale de l'équation sans second membre qui tend vers zéro.

Le vecteur densité de courant électrique vaut $\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{nqe^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma\vec{E}$. On en déduit le temps de relaxation en fonction de la conductivité soit $\tau = \frac{m\gamma}{ne^2}$. L'application numérique donne :

$$\tau = \frac{9{,}1\ 10^{-31} \times 5{,}9\ 10^{7}}{8{,}4.10^{28} \times (1{,}6\ 10^{-19})^2} = 2{,}5.10^{-14}\ \mathrm{s}.$$

Le libre parcours moyen correspond à la distance moyenne entre deux chocs soit :

$$l = v_T \tau.$$

L'application numérique donne :

$$l = 1{,}2.10^{5} \times 2{,}5.10^{-14} = 3.10^{-9}\ \mathrm{m}$$

$$l = 3\ \mathrm{nm}.$$

Cette distance est très supérieure à la taille du réseau cristallin qui est de l'ordre de 0,1 nm.

3) On reprend l'équation précédente en remplaçant le champ électrique constant par le champ sinusoïdal soit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e\vec{E}}{m}.$$

Pour résoudre, on se place en notation complexe soit :

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}.$$

On obtient l'expression de la vitesse en notations complexes :

$$\underline{\vec{v}} = \frac{-e}{m\left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)}\underline{\vec{E}} = \frac{-e\tau}{m(j\omega\tau + 1)}\underline{\vec{E}}.$$

On obtient donc l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime sinusoïdal établi soit :

$$\underline{\gamma} = \frac{-e\tau}{m(j\omega\tau + 1)}.$$

4) Afin de pouvoir assimiler la conductivité à celle du régime permanent, il faut que $\omega\tau \ll 1$.

Donc la pulsation doit vérifier :

$$\omega \ll \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2{,}5.10^{-14}} = 4.10^{13}\ \mathrm{rad.s^{-1}}.$$

Il faut donc que la fréquence soit très inférieure à $f \ll f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 6{,}4.10^{12}\mathrm{Hz}$.

B – Travaux dirigés

EM12 – Résistances

1) La résistance est définie par $R = \frac{U}{I}$.

Dans le cas du cylindre, le problème est à symétrie cylindrique et donc le vecteur densité de courant s'écrit sous la forme suivante $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$. On calcule le courant total I à travers le cylindre de rayon r et de hauteur h et on obtient :

$$I = \iint \vec{j}.\overrightarrow{dS} = \iint j(r).dS = j(r)\iint dS$$

$$I = j(r)2\pi rh.$$

La différence de potentielle entre les deux cylindre vaut :

$$U = \int_a^b \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_a^b E.dr = \int_a^b \frac{j(r)}{\gamma}dr$$

$$U = \frac{I}{2\pi h\gamma}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi h\gamma} ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

On peut ainsi en déduire l'expression de la résistance R :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi h\gamma}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

2) L'analogie se fait avec la loi de Fourier et la loi d'Ohm locale. On a donc :

La loi de Fourier qui s'écrit :

$$\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{grad}T.$$

La loi d'Ohm locale qui est :

$$\vec{j} = -\gamma\overrightarrow{grad}V.$$

L'analogie est donc la suivante :

$$potentiel\ V \leftrightarrow température\ T$$
$$courant\ I \leftrightarrow\ flux\ thermique\ \phi.$$

On peut donc définir la résistance thermique par analogie soit :

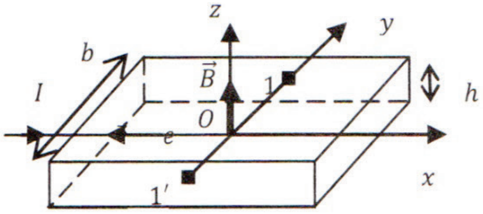
$$R_{th} = \frac{T_a - T_b}{\phi}.$$

Dans le cas du cylindre la résistance thermique vaut :

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi h\lambda} ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

EM13 – Effet Hall

1) Le vecteur densité de courant est donné par $\vec{j} = -ne\vec{V}$.
Le vecteur vitesse des électrons est donc égal à $\vec{V} = -\frac{\vec{j}}{ne}$.



