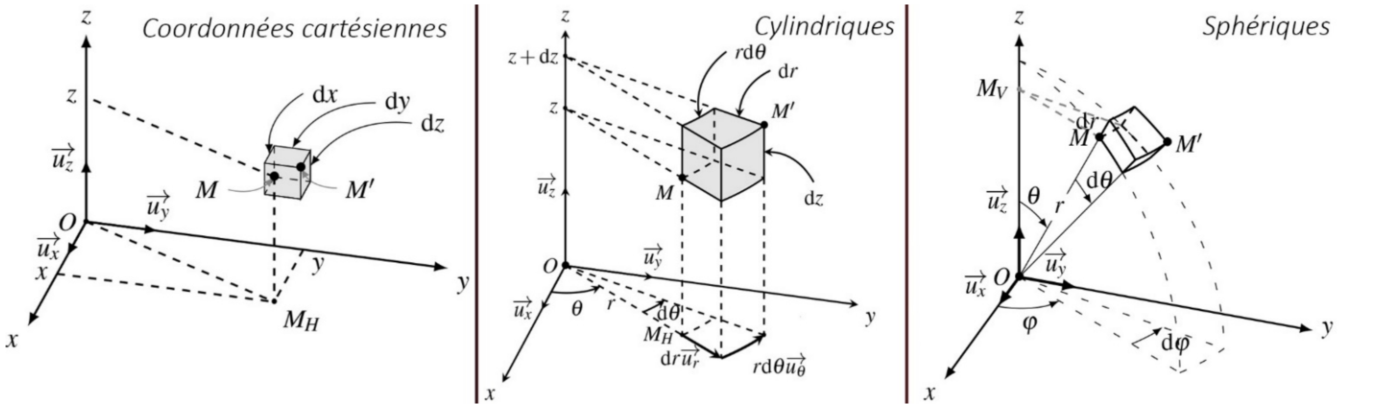
I – Opérateurs différentiels

I – Les systèmes de coordonnées

I-1) Liens entre coordonnées



Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} \{x, y, z\} \in \mathbb{R}^3 \\ OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z \in \mathbb{R} \\ x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta, \ z = z \\ \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z} \end{cases}$	$\begin{cases} r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta \\ \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} \end{cases}$

I-2) Déplacements élémentaires…

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\begin{cases} d\overrightarrow{OM} = dx\overrightarrow{u_x} + dy\overrightarrow{u_y} + dz\overrightarrow{u_z} \\ d^2S = dxdy \text{ ou } dxdz \text{ ou } dydz \\ d^3\tau = dxdydz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} \\ d^2S = drdz \text{ ou } \text{ ou } rd\theta dz \\ d^3\tau = rdrd\theta dz \end{cases}$	$\begin{cases} d\overrightarrow{OM} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\varphi\overrightarrow{u_\varphi} \\ d^2S = rdrd\theta \text{ ou } r^2\sin\theta d\theta d\varphi \text{ ou } r\sin\theta d\varphi dr \\ d^3\tau = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi \end{cases}$

II – L'opérateur gradient

II-1) Définition intrinsèque de l'opérateur gradient

L'opérateur gradient $\overrightarrow{grad}\,()$, aussi noté nabla $\vec{\nabla}\,()$, est utile dans de nombreux problèmes. Sa définition la plus générale (car intrinsèque) est :

$$df = \overrightarrow{grad}(f).d\overrightarrow{OM} = \vec{\nabla}(f).d\overrightarrow{OM}$$

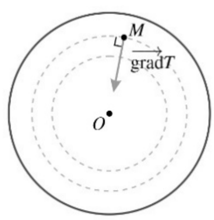
L'opérateur gradient est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$

II-2) Expressions du gradient (A connaître par cœur)

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$	$\overrightarrow{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$

II-3) Sens physique du gradient

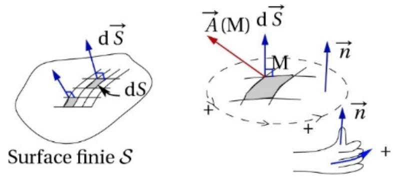
- Le gradient d'un champ scalaire f est perpendiculaire aux surfaces iso-f, c'est-à-dire aux surfaces f = cste.
- Le gradient d'un champ scalaire f est dirigé des zones où f prend des valeurs faibles vers celles où f prend des valeurs élevées.
- La norme du gradient d'un champ scalaire f est d'autant plus élevée que le champ P varie rapidement d'un point à un autre.



