CN3 – Boulet de Mersenne

Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, illustrer un effet lié au caractère non galiléen du référentiel terrestre

I – Présentation du problème

I-1) Paradoxe de Mersenne

Le problème du boulet de Mersenne est un problème de mécanique classique énoncé par Marin Mersenne en 1634. Il consiste à considérer un boulet de canon lancé verticalement et à imaginer l'endroit où il retombera : dans le fût du canon, à l'est ou à l'ouest de celui-ci, compte tenu de la rotation de la Terre ?

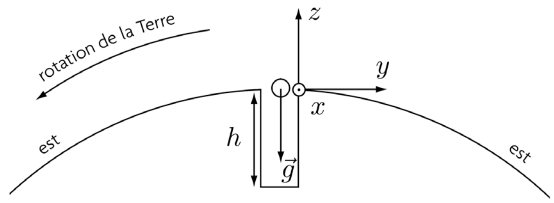
La force de Coriolis a pour effet de dévier vers l'ouest un projectile lancé verticalement vers le ciel, et vers l'est un projectile qui tombe. Intuitivement, on imagine donc que les deux déviations sont opposées et s'annulent, ce qui fait que le boulet retombera exactement dans le fût. Or, cela n'est pas.

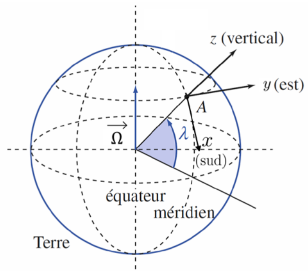
I-2) Situation

On lance un boulet depuis le sol vers le zénith. Si la terre était un référentiel galiléen, le boulet s'élèverait verticalement et retomberait à l'endroit précis d'où on l'a lancée. Cependant la terre forme un référentiel non galiléen en rotation uniforme à la vitesse angulaire : $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ autour de l'axe des pôles.

La force d'inertie d'entraînement étant incluse dans le poids, le boulet est soumis à son poids, la force de Coriolis. On négligera la poussée d'Archimède et la force de frottements fluides par rapport au poids.

On se place dans l'hémisphère nord et on repère le boulet par ses coordonnées (x, y, z) : sa côte z, sa position y vers l'est, sa position x vers le (sud). Pour la suite de l'exercice on supposera qu'il existe un puits de hauteur h où le boulet peut tomber à son retour sur terre.





I-3) Mise en équation

Q1) Appliquer le principe fondamental de la dynamique afin d'obtenir les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}\sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z}\cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y}\cos(\lambda) \end{cases}$$

Où λ est la latitude du point de lancement.

Pour déterminer la position du retour sur le sol on posera $z(t_f) = 0$.

II – Simulation informatique

II-1) Méthode d'Euler

En première année, vous avez pu voir la méthode d'Euler dans la résolution d'équation différentielle du premier ordre. On va réitérer ce procédé afin de résoudre le problème de Mersenne. Par exemple on pourra réécrire les différentes dérivées de la façon suivante :

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} \leftrightarrow \ddot{y}(t) = \lim_{dt\to 0}\frac{\dot{y}(t+dt) - \dot{y}(t)}{dt}$$

Si on note N le nombre d'itérations et que l'on pose : $\tau = \frac{t_f}{N}$ on pourra écrire :

$$\ddot{y}(i\tau) = \frac{\dot{y}\big((i+1)\tau\big) - \dot{y}(i\tau)}{\tau} \Rightarrow \dot{y}\big((i+1)\tau\big) = \dot{y}(i\tau) + \tau\ddot{y}(i\tau)$$

II-2) Principe de la simulation

Pour réaliser la simulation, on va créer neuf tableaux pour décrire le vecteur position, le vecteur vitesse et le vecteur accélération. Pour finir on affichera $z = f(x)$ et $z = f(y)$. On remarquera ainsi que le boulet dans l'hémisphère nord est dévié vers l'ouest lors de sa retombée.

