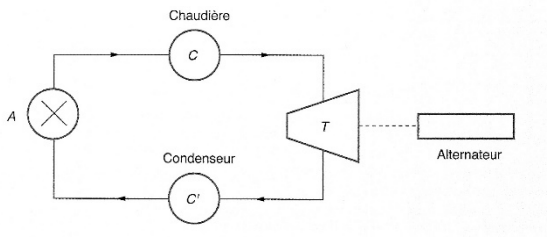
TH11 - Turbomachine avec changement d'état



On considère une installation comportant une chaudière C, une turbine T, un condenseur C' et une pompe A. Le fluide utilisé est l'eau, il décrit les cycles suivants :

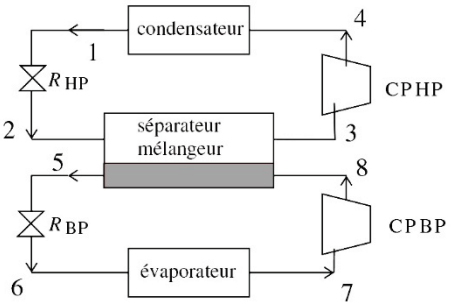
- La pompe A amène le liquide saturant, pris à la sortie du condenseur (état F à T_2, p_2), jusqu'à la pression p_1 de la chaudière. Cette opération est pratiquement adiabatique et on peut considérer qu'à la sortie de la pompe le fluide est liquide (état G) pratiquement à la température T_2 du condenseur ;
- L'eau est alors injectée dans la chaudière où elle s'échauffe, puis se vaporise de façon isobare (p_1). À la sortie de la chaudière, la vapeur est saturante sèche (titre de vapeur x = 1) à T_1 (état D) ;
- Elle subit ensuite une détente adiabatique et réversible dans une turbine T (partie active du cycle). À la sortie de la turbine, le fluide est à la température T_2 et à la pression p_2 du condenseur (point E), où il achève de se liquéfier de façon isobare (point F).

Données :

- $T_1 = 523$ K, $T_2 = 293$ K
- Enthalpie de vaporisation à 523 K : $l_1 = 1\,714\ kJ.kg^{-1}$.
- Pression de vapeur saturante à 523 K : $p_1 = 39{,}7.10^5\ Pa$.
- Pression de vapeur saturante à 293 K : $p_2 = 2\,300\ Pa$.
- Enthalpie massique du liquide saturant à 293 K : $h_l = 84\ kJ.kg^{-1}$.
- Enthalpie massique de la vapeur saturante sèche à 293 K : $h_v = 2\,538\ kJ.kg^{-1}$.
- Chaleur massique du liquide : $c_{liq} = 4\,180\ J.kg^{-1}.K^{-1}$.
- Volume massique du liquide : $u_{liq} = 10^{-3}\ m^3.kg^{-1}$.

a) Quelle est l'enthalpie massique de vaporisation du fluide à 293 K ?
b) Déterminer le titre en vapeur du fluide à la sortie de la turbine.
c) Déterminer l'enthalpie massique au point E.
d) Au point D, l'enthalpie massique vaut $2\,800\ kJ.kg^{-1}$, quel est le travail massique fourni par la turbine à l'alternateur ?
e) Justifier que le travail massique mis en jeu dans la pompe est négligeable devant celui fourni par la turbine.
f) Déterminer le rendement de l'installation et le comparer à celui du cycle réversible fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes. D'où provient cet écart ?
g) Quel débit massique de fluide est nécessaire pour obtenir une puissance convertie par l'alternateur de 100 kW ?

TH12 – Cycle industriel de réfrigération



Le condenseur et l'évaporateur sont des échangeurs permettant respectivement la condensation et l'évaporation totale du fluide qui les traverse ; dans les états 1 et 7, le fluide est respectivement à l'état de liquide saturant et de vapeur saturante sèche. Ces échangeurs sont calorifugés. Les évolutions du fluide y sont supposées réversibles. RHP et RBP sont des robinets de laminage, respectivement haute et basse pression, qui assurent, sans partie mobile, des détentes supposées adiabatiques :

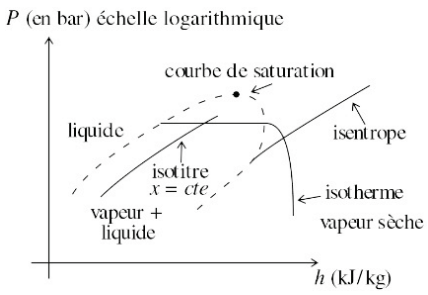
- Le fluide pénètre dans R_{HP} sous une haute pression égale à p_1 (état 1) et en ressort sous une pression intermédiaire p_2 (état 2).
- Le fluide pénètre dans R_{BP}, sous la pression intermédiaire égale à p_5 (état 5) et en ressort sous une basse pression p_6 (état 6). CPHP et CPBP sont des compresseurs, respectivement haute et basse pression, qui assurent des compressions également supposées adiabatiques et réversibles du fluide à l'état gazeux :
- Le fluide pénètre dans CPHP sous une pression intermédiaire p_3 (état 3) et en ressort sous la haute pression p_4 (état 4).
- Le fluide pénètre dans CPBP sous basse pression p_7 (état 7) et en ressort sous la pression intermédiaire p_8 (état 8).

