VII – Equations différentielles

I – Solutions d'équations différentielles

Sans second membre	*Avec second membre*
Equations du premier ordre	
$\dot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = b$	$\dot{x} = a \Rightarrow x(t) = at + b$
$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = 0 \Rightarrow x(t) = ae^{-t/\tau}$	$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{h}{\tau} \Rightarrow x(t) = ae^{-\frac{t}{\tau}} + h$
Equations du second ordre sans terme d'ordre 1 et 0	
$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = bt + c$	$\ddot{x} = a \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$
Oscillateur harmonique	
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \\ ou\ x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) \\ ou\ x(t) = A'e^{j\omega_0 t} + B'e^{-j\omega_0 t} \end{cases}$	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + h \\ ou\ x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi) + h \\ ou\ x(t) = A'e^{j\omega_0 t} + B'e^{-j\omega_0 t} + h \end{cases}$
Les solutions hyperboliques	
$\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = Ach(\omega_0 t) + Bsh(\omega_0 t) \\ ou\ x(t) = a\,ch(\omega_0 t + \phi) \\ ou\ x(t) = A'e^{\omega_0 t} + B'e^{-\omega_0 t} \end{cases}$	$\ddot{x} - \omega_0^2 x = \omega_0^2 h$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = Ach(\omega_0 t) + Bsh(\omega_0 t) + h \\ ou\ x(t) = a\,ch(\omega_0 t + \phi) + h \\ ou\ x(t) = A'e^{\omega_0 t} + B'e^{-\omega_0 t} + h \end{cases}$
Oscillateur harmonique amorti : Régime pseudo-périodique, Q>1/2, λ<ω₀	
$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] \\ ou\ x(t) = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) \\ ou\ x(t) = e^{-\lambda t}[A'e^{j\omega t} + B'e^{-j\omega t}] \end{cases}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$	$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h\ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)] + h \\ ou\ x(t) = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \phi) + h \\ ou\ x(t) = e^{-\lambda t}[A'e^{j\omega t} + B'e^{-j\omega t}] + h \end{cases}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$
Oscillateur harmonique amorti : régime critique, Q=1/2 ou λ=ω₀	
$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow x(t) = e^{-\lambda t}[at + b]$	$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h\ \ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow x(t) = e^{-\lambda t}[at + b] + h$
Oscillateur harmonique amorti : régime apériodique, Q<1/2 ou λ>ω₀	
$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t}[Ach(\omega t) + Bsh(\omega t)] \\ ou\ x(t) = ae^{-\lambda t}ch(\omega t + \phi) \\ ou\ x(t) = e^{-\lambda t}[A'e^{\omega t} + B'e^{-\omega t}] \end{cases}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$	$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h\ et\ \frac{\omega_0}{Q} = 2\lambda$ $\Rightarrow \begin{cases} x(t) = e^{-\lambda t}[Ach(\omega t) + Bsh(\omega t)] + h \\ ou\ x(t) = ae^{-\lambda t}ch(\omega t + \phi) + h \\ ou\ x(t) = e^{-\lambda t}[A'e^{\omega t} + B'e^{-\omega t}] + h \end{cases}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$
Traitement du second membre	
Prenons l'exemple précédent avec une excitation sinusoïdale : $\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h\cos(\omega t) \Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)\ où\ x_p(t) = C\cos(\omega t) \\ \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h \Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t)\ où\ x_p(t) = h \end{cases}$	

II – L'outil « différentielle »

a) Notations d et δ

- Aspects mathématiques

Mathématiquement, si f est une fonction de la variable x, df représente la différentielle de la fonction f.

Si f(x) est une fonction d'une variable, alors on note, où f' (x) est la valeur la dérivée de f en x.

$$df = f'(x)dx = \frac{\partial f}{\partial x}dx$$

La notion de différentielle présente surtout un intérêt pour les fonctions de plusieurs variables. Si f(x,y) est une fonction de deux variables, alors on notera sa différentielle :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Une quantité de la forme Adx + Bdy est appelé forme différentielle.

Mais ce n'est pas forcément la différentielle d'une fonction : dans ce cas elle est qualifiée de forme différentielle non exacte, notée traditionnellement δg, en physique. Il n'existe alors pas de fonction g, écrire dg est une faute mathématique.

- Interprétation physique

À ces concepts mathématiques rigoureux, on peut associer des interprétations intuitives pour lequel df et δg sont considérées comme des quantités infinitésimales (ou élémentaires) :

- df représente une **variation** infinitésimale.
- δg représente une **quantité** infinitésimale.

Par exemple, si f(x, y) est une fonction de deux variables, alors l'écriture $df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ peut s'interpréter ainsi : à une variation infinitésimale (ou élémentaire) dx de la variable x et une variation infinitésimale dy de la variable y, correspondent une variation (infinitésimale) df de f ;

Remarque :

La notion infinitésimale renvoie à la notion de passage à la limite. Pour des variations même petites mais finies, on préférera la notation Δ. Il n'y a plus égalité dans ce cas.

$$\Delta f \sim \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

b) Exemple de différentielles

a. Classique

Soit $f(x,y) = \frac{y^3}{x}$ *alors* :

$$df = -\frac{y^3}{x^2}dx + \frac{3y^2}{x}dy$$

b. Différentielle logarithmique

Dans cette situation, on calcule la différentielle du logarithme népérien de la fonction proposée. Ainsi :

$$\ln(f) = 3\ln(y) - \ln(x)$$

$$\Rightarrow d(\ln(f)) = -\frac{1}{x}dx + \frac{3}{y}dy$$

$$\Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dx}{x} + 3\frac{dy}{y}$$

Ce type de calcul est utile lorsqu'on recherche le taux d'erreur de f par exemple, ainsi en tenant compte que les causes d'erreur s'ajoutent :

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + 3\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$