Q2) En supposant que le temps de chute est identique dans un référentiel galiléen déterminer la valeur numérique de t_f.

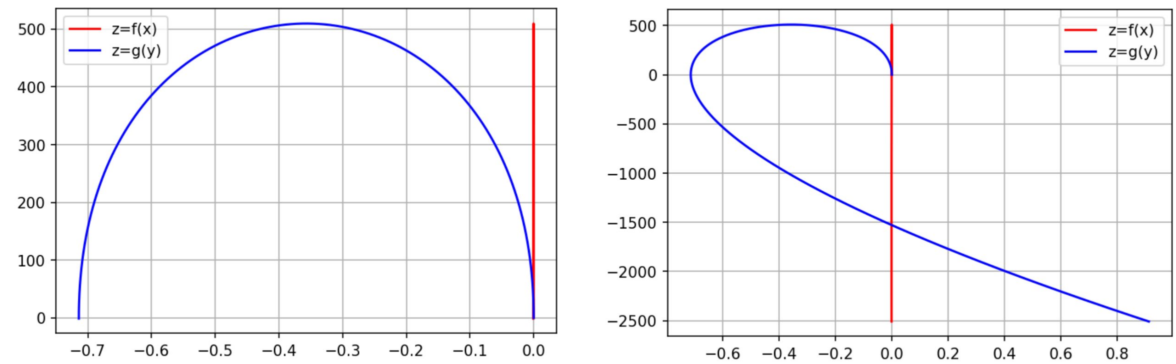
II-3) Algorithme

Pour réaliser la simulation numérique, on va utiliser le module numpy qui facilite l'écriture de l'algorithme :

```
from math import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def zenith(l,v0,tf):
    # constantes terrestres
    g=9.81 ; Omega=7.29E-5
    # latitude lambda
    S=sin(l) ; C=cos(l)
    # discretisation
    n = 20000
    tau = tf/n
    # Initialisation des listes
    listet=np.zeros(1+n)
    listex=np.zeros(1+n) ; listevx=np.zeros(1+n) ; listeax=np.zeros(1+n)
    listey=np.zeros(1+n) ; listevy=np.zeros(1+n) ; listeay=np.zeros(1+n) ;
    listez=np.zeros(1+n) ; listevz=np.zeros(1+n) ; listeaz=np.zeros(1+n)
    # Conditions initiales
    #listex[0]=0 #listevx[0]=0
    listeax[0]=2*Omega*S*listevy[0]
    #listey[0]=0 #listevy[0]=0
    listeay[0]=-2*Omega*(S*listevx[0]+C*listevz[0])
    #listez[0]=0
    listevz[0]=v0
    listeaz[0]=-g+2*Omega*C*listevy[0]
    # Calcul des différentes variables en fonction du temps
    for i in range(1,1+n):
        listet[i]=i*tau
        listevx[i]=listevx[i-1]+tau*listeax[i-1] ; listex[i]=listex[i-1]+tau*listevx[i-1]
        listevy[i]=listevy[i-1]+tau*listeay[i-1] ; listey[i]=listey[i-1]+tau*listevy[i-1]
        listevz[i]=listevz[i-1]+tau*listeaz[i-1] ; listez[i]=listez[i-1]+tau*listevz[i-1]
        listeax[i]=2*Omega*S*listevy[i]
        listeay[i]=-2*Omega*(S*listevx[i]+C*listevz[i])
        listeaz[i]=-g+2*Omega*C*listevy[i]
    plt.clf()
    plt.plot(listex,listez,label="z=f(x)",color='r')
    plt.plot(listey,listez,label="z=g(y)",color='b')
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.show()
    return

mersenne = zenith(pi/4,100,20.4)
```



Représentation de la trajectoire du boulet pour $t = t_f = 20{,}4s$ *et* $t = 35s$

II-4) Expérience de Reich

Du fait de la rotation de la Terre, les objets en chute libre sont déviés vers l'est au cours de leur chute. Ceci fut mis en évidence de manière expérimentale en 1833 par Ferdinand Reich (1799–1882), qui mesura la déviation sur une chute d'une hauteur de 158 m. À l'aide de l'algorithme, donnez la déviation mesurée par Reich dans le puits de Fribourg (ville allemande).