À la sortie de R_{HP} (état 2), et à la sortie de CPBP (état 8), le fluide pénètre dans le mélangeur-séparateur (MS) et ressort à l'état de vapeur sèche saturante (état 3) vers CPHP et à l'état de liquide saturant (état 5) vers R_{BP}. L'échangeur MS est parfaitement calorifugé, dépourvu de partie mobile, et les évolutions du fluide y sont supposées réversibles.

Données :

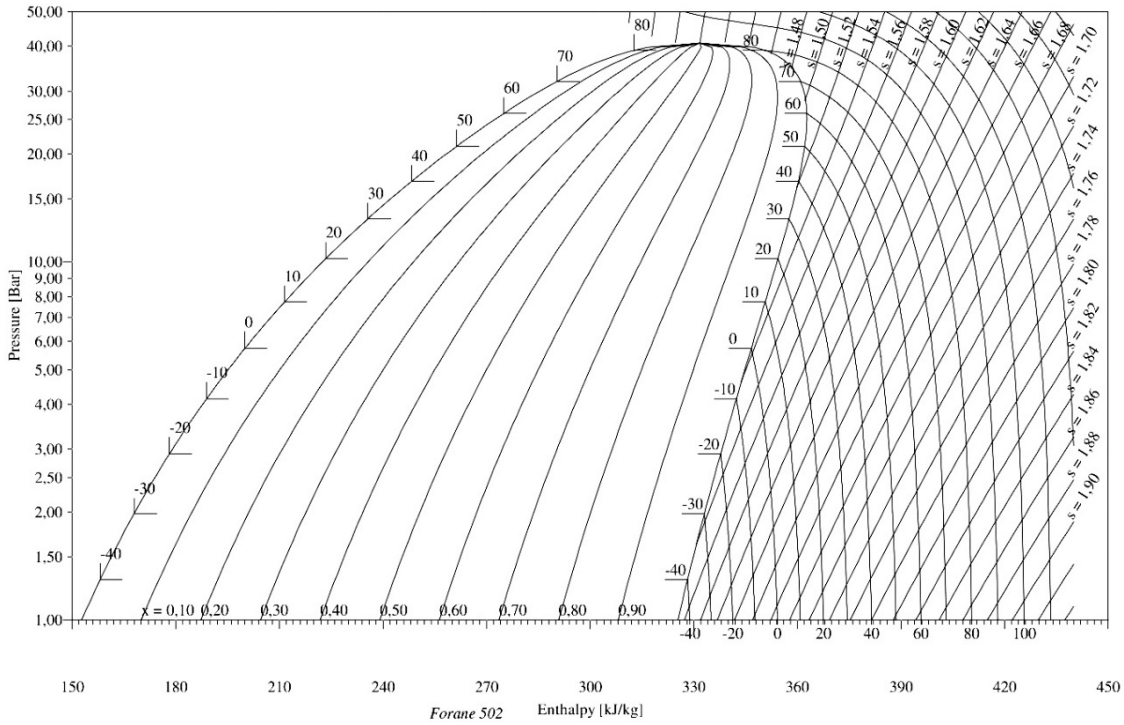
- $P_1 = 15\ bar, P_2 = P_8 = 4{,}0\ bar, P_6 = 1{,}5\ bar$.
- Débit du cycle basse pression ; $D_{BP} = 1{,}50\ kg.s^{-1}$ et débit du cycle haute pression : $D_{HP} = 2{,}43\ kg.s^{-1}$.
- Puissance thermique de réfrigération P = 240 kW (reçue par le fluide au niveau de l'évaporateur).

1°) Étude du diagramme des frigoristes : LnP = f(h)



L'abscisse est l'enthalpie massique h du fluide étudié, exprimée en kJ.kg^{-1}, avec une échelle linéaire. L'ordonnée est la pression P, exprimée en bar (1 bar = 10^5Pa), avec une échelle logarithmique.

Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ? On justifiera précisément la réponse fournie. Trouver l'équation d'une isotherme d'un gaz parfait dans le diagramme étudié ; y a-t-il accord avec les isothermes du diagramme réel du fluide Forane 502, représenté ci-dessous ?



2°) Étude du cycle haute pression (1→2→3→4)

Le fluide frigorigène étudié ici est le Forane 502. Tracer le cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme fourni ci-dessus. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 1, 2, 3 et 4 par lecture directe sur ce diagramme ainsi complété. Retrouver le titre massique en vapeur x du fluide dans l'état 2.

3°) Étude du cycle basse pression (5→6→7→8)

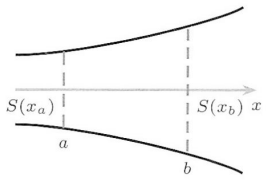
Tracer le cycle 5, 6, 7, 8 sur le diagramme fourni en annexe. Déterminer les valeurs de (h, P, T, x) pour les états 5 et 6 du fluide. Faire de même pour le fluide dans l'état 7 ; en déduire les valeurs pour l'état 8. Présenter, sous forme de tableau, les caractéristiques (h, P, T, x) de chacun des états 5, 6, 7 et 8.