Le gradient de température est ainsi dirigé vers le centre de la terre (T=5000°C)

III – L'opérateur divergence

III-1) Flux d'un champ de vecteur



Le flux d'un champ de vecteur $\vec{A}$ à travers une surface S s'écrit :

$$\phi = \iint_S \vec{A}(M).\overrightarrow{dS}$$

Si le flux à travers une surface fermée est nul, on dit que $\vec{A}$ est à flux conservatif :

$$\oiint_S \vec{A}(M).\overrightarrow{dS} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}\ est\ \text{à}\ flux\ conservatif$$

III-2) Définition intrinsèque de l'opérateur divergence

Le flux de $\vec{A}$ sortant du volume élémentaire dτ est égal au produit de $\boldsymbol{div\vec{A}}$ par dτ :

$$\boxed{d\phi = div\ \vec{A}(M,t)\ d\tau = \vec{A}(M).\overrightarrow{dS}}$$

- La divergence de $\vec{A}$ est le flux de $\vec{A}$ par unité de volume
- div est une fonction de $\mathbb{R}^3$ ***dans*** $\mathbb{R}$

III-3) Théorème de Green-Ostrogradski

En intégrant la relation précédente sur un volume V non élémentaire on obtient le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_S \vec{A}(M).\overrightarrow{dS} = \iiint_{V/s} div\ \vec{A}\ d\tau$$

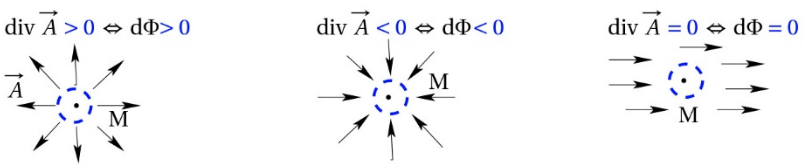
$$\Rightarrow Si\ \vec{A}\ est\ \text{à}\ flux\ conservatif, div\ \vec{A} = 0$$

III-4) Expressions de la divergence (Il faut connaître celle en cartésiennes)

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\boldsymbol{div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$	$div\ \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$div\ \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(A_\varphi)}{\partial\varphi}$

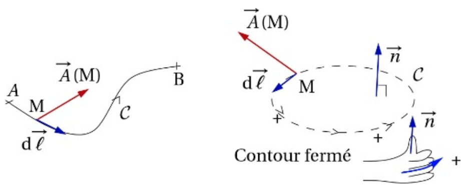
III-5) Exemples

En pointillés « bleus », on a représenté la surface à travers laquelle on calcule le flux.



IV – L'opérateur rotationnel

IV-1) Circulation d'un champ de vecteur



La circulation d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ le long d'un contour C est donné par :

$$C = \int_{contour} \vec{A}.\overrightarrow{dl}$$

Si la circulation le long d'un contour fermé est nulle on que $\vec{A}$ est à circulation conservative :

$$\oint_{contour} \vec{A}.\overrightarrow{dl} = 0 \Leftrightarrow \vec{A}\ est\ à\ circulation\ conservative$$

IV-2) Définition intrinsèque de l'opérateur rotationnel

La circulation de $\vec{A}$ le long d'un contour élémentaire orienté qui délimite la surface élémentaire orientée $\overrightarrow{dS}$ est égale à :

$$\boxed{dC = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}.\overrightarrow{dS} = \vec{A}.\overrightarrow{dl}}$$

- Le rotationnel est la circulation par unité de surface
- $\overrightarrow{rot}$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ $dans$ $\mathbb{R}^3$

IV-3) Théorème de Stokes-Ampère

En intégrant la relation précédente sur une surface non élémentaire quelconque S orientée qui s'appuie sur un contour Γ orientée conjointement à S, on obtient le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_{S/c} \overrightarrow{rot}\,\vec{A}.\overrightarrow{dS}$$

