CN5 – Résolution de l'équation de diffusion

Capacité numérique : *à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.*

I – Étude théorique

I-1) Problème étudié

On s'intéresse ici à une barre métallique cylindrique dont la surface latérale est calorifugée. L'extrémité droite de la barre est en contact, supposé parfait, avec un thermostat de température $T_d = 20°C$. Avant le début de l'expérience, toute la barre est à l'équilibre thermique à la température T_d.

A l'instant initial, on place l'extrémité gauche de la barre en contact d'une source de chaleur de température $T_g = 40°C$. Ce contact est supposé parfait.

L'objectif de cette capacité numérique est de déterminer l'évolution de la température au sein de la barre au cours du temps.

I-2) Champ de température

On appelle $L = 0{,}5m$ la longueur de la barre.

Q1) Faire un schéma de la situation (on appellera (Ox) l'axe dirigeant la barre) et établir l'équation aux dérivées partielles vérifiées par la température dans la barre.

Q2) Au bout de combien de temps, en ordre de grandeur, peut-on considérer que le régime permanent est atteint au sein de la barre ?

Q3) Déterminer alors le champ de température en régime permanent dans la barre.

II – Étude numérique

II-1) Modélisation

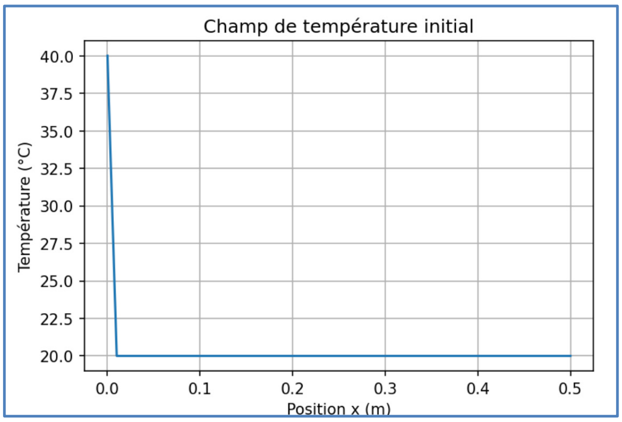
Nous allons dans la suite déterminer la température $T(x,t)$en tout point de la barre et à tout instant de l'expérience considérée. Pour cela, nous allons découper la barre en tronçons de longueur $dx = 1cm$. L'étude sera menée sur une durée de $\Delta t = 45min$, avec un pas temporel de $dt = 0.01s$.

La fonction $T(x,t)$ sera donc approximée par un tableau $T[i,j]$ de telle sorte que : $T[i,j] \simeq T(x = j \times dx, t = i \times dt)$. Autrement dit, chaque ligne du tableau correspond à un instant de l'expérience (la ligne i=0 correspondant à l'instant initial). Au sein d'une ligne, on parcourt la barre de gauche (j=0) à droite en incrémentant j.

II-2) Initialisation

Afin de représenter l'évolution de la température $T(x,0)$, on réalise l'algorithme suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np

#Q4) Représentation graphique du champ de température initial
dx=1e-2
dt=1e-2
L=0.5
Deltat=45*60

Nx=int(L/dx)+1
Nt=int(Deltat/dt)+1
x=[j*dx for j in range(Nx)]
t=[i*dt for i in range(Nt)]

T=np.zeros((Nt,Nx))
Tg=40 #on va travailler en °C (on peut aussie le faire en Kelvin)
Td=20

T[0,0]=Tg
for j in range(1,Nx):
    T[0,j]=Td

plt.clf()
plt.figure(1)
plt.plot(x,T[0,:])
plt.grid()
plt.xlabel("Position x (m)")
plt.ylabel("Température (°C)")
plt.title("Champ de température initial")
plt.show()
```



Q4) Dans cet algorithme, précisez le rôle de N_x, N_t, x et t.

II-3) Itérations

Q5) Remplir le tableau T de manière à imposer, à tout instant, les conditions aux limites aux deux extrémités de la barre.

Q6) En écrivant la formule de Taylor-Young pour $f(x+dx)\ et\ f(x-dx)$, en déduire que :

$$f''(x) \sim \frac{f(x+dx)+f(x-dx)-2f(x)}{dx^2}$$

Q7) La dérivée première de la température peut s'écrire :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j} \sim \frac{T[i+1,j]-T[i,j]}{dt} \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i,j} \sim \frac{T[i,j+1]-T[i,j]}{dx} \end{cases}$$

Donnez alors l'expression de $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j}$ en fonction de $T[i,j-1],\ T[i,j+1]\ et\ T[i,j]$

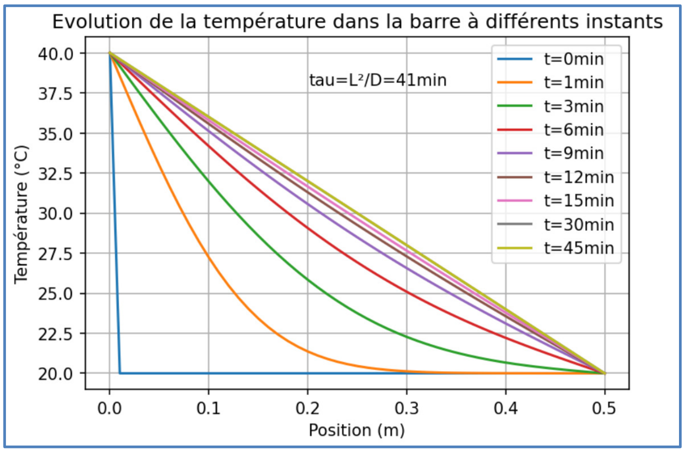
Q8) En déduire que la résolution de l'équation de diffusion thermique dans la barre se ramène au schéma numérique :

$$T[i+1,j] = T[i,j] + \frac{Ddt}{dx^2}(T[i,j+1]+T[i,j-1]-2T[i,j])$$

On peut montrer qu'un tel schéma numérique converge si $\frac{Ddt}{dx^2} < 0{,}5$. Avec les valeurs de dx et de dt choisies, cette condition est respectée pour un matériau de coefficient de diffusivité thermique usuelle $D = 1.10^{-4}m^2.s^{-1}$. On adoptera donc cette valeur de D pour la suite.

Q9) Implémenter ce schéma numérique pour réaliser le remplissage du tableau T dans son intégralité.

Q10) Pour les différents instants $t_{minutes} = \{0,1,3,6,9,12,15,30,45\}$, tracer sur un même graphique l'évolution de la température au sein de la barre. Quand est atteint le régime permanent ? Commenter.



III – Puissance volumique interne dans tout le conducteur

III-1) Problème étudié

On va supposer que la barre est un conducteur thermique mais aussi électrique de résistance R, de section S, de capacité thermique massique c, et de masse volumique ρ parcouru par un courant I, ainsi on aura un terme de création dans l'expression de l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K$$

On supposera qu'initialement toute la barre est à 20°c et que l'on maintient ses extrémités à cette température. On prendra $K = 1K \cdot s^{-1}$ comme valeur.

Q11) Donnez l'expression de K en fonction de R, I, S, L, ρ et c.

Q12) Pour les mêmes instants, tracer sur un même graphique l'évolution de la température au sein de la barre conductrice. Commenter.