4°) Bilan énergétique

Calculer la puissance mécanique échangée dans CPHP et CPBP. Calculer la puissance thermique échangée dans l'évaporateur et dans le condenseur. Calculer le COP (coefficient de performance) de l'installation frigorifique étudiée : $COP = \frac{utile}{coût} = \frac{P_{th,évaporateur}}{P_{méca}}$. Calculer le COP du cycle réfrigérant idéal de Carnot ayant mêmes températures de source froide et de source chaude. En déduire le rendement du cycle étudié par rapport au cycle de Carnot : $\eta = \frac{COP}{COP_{carnot}}$. Commenter.

TH13 - Écoulement supersonique

On étudie l'écoulement permanent d'un gaz sortant par exemple de la chambre de combustion d'un réacteur d'avion, et s'écoulant à grande vitesse dans une tuyère de section variable. L'évolution du gaz, considéré comme parfait, est adiabatique et supposée réversible. La section S(x) de la tuyère est une fonction de l'abscisse x repérée sur l'axe de révolution de la tuyère. L'action de la pesanteur est négligée. Les variations de section de la tuyère sont suffisamment douces pour que toutes les grandeurs intensives soient considérées comme uniformes sur une section droite : elles ne dépendent que de x. De plus, la vitesse de l'écoulement sera considérée comme parallèle à x. L'étude est menée dans le référentiel de la tuyère, supposé galiléen. Le but est de montrer que, si le profil de la tuyère est bien choisi, la vitesse de l'écoulement peut dépasser la célérité du son.



1°) En appliquant le premier principe de la thermodynamique à un système bien choisi compris entre deux sections d'abscisses x_A et x_B à l'instant t, montrer que $c_p(T_B - T_A) = -\frac{1}{2}(v_B^2 - v_A^2)$, v étant la vitesse, T la température et c_p la capacité thermique massique à pression constante du gaz.

2°) Exprimer la capacité thermique massique c_p, en fonction de la constante molaire des gaz parfaits R, de la masse molaire M du gaz et de l'exposant adiabatique γ. Montrer alors que dans la tuyère, on vérifie la relation :

$$\frac{1}{M}\frac{\gamma R}{\gamma - 1}dT = -\frac{1}{2}dv^2$$

3°) Donner la différentielle logarithmique de la loi de Laplace exprimée en variables (T,P).

(⚠ Si f est une fonction, d(ln f) est sa différentielle logarithmique)

4°) Exprimer la masse volumique du gaz en fonction de la température et de la pression. Donner la différentielle logarithmique de cette expression.

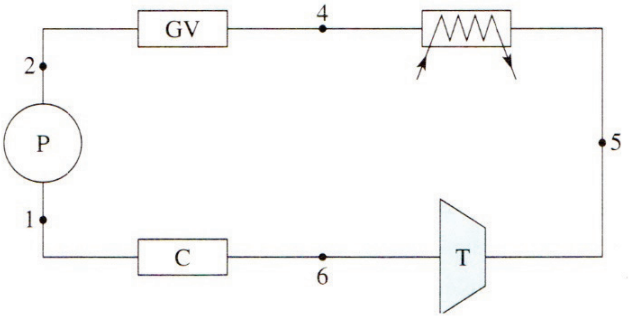
5°) Donner la différentielle logarithmique de la conservation du débit massique.

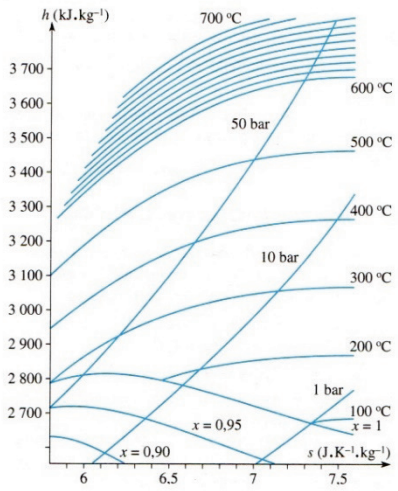
6°) On rappelle que la célérité c du son dans un gaz parfait est donnée par $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. À l'aide de toutes les relations différentielles établies précédemment, démontrer que :

$$\frac{dS}{S} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{v} = 0 \ (Théorème\ de\ Rankine - Hugoniot)$$

7°) On rappelle que $M = \frac{v}{c}$ s'appelle le nombre de Mach. En distinguant les cas M<1 et M>1, prévoir le sens de variation de la vitesse v(x) des gaz lorsque la tuyère est convergente (si S diminue en fonction de x) et lorsqu'elle est divergente. Les gaz chauds étant en écoulement subsonique à l'entrée de la tuyère, quel profil doit-on donner à celle-ci pour générer un écoulement supersonique en sortie ?

TH14 - Machine à vapeur





Dans une machine à vapeur, de l'eau circule en circuit fermé entre différents éléments et parcourt le cycle schématisé ci-contre. L'installation se compose des éléments suivants :

- Une pompe (P) qui réalise une compression supposé isentropique du liquide saturé.
- Un générateur de vapeur (GV) qui réalise à la pression de $p_2 = 50\ bar$ un échauffement 2-3, puis une évaporation 3-4. Le fluide est à l'état de liquide saturant en 3, à l'état de vapeur saturante en 4.
- Un surchauffeur (S), qui échauffe la vapeur à p_2. Cet échauffement est réalisé par échange thermique avec les gaz issus de la combustion.
- Une turbine (T) où le fluide subit une détente adiabatique réversible, sans variation notable d'énergie cinétique, en fournissant du travail mécanique. L'état 6 est à l'état de vapeur saturé à la pression $p_1 = 1bar$
- Un condenseur (C) dans lequel le fluide se condense de façon isobare à la pression p_1.

