

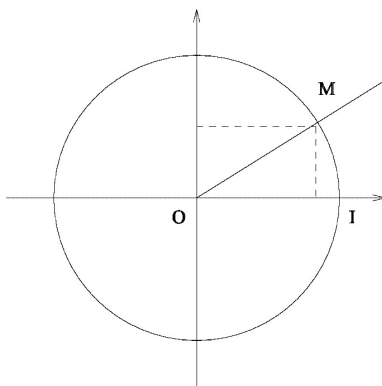
## III – Trigonométrie

### I – Le cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle  $C$  de centre  $O$  et de rayon 1.

- Le cosinus du nombre  $x$  est l'abscisse du point  $M$  de  $C$  telle que l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$  admette  $x$  comme mesure (en radians).
- Le sinus est l'ordonnée de ce même point  $M$ .
- La tangente et la cotangente de  $x$  sont les rapports (quand ils existent) :

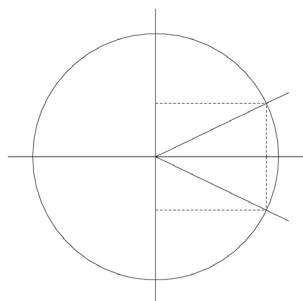
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } \cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



### II – Résultats élémentaires

- $\cos(x + 2\pi) = \cos x, \sin(x + 2\pi) = \sin x, -1 \leq \sin x \leq 1$  et  $-1 \leq \cos x \leq 1,$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, 1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

#### Angles opposés

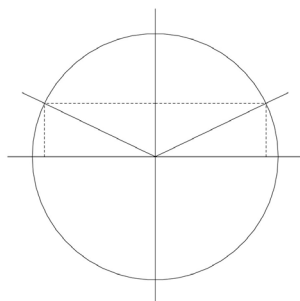


$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

#### Angles supplémentaires

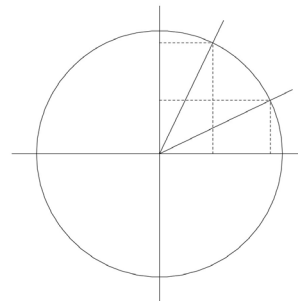


$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

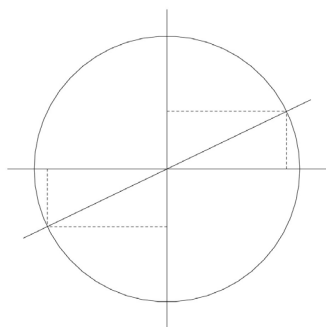
#### Angles complémentaires



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

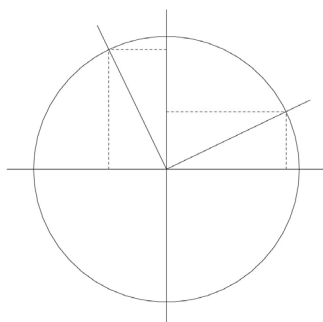
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan x$$

Angles qui diffèrent de  $\pi$ 

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

Angles qui diffèrent de  $\frac{\pi}{2}$ 

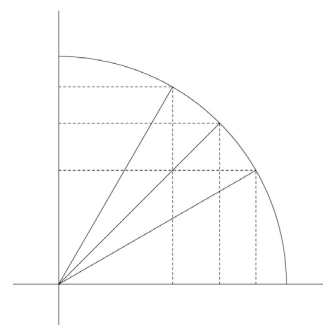
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan x$$

## Valeurs importantes

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N D



## III – Compléments

## Formules d'addition

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

## Formules de linéarisation

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

## Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

## Transformation de produits en sommes

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

## Transformation de sommes en produits

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

## Formules d'addition et de duplication

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

## Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , on obtient

$$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$