Q3) Retrouvez cette valeur de façon analytique en effectuant des approximations que l'on détaillera.

Q4) Comment nomme-t-on la déviation vers l'est dans l'hémisphère sud ?

III – Correction

Q1) PFD appliqué dans le référentiel terrestre :

$$m\overrightarrow{a_r} = \vec{P} + \overrightarrow{f_{ic}} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{v_r} = m\vec{g} - 2m\begin{pmatrix} -\Omega\cos(\lambda) \\ 0 \\ +\Omega\sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 2m\Omega\dot{y}\sin(\lambda) \\ m\ddot{y} = -2m\Omega\dot{x}\sin(\lambda) - 2m\Omega\dot{z}\cos(\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\Omega\dot{y}\cos(\lambda) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}\sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z}\cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y}\cos(\lambda) \end{cases}$$

Q2) Dans un référentiel galiléen :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \Rightarrow t_f = \frac{2v_0}{g} = 20{,}4s$$

Q3) Soit le système d'équation :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y}\sin(\lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x}\sin(\lambda) - 2\Omega\dot{z}\cos(\lambda) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{y}\cos(\lambda) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = -2\Omega\ddot{x}\sin(\lambda) - 2\Omega\ddot{z}\cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} = -4\Omega^2\frac{dy}{dt}\sin^2(\lambda) - 4\Omega^2\frac{dy}{dt}\cos^2(\lambda) + 2\Omega g\cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dt^3} + 4\Omega^2\frac{dy}{dt} = +2\Omega g\cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v_y}{dt^2} + 4\Omega^2 v_y = +2\Omega\, g\cos(\lambda)$$

$$\Rightarrow v_y(t) = A\cos(2\Omega t) + B\sin(2\Omega t) + \frac{g\cos(\lambda)}{2\Omega} \text{ où } \begin{cases} v_y(0) = 0 \\ a_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{g\cos(\lambda)}{2\Omega} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = \frac{g\cos(\lambda)}{2\Omega}\left(1 - \cos(2\Omega t)\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{g\cos(\lambda)}{4\Omega^2}\sin(2\Omega t) + \frac{gt\cos(\lambda)}{2\Omega} + C \text{ avec } C = 0 \text{ car } y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{g\cos(\lambda)}{2\Omega}\left(t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega}\right)$$

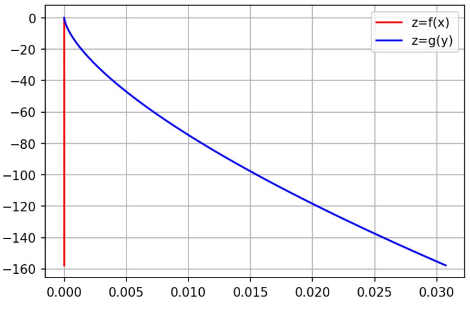
Or :

$$\Omega t \ll 1 \Rightarrow \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega} = t - \frac{4\Omega^2 t^3}{6} = t - \frac{2\Omega^2 t^3}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) \simeq \frac{g\Omega t^3\cos(\lambda)}{3}$$

Si on suppose que le temps de chute est équivalent à celui dans un référentiel galiléen : $t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}67s$

$$\Rightarrow y(t_f) \simeq \frac{g\Omega t^3\cos(\lambda)}{3} = +3{,}07cm$$



On retrouve bien, le même résultat que sur la simulation.

Q4) Cela reste la déviation vers l'est, car le $\cos(\lambda)$ ne change pas de signe.