1°) Déterminer la température T_5 (à la sortie du surchauffeur) à l'aide du diagramme (h,s) de façon, que le fluide, en fin de détente, soit constitué de vapeur saturante, sans liquide.

2°) La condition précédente étant vérifiée, tracer l'allure du cycle sur un diagramme (T,s). Pourquoi sur ce diagramme 1 et 2 sont confondus.

3°) Déterminer l'énergie échangée par 1kg de fluide dans chaque partie de la machine. Calculer le rendement du moteur.

Données :

- Volume massique de l'eau liquide v(l)=10^{-3}m^3.kg^{-1} et pressions de changement d'état : 1bar et 50bar
- Chaleur latente de vaporisation de l'eau : 2256 kJ.kg^{-1} à 1bar, 1641 kJ.kg^{-1} à 50 bar.
- Capacité thermique massique moyenne de l'eau liquide dans le domaine de température utilisé : 4,45 kJ.K^{-1}.kg^{-1}

TH15 – Cycle de Rankine

Le cycle de Rankine est le cycle de base des centrales nucléaires. La pompe d'alimentation porte l'eau liquide saturante (état 0) de la basse pression p_0 du condenseur à la pression p_1 du générateur de vapeur (GV) de façon adiabatique réversible (état 1). L'eau liquide comprimée entre ensuite dans le générateur de vapeur, isobare, où elle est chauffée jusqu'à la température T_2 du changement d'état (état 1'), puis totalement vaporisée (état 2). La vapeur saturante sèche produite subit ensuite une détente adiabatique réversible (2-3) dans une turbine. Le fluide pénètre ensuite dans le condenseur isobare pour y être totalement condensé (état 0) à la température T_1. On appelle T_{cr} la température critique de l'eau. On négligera le travail consommé par la pompe devant les autres termes énergétiques de l'installation. On admet que $h_1 = h_0$. On donne : $t_1 = 30\ °C\ ; t_2 = 300\ °C\ et\ t_{cr} = 374\ °C$. La variation d'entropie massique pour un liquide dont la température évolue de T_1 à T_2 est $s_2 - s_1 = c_l Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$.

Données :

- Liquide saturant à $p_1 = 85{,}9\ bar\ et\ 300\ °C :\ s = 3{,}24\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}\ ;\ h\ =\ 1345\ kJ.kg^{-1}$
- Liquide saturant à $p_0 = 0{,}04\ bar\ et\ 30\ °C :\ s = 0{,}44\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}\ ;\ h = 126\ kJ.kg^{-1}$
- Vapeur saturante sèche à 85,9 bar et 300 °C : $s\ =\ 5{,}57\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}\ ;\ h = 2749\ kJ.kg^{-1}$
- Vapeur saturante sèche à 0,04 bar et 30 °C : $s\ =\ 8{,}46\ kJ.kg^{-1}.K^{-1}\ ;\ h = 2566\ kJ.kg^{-1}$.

1°) Représenter l'allure du cycle décrit par le fluide dans le diagramme (T,s).

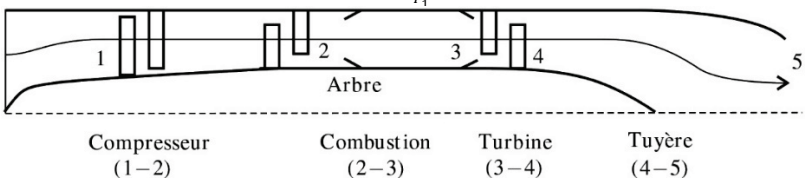
2°) Déterminer le titre massique et l'enthalpie massique de la vapeur à la sortie de la turbine.

3°) Calculer l'efficacité du cycle $\eta = -\frac{w_{turbine}}{q_{GV}}$.

4°) Dans quel état se trouve le fluide à la fin de la détente dans la turbine ? Pourquoi est-ce un inconvénient pour les parties mobiles de la machine ?

TH16 – Turboréacteur

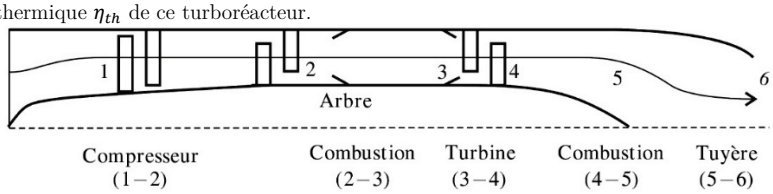
Un compresseur axial aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température ($T_3 = 1250\ K$). Après détente partielle dans la turbine axiale, l'air est envoyé dans la tuyère où la détente s'effectue jusqu'à la pression ambiante ($P_5 = 1{,}00\ bar$). Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puissance mécanique que lui fournit l'écoulement. On rappelle que $P_2 = P_3$. On donne le taux de compression du compresseur : $\frac{P_2}{P_1} = 6{,}15$.