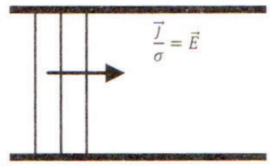
En présence du champ magnétique l'électron est soumis à la force de Lorentz due au champ extérieur $\vec{B}$ qui est de la forme $\overrightarrow{F_B} = -e\vec{V} \wedge \vec{B}$.
Cette force dévie donc les électrons vers la face avant A'. Il y a donc accumulation d'électrons sur cette face et défaut d'électrons sur la face arrière. Après un régime transitoire un champ électrique apparaît pour compenser la force de Lorentz magnétique. On a donc :
$$-e\vec{V} \wedge \vec{B} - e\overrightarrow{E_H} = 0.$$
Le champ de Hall est donc égal à :
$$\overrightarrow{E_H} = -\vec{V} \wedge \vec{B} = \frac{1}{ne}\vec{j}\wedge\vec{B}.$$
Le champ de Hall est porté par l'axe Oy et on a donc $\overrightarrow{E_H} = -\frac{jB}{ne}\vec{y}$.

2) La différence de potentiel est égale à :
$$U_H = V(1) - V(1') = \int_{A'}^{A} \overrightarrow{E_H}\,.\,\overrightarrow{dl}$$
$$U_H = \int_{A'}^{A} -\frac{jB}{ne}\vec{y}\,.\,(dy)\vec{y} = \int_{\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}} -\frac{jB}{ne}dy$$
$$U_H = \frac{jBb}{ne}.$$
Le courant I s'écrit en fonction de la densité volumique de courant par $I = jbh$.
On a donc la différence de potentiel qui vaut $U_H = \frac{IB}{hne} = \frac{C_H}{h}IB$.
En identifiant ace l'expression donnée, on trouve $C_H = \frac{1}{ne}$.
L'application numérique donne :
$$U_H = \frac{375.10^{-6}}{0{,}3.10^{-3}}0{,}1 \times 1 = 0{,}125 \text{ V}.$$
La densité volumique n vaut :
$$n = \frac{1}{C_H e}$$
$$n = \frac{1}{375.10^{-6}\times 1{,}6.10^{-19}} = 1{,}7.10^{22} \text{ m}^{-3}.$$

3) σ correspond à la conductivité du matériau. Le champ électrique total est égale à la somme du champ électrique dû au générateur qui produit le courant $\vec{E}'$ et au champ de Hall $\overrightarrow{E_H}$.On a donc :
$$\vec{E} = \vec{E}' + \overrightarrow{E_H}.$$

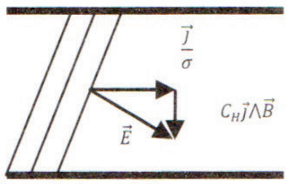
La loi d'Ohm s'écrit d'après l'énoncé par :
$\vec{j} = \sigma\vec{E}' = \sigma(\vec{E} - \overrightarrow{E_H}) = \sigma(\vec{E} - C_H\vec{j}\wedge\vec{B})$.

4) En l'absence de champ magnétique, on a dans le plan xOy de la plaque :



lignes équipotentielles

En présence du champ magnétique, on a dans le plan xOy de la plaque :



lignes équipotentielles

EM14 – Courant électrique dans un conducteur ohmique

1. On suppose pour simplifier que chaque électron se déplace à la vitesse $\vec{v}$.
Système : électron de masse m et de charge $q = -e$.
Référentiel terrestre galiléen.
Bilan des forces :

- force électrique : $q\vec{E} = -e\vec{E}$
- force de frottement : $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$
- On néglige le poids devant ces forces.

Principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = -\frac{e}{m}\vec{E}$$

Comme le champ électrique est constant, la solution est :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} + \vec{A}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\vec{A}$ un vecteur d'intégration qui peut être calculé par les conditions initiales.
Le deuxième terme correspond au régime libre qui tend vers 0 au bout de quelques τ.
On suppose que l'on se place en régime permanent. Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

On en déduit le vecteur densité volumique de courant :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = n(-e)\left(-\frac{e\tau}{m}\vec{E}\right) = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

Le conducteur ainsi modélisé vérifie la **loi d'Ohm locale** :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E}$$

La conductivité du cuivre est :

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

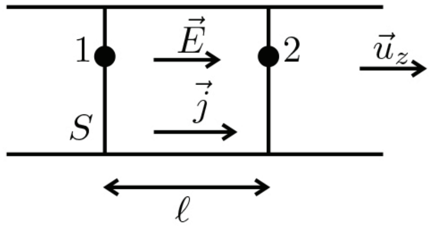
2. La masse volumique est : $\mu = \frac{M}{N_A}n$, d'où $n = \frac{\mu N_A}{M} = 8{,}4 \times 10^{28}$ m^{-3}.

La constante de temps est $\tau = \dfrac{m\gamma}{ne^2} = 2{,}5 \times 10^{-14}$ s.

Cette valeur est très faible ce qui justifie l'hypothèse faite précédemment du régime permanent.

3. On pose $\vec{E} = E\,\vec{u}_z$ et $\vec{j} = j\,\vec{u}_z$.

On considère un déplacement $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}z\,\vec{u}_z$ colinéaire au champ électrique $\vec{E}$ du point 1 au point 2.



On a : $\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\dfrac{\vec{j}}{\gamma}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\dfrac{j}{\gamma}\mathrm{d}z$.

On intègre entre le point 1 et 2 : $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{d}V = V_2 - V_1 = -\frac{j\ell}{\gamma}$.

Le conducteur est orienté vers la droite. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_z$.

L'intensité du courant électrique est : $I = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = jS$.

On a donc : $U = V_1 - V_2 = \dfrac{I}{S}\dfrac{\ell}{\gamma}$.

On en déduit la résistance du fil de cuivre définie par la loi d'Ohm en convention récepteur : $U = RI$.

La résistance du fil de cuivre de longueur ℓ et de section S est :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S}$$

4. Pour faire un bilan de puissance, on multiplie scalairement le principe fondamental de la dynamique en régime permanent par $\vec{v}$:

$$0 = q\vec{E}\cdot\vec{v} - \frac{m}{\tau}\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Le premier terme est la puissance algébriquement reçue du champ électrique :

$$P_{\text{élec}} = q\vec{E}\cdot\vec{v} > 0$$

Le deuxième terme est la puissance algébriquement reçue de la force de frottement :

$$P_{\text{frott}} = -\frac{m}{\tau}v^2 < 0$$

L'électron reçoit donc effectivement de la puissance du champ électrique qu'il perd aussitôt pour fournir de la puissance au métal.
Le champ électrique fournit donc effectivement de la puissance au métal : c'est l'effet Joule.

On considère maintenant un volume $\mathrm{d}\tau$ qui contient $n\,\mathrm{d}\tau$ charges mobiles.

Une charge fournit au métal une puissance : $\dfrac{m}{\tau}v^2 = q\vec{E}\cdot\vec{v}$.

L'ensemble des charges contenu dans le volume $\mathrm{d}\tau$ fournit donc à la matière une puissance : $\mathrm{d}P = \left(q\vec{E}\cdot\vec{v}\right)(n\,\mathrm{d}\tau)$. Comme $\vec{j} = nq\vec{v}$. On a donc : $\mathrm{d}P = \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$.
La densité volumique de puissance cédée par le champ électrique au métal est :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$$

C'est la **forme locale de la loi de Joule**.
La puissance cédée par le champ électrique au fil de cuivre est :

$$P = \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau = \frac{j^2}{\gamma}(S\ell)$$

Comme $I = jS$, on peut exprimer P en fonction de I :

$$P = \frac{I^2}{S^2\gamma}(S\ell) = \frac{\ell}{\gamma S}I^2 = RI^2$$

Cette puissance est appelée également puissance dissipée par effet Joule.