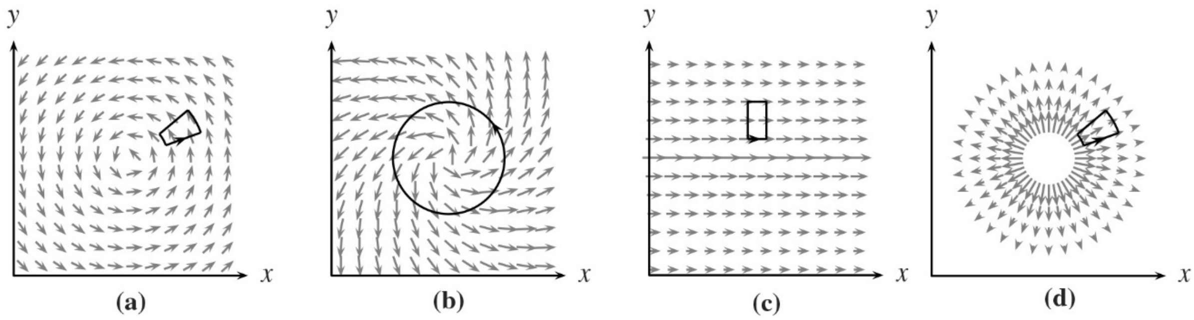
$$Si\ \vec{A}\ est\ à\ circulation\ conservative\ :\ \overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$$

IV-4) Expressions du rotationnel (Il faut savoir retrouver celles en cartésiennes)

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\overrightarrow{\boldsymbol{rot}}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \vec{\nabla}\wedge\vec{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}$

IV-5) Exemples

On a représenté en noir foncé, un contour pour calculer la circulation de $\vec{A}$.



- Pour (a) et (b) $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} \neq \vec{0}$ et il est dirigé suivant $+\overrightarrow{u_z}$
- Pour (d) $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$
- Pour (c), les flèches représentant $\vec{A}$ n'ayant pas toute la même longueur $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} \neq \vec{0}$ et dans la zone du contour il est dirigé suivant $\overrightarrow{u_z}$. Si elles avaient eu la même longueur alors, on aurait eu $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{0}$.
-

V – Laplacien scalaire

V-1) Définition

On définit le laplacien scalaire du champ scalaire f(M,t) par :

$$\boxed{\Delta f = div\left(\overrightarrow{grad}\, f\right) = \nabla^2 f}$$

Une valeur importante (en positif ou négatif) du laplacien signifie que localement, la valeur du champ scalaire est assez différente de la moyenne de son environnement.

- Δ est une fonction de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

V-2) Expressions du laplacien scalaire (A connaître en cartésiennes)

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\boldsymbol{\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$	$\Delta f = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\Delta f = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

VI – Laplacien vectoriel

VI-1) Définition

On définit le laplacien vectoriel par :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{A} = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\,\right) - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right)}$$

- $\vec{\Delta}$ est une fonction de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

VI-2) Expressions (A connaître en cartésiennes)

Cartésiennes	Cylindriques	Sphériques
$\boldsymbol{\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}}$	$\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - \dfrac{A_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \Delta A_z \end{pmatrix}$	$\vec{\Delta}\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_r - 2\dfrac{A_r}{r^2} - \dfrac{2}{r^2 sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta sin\theta) - \dfrac{2}{r^2 sin\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\ \Delta A_\theta - \dfrac{A_\theta}{r^2 sin\theta} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial A_r}{\partial\theta} - \dfrac{2\,cos\theta}{r^2\,sin^2\,\theta}\dfrac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \\ \Delta A_\varphi + \dfrac{2}{r^2\,sin\,\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \dfrac{2\,cos\theta}{r^2\,sin^2\,\theta}\dfrac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \dfrac{A_\varphi}{r^2\,sin^2\,\theta} \end{pmatrix}$

Heureusement dans les énoncés de concours, on vous donne souvent l'expression du Laplacien à appliquer à votre problème…Il a donc souvent une expression simplifiée.

VII – Quelques relations sur les opérateurs

A connaître	A utiliser
$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,f\right) = \vec{0}}$	$\overrightarrow{grad}(fg) = f\,\overrightarrow{grad}(g) + g\,\overrightarrow{grad}(f)$
$\boldsymbol{div\,\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = 0}$	$div\left(f\,\vec{A}\right) = f\,div\vec{A} + \left(\overrightarrow{grad}\,f\right).\vec{A}$
$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\,\vec{A}\,\right) - \vec{\Delta}\vec{A}}$	$\overrightarrow{rot}\left(f.\vec{A}\right) = f.\overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \left(\overrightarrow{grad}\,f\right)\wedge\vec{A}$
$\boldsymbol{\left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} = \overrightarrow{grad}\left(\dfrac{A^2}{2}\right) - \vec{A}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{A}}$	$div\,\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\,\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\,\vec{B}$
☺ ***Double produit vectoriel*** : $\boldsymbol{\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)}$	$\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \left(div\,\vec{B}\right).\vec{A} - \left(div\,\vec{A}\right).\vec{B} + \left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{B}$
	$\overrightarrow{grad}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{B}$