L'air est assimilé à un gaz parfait. On donne $c_p = 1{,}00\ kJkg^{-1}.K^{-1}$ et $\gamma = 1{,}40$. L'énergie cinétique sera négligée, sauf à la sortie de la tuyère. Le débit massique d'air aspiré par le turboréacteur vaut $D_M = 50{,}00\ kg.s^{-1}$. Le compresseur aspire l'air ambiant défini par sa pression $P_1 = 1{,}00\ bar$ et sa température $T_1 = 288\ K$. Les évolutions à l'intérieur des turbomachines (compresseurs et turbines) et des tuyères sont supposées adiabatiques, réversibles. On négligera les pertes de charge de l'air à l'intérieur des chambres de combustion : les évolutions y sont isobares. On définit le rendement thermique du turboréacteur (noté η_{th}) comme étant le rapport entre l'énergie cinétique massique reçue par l'air, notée e_c, et la (ou la somme des) quantité(s) de chaleur massique(s) fournie(s) par la (ou les) chambre(s) de combustion, notée $q_{combustion}$.

1°) Calculer la température T_2 (sortie du compresseur), le travail indiqué massique de compression, la température T_4, la pression P_4 à la sortie de la turbine, la température T_5 et la vitesse c_5 à la sortie de la tuyère.

2°) Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la combustion, notée q_{23}. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th} de ce turboréacteur.



La configuration est identique à la précédente mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette seconde combustion, l'air est à nouveau chauffé jusqu'à la température de $T_5 = 1930\ K$. La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante ($P_6 = 1{,}00\ bar$). Comme précédemment la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique et la température de fin de première combustion aussi ($T_3 = 1250K$). On rappelle que $P_2 = P_3\ et\ que\ P_4 = P_5$.

3°) Calculer T_2, T_4, P_4, T_6 à la sortie de la tuyère et la vitesse c_6 à la sortie de cette tuyère.

4°) Calculer la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la seconde combustion, notée q_{45}. En déduire la quantité de chaleur massique fournie globalement à l'air, notée $q_{combustion} = q_{23} + q_{45}$. Calculer l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère. En déduire le rendement thermique η_{th}, de ce turboréacteur. Comparer les paramètres des deux turboréacteurs étudiés et conclure.

TH17 – Cycle Diesel

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes :

- Etat (1)→ état (2) : Compression adiabatique // Etat (2)→ état (3) : Dilatation à pression constante
- Etat (3)→ état (4) : Détente adiabatique // Etat (4)→ état (1) : Refroidissement à volume constant.

Chaque état est défini par la pression P_i, la température T_i et le volume V_i (i variant de 1 à 4). On appelle γ le rapport des chaleurs molaires $\frac{C_{pm}}{C_{vm}}$. On définit $a = \frac{V_1}{V_2}$ & $b = \frac{V_1}{V_3}$.

1°) Représenter le cycle sur un diagramme de Clapeyron.

2°) Donner les expressions de la pression, du volume et de la température pour les états (2), (3) et (4), en fonction de $P_1, V_1, T_1, a\ et\ b$.

3°) Calculer les travaux et chaleurs échangés pour toutes les transformations subies. Préciser notamment le sens des échanges.

4°) Proposer une expression pour le rendements d'un moteur fonctionnant suivant ce cycle, en fonction des travaux et chaleurs échangés. Donner l'expression du rendement η en fonction de γ, a et b.

Données numériques : $\gamma = 1{,}4\ , a = 9, b = 3$.

TH18 – Cycle d'Ericsson

Un gaz parfait circule en régime stationnaire dans une machine et subit le cycle de transformations suivant :

- Transformation 1-2 : compression réversible et isotherme, à la température T_{fr} de la pression p_1 à $p_2 > p_1$.
- Transformation 2-3 : échauffement isobare de T_{fr} à $T_{ch} > T_{fr}$;
- Transformation 3-4 : détente réversible et isotherme, à la température T_{ch}, de p_2 à p_1,
- Transformation 4-1 : refroidissement isobare de T_{ch} à T_{fr}.

Les transformations 2-3 et 4-1 ont lieu à l'intérieur d'un régénérateur : échangeur thermique où le fluide échange du transfert thermique avec lui-même. Le régénérateur est supposé isolé thermiquement de l'extérieur. On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

La turbine entraîne le compresseur, ainsi qu'un alternateur produisant de l'énergie électrique. On rappelle l'expression de l'entropie massique d'un gaz parfait en fonction de la température T et de la pression p :

$$s(T,P) = c_P \ln\left(\frac{T}{T_{réf}}\right) - \frac{R}{M}\ln\left(\frac{p}{p_{réf}}\right) + s(T_{réf}, p_{réf})$$

Où $T_{réf}\ et\ p_{réf}$ sont des grandeurs constantes, c_P la capacité thermique massique et M la masse molaire du gaz.

1°) Exprimer les transferts thermiques massiques $q_{12}\ et\ q_{23}$ reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine.

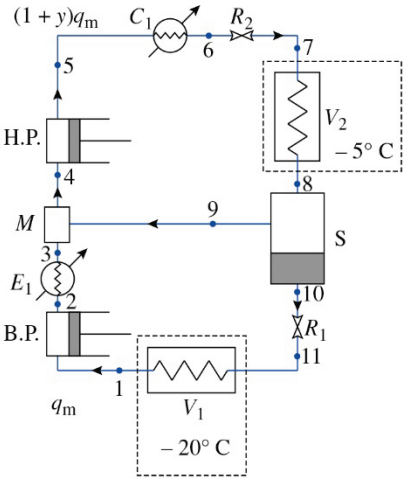
2°) Exprimer les travaux massiques utiles $w_{u,12}\ et\ q_{u,23}$ reçus par le gaz respectivement dans le compresseur et la turbine. En déduire le rendement de la machine.

3°) Commenter le résultat.

TH19 – Machine frigorifique à Ammoniac

On étudie une machine frigorifique à ammoniac qui permet de refroidir simultanément deux sources dont les températures sont différentes. La machine comporte deux étages, chacun d'eux comprenant un compresseur, un refroidisseur intermédiaire (noté E ou C), un détendeur R, et un évaporateur V. Les détendeurs et les compresseurs sont supposés parfaitement calorifugés. Les refroidisseurs et les évaporateurs sont isobares. Les deux étages communiquent par un séparateur S et un mélangeur M, qui sont isobares et parfaitement calorifugés. Sur la figure, les flèches bleues indiquent le sens de parcours du fluide dans les divers organes de la machine.

Les températures des deux sources froides sont respectivement égales à -5^oc et -20^oc. Le débit massique est égal à q_m dans l'étage basse pression, il est égal à $(1+y)q_m$ dans l'étage haute pression. Le premier effet frigorifique s'effectue à -20^oc dans l'évaporateur V_1, où la vaporisation est totale, le second à -5^oc dans l'évaporateur V_2, où la vaporisation est partielle. Le cahier des charges du dispositif prévoit l'absorption d'une puissance thermique $P_{qh} = 58{,}0\ kW$ à -5^oc et d'une puissance thermique $P_{qb} = 23{,}2\ kW$ à -20^oc. On pose $a = \frac{P_{qh}}{P_{qb}}$.



1°) Sachant que le refroidisseur E_1, le mélangeur M, le séparateur S et l'évaporateur V_2 sont isobares, quelle est la pression aux états 2, 3, 4, 9 et 8 ?

2°) Calculer les variations d'enthalpie massique (chaleurs latentes) de vaporisation à -5^oc et -20^oc, respectivement $l_{vap}(-5°c)$ et $l_{vap}(-20°c)$.

3°) Calculer les titres massiques en vapeur x_7 et x_{11} dans les états 7 et 11.

4°) On extrait du séparateur S la vapeur saturante sèche (état 9) et le liquide saturant (état 10) du mélange liquide-vapeur de l'état 8.

Exprimer la relation entre y et x_8, titre massique en vapeur dans l'état 8.

5°) Exprimer a en fonction de $l_{vap}(-5°c)$ et $l_{vap}(-20°c)$, x_8, x_7 et x_{11}.

6°) En déduire les valeurs numériques de x_8 et y ainsi que l'enthalpie massique h_8.

7°) Calculer l'enthalpie massique h_4 dans l'état 4.

8°) Exprimer le débit massique q_m en fonction de P_{qb}, h_1 et h_{11}. Calculer numériquement q_m.

9°) Calculer la puissance mécanique totale P_m mise en jeu dans les compresseurs ainsi que le coefficient d'efficacité global de l'installation, $\eta = \frac{P_{qb}+P_{qh}}{P_m}$.

10°) Tracer les cycles H.P et B.P dans un diagramme (Ln(p), h).

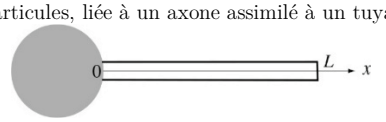
Données :

$t(°c)$	$P_s(kPa)$	$h_l(kJ.kg^{-1})$	$h_g(kJ.kg^{-1})$
-20	190,2	326,7	1653,0
-5	345,9	395,0	1672,6
20	857,2	511,5	1705,4

- État 1 : vapeur saturante sèche à -20^oc.
- État 2 : vapeur surchauffée à P_2 : $h_2 = 1740\ kJ.kg^{-1}$.
- État 3 : $t_3 = 20°c$; $h_3 = 1\,730\ kJ.kg^{-1}$.
- État 5 : $h_5 = 1\,820\ kJ.kg^{-1}$.
- État 6 : liquide saturant à $t_6 = 20°c$.
- État 7 : $t_7 = -5°c$.
- État 8 : mélange liquide-vapeur (vapeur humide) à $-5°c$, titre massique en vapeur x_8.
- État 9 : vapeur saturante sèche à $-5°c$.
- État 10 : liquide saturant à $-5°c$.
- État 11 : $t_{11} = -20°c$.

TH21 – Diffusion de particules dans un axone

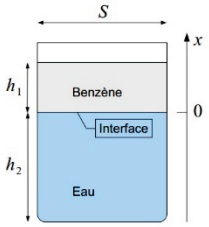
On considère une cellule sphérique, créatrice de particules, liée à un axone assimilé à un tuyau de longueur L.

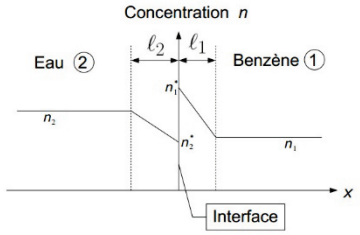


Cette diffusion de particules est caractérisée par le coefficient de diffusion D. Il y a consommation de particules le long du tuyau avec le coefficient α, en moles par secondes et par mètres, uniforme et constant.
La concentration c en particules dans l'axone vérifie $c(x = 0) = c_0$.
1°) Qu'est-ce qu'une loi phénoménologique ? Citer des exemples.
2°) Établir l'équation de diffusion vérifiée par c(x,t).
3°) Quelle est la longueur maximale de l'axone en régime permanent ?

TH22 – Partage entre deux solvants

Un bêcher de section d'aire S contient de l'eau sur une hauteur h_2 et du benzène sur une hauteur h_1 et on propose un modèle simplifié pour l'étude cinétique du transfert vers le benzène de l'iode I_2 contenu initialement dans l'eau. A un instant quelconque, on assimile la concentration de l'iode n(x) en fonction de x au profil indiqué ci-dessus : les concentrations dans l'eau et dans le benzène sont notées respectivement n_2 *et* n_1, et elles sont supposées uniformes hormis dans une mince couche de diffusion appelée couche limite ; les épaisseurs de ces couches limites sont notées l_2 dans l'eau et l_1 dans le benzène. Dans ces couches limites, la concentration varie affinement en fonction de x et l'on note n_1^* *et* n_2^* les concentrations dans le benzène et dans l'eau au niveau de l'interface à un instant quelconque t.





Concentrations à un instant t

On suppose que la quantité d'iode dans les couches limites est négligeable devant celle contenue dans le reste du solvant et on négligera également le volume de ces couches limites devant les volumes V_2 de l'eau et V_1 du benzène.

Les coefficients de diffusion de l'iode dans l'eau et dans le benzène sont notés respectivement D_2 *et* D_1. La pesanteur est supposée négligeable.

1°) Résolution de l'équation de la diffusion en régime permanent

a) La loi de Fick s'écrit : $\vec{j} = -D\,\frac{\partial n}{\partial x}\,\overrightarrow{u_x}$, en déduire l'équation de la diffusion en fonction de n et D.

b) Dans le cas d'un régime permanent, donner l'expression de n(x) et du flux de matière ϕ en fonction de $n(0) = n_1$, $n(l) = n_2$, D, S (surface traversée par les molécules), l (longueur où règne la diffusion).

2°) Justification du profil des concentrations

a) On donne $n_1\ (t = 0) = 0$ *et* $n_2\ (t = 0) = n_0$. A l'aide d'un bilan de matière, donner une relation entre n_1, n_2, n_0, h_1 & h_2.

b) On suppose que l'expression du flux de matière ϕ, établie en régime permanent, est valable à chaque instant t. Donner deux expressions de la quantité d'iode qui passe par unité de temps de l'eau vers le benzène.

3°) Calcul du temps caractéristique de diffusion

Dans toute la suite, afin d'alléger l'écriture, on prendra $D = D_1 = D_2$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{l_2}{l_1} = \alpha = 10$, et on ne conservera que $D, h = h_1, l = l_1$ comme paramètres.

a) On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface : alors $n_1^* = Kn_2^*$, K est la constante de partage. Déterminer n_1^* *et* n_2^* en fonction de n_2.

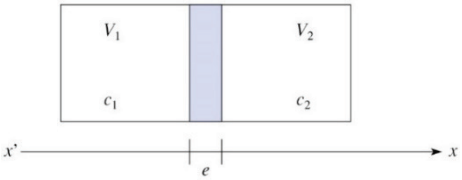
b) Donner l'équation différentielle vérifiée par $n_2(t)$. Montrer qu'il apparaît une constante de temps τ que l'on donnera en fonction des paramètres.

c) Calculez τ. Conclure

Données : $D = 2{,}0.10^{-9} m^2 s^{-1}, l = 2{,}0mm, K = 500, h = 5{,}00cm.$

TH23 – Diffusion de molécules à travers une membrane

La diffusion de molécules à travers une membrane est très utilisée dans des domaines très divers, en médecine par exemple. On considère le dispositif représenté ci-dessous :



Les deux compartiments, séparés par une membrane verticale poreuse, contiennent une même solution moléculaire, mais à des concentrations molaires différentes C_1 & C_2 $(C_1 > C_2)$. Leurs volumes constants seront notés respectivement V_1 & V_2. La membrane, de surface S, d'épaisseur e, comporte par unité de surface n pores cylindriques d'axe horizontal normal à la paroi. Les pores sont supposés identiques. Dans chacun d'eux s'établit un flux macroscopique de molécules suivant Ox, de densité moléculaire j_D, tendant à égaliser les concentrations. On admettra que j_D est donné par la loi de Fick : $j_D = -D\,\frac{\partial c}{\partial x}$. A une date t les concentrations, maintenues homogènes sur les volumes V_1 & V_2, sont donc $C_1(t)$ & $C_2(t)$. On notera $\Delta C = C_1(t) - C_2(t)$.

1°) En admettant que dans un pore la concentration soit une fonction affine de x, montrer que la densité de flux molaire J_m des molécules à travers toute la membrane est de la forme :

$$\overrightarrow{J_m} = K\Delta c\,\overrightarrow{e_x}$$

On donnera K, appelée perméabilité de la membrane, en fonction de n, D, e et r, rayon d'un pore.

2°) Calculer r numériquement.

Données : $K = 10^{-6} ms^{-1}, n = 10^6 pores\ par\ cm^2, e = 10\mu m, D = 10^{-9} m^2 s^{-1}$.

3°) Etablir l'équation différentielle donnant $\Delta C(t)$. On pourra poser $\frac{1}{\tau} = KS\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$

4°) Intégrer cette équation. Au bout de quelle durée la différence des concentrations est-elle égale au dixième de sa valeur initiale ?

Données : $V_1 = 2L, V_2 = 1L,\ S = 200cm^2$.

TH24 – Diffusion dans un cylindre

On considère un cylindre d'axe Oz, de longueur L très grande devant le rayon R_2. On creuse dans ce cylindre une cavité cylindrique de même axe, de rayon R_1, remplie d'un gaz avec une densité particulaire n_1 maintenue constante. On néglige les effets de bord ce qui revient à considérer la diffusion radiale entre $r = R_1$ et $r = R_2$. On note D le coefficient de diffusion. L'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit :

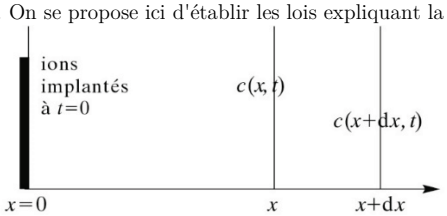
$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

1°) Démontrer l'équation aux dérivées partielles sur n dans le cas à une dimension (variable notée x) en régime variable. En déduire la généralisation de cette équation avec l'opérateur laplacien.

2°) On se place en régime stationnaire. Exprimer la densité particulaire n(r) pour r compris entre R_1 et R_2 en fonction de n_1, r, D, R_1 et j_{D1} (densité de flux de particules pour $r = R_1$). En déduire le vecteur densité de flux de particules en fonction de j_{D1}, R_1 et r.

TH25 – Diffusion d'atomes dans un solide

On utilise très souvent les phénomènes de diffusion pour la fabrication des transistors dans l'industrie microélectronique. La diffusion d'atomes tels que le Bore dans un substrat de silicium permet, par exemple, de modifier considérablement les propriétés électriques de ce dernier. Le plus souvent, les processus de diffusion ont lieu à des températures élevées. Ainsi, les atomes se trouvent « figés » lorsque le dispositif est ramené à température ambiante. La longévité du dispositif est ainsi assurée. On se propose ici d'établir les lois expliquant la diffusion des atomes dans les solides.



On suppose que la diffusion a lieu uniquement suivant la direction (Ox). Soit deux plans situés en x et en x+dx où existent, à l'instant t, respectivement les concentrations de particules $c(x,t)$ et $c(x + dx, t)$.

1°) Donner l'expression de la loi de Fick, liant le flux de particules J(x) et la concentration particulaire $c(x,t)$. Donner la dimension de J(x) et du coefficient de diffusion D.

2°) Établir, grâce à une loi de conservation, une autre relation liant J et c.

3°) En déduire l'équation de diffusion.

4°) À l'instant initial, la concentration d'atomes est nulle partout sauf sur une faible épaisseur située en x=0. Soit Q le nombre de moles de particules implantées à la surface du matériau par unité de surface sur cette très faible épaisseur. Au cours du processus de diffusion, la quantité de particules Q présentes dans le matériau reste constante (aucun atome ne quitte le matériau). On montre alors que la concentration de particules dans le matériau au cours de la diffusion est :

$$c(x,t) = B(t)e^{-\frac{x^2}{A(t)}}$$

À l'aide de l'équation de la diffusion, en utilisant les conditions initiales et la conservation de la quantité d'atomes pendant la diffusion, montrer que l'on peut écrire :

$$A = 4Dt \; et \; B(t) = \frac{K}{\sqrt{t}}$$

Où l'on exprimera K en fonction de Q et D. On rappelle que : $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

5°) Déterminer la profondeur de diffusion h pour laquelle $c(h,t) = \frac{c(0,t)}{e}$. (Dans cette expression, e est tel que $ln(e) = 1$). Au bout d'un temps t=1heure, la profondeur de diffusion des atomes considérés est h=5µm. Donner la valeur du coefficient de diffusion D des atomes de bore dans le silicium.

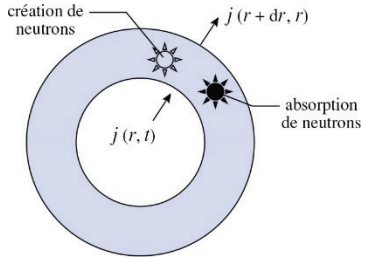
TH26 – Diffusion de neutrons dans un réacteur nucléaire

On étudie la diffusion de neutrons dans la matière fissile (du plutonium 239 par exemple) d'un réacteur. On suppose que le milieu dans lequel évoluent les neutrons est homogène et contient N_p atomes de plutonium par unité de volume. N_p est supposé uniforme et indépendant du temps.

On désigne par :

- n(M, t) le nombre de neutrons par unité de volume en un point M, à l'instant t ;
- $\vec{j}(M,t)$ le vecteur densité de courant de neutrons en M, à t .
- D le coefficient de diffusion.

Le réacteur est sphérique, de centre O, de rayon a, et on admet que le vecteur $\vec{j}$ s'écrit $\vec{j} = j\,\vec{e_r}$ ($\vec{e_r}$ vecteur unitaire radial) et que n et j ne dépendent que de la distance r et de t. On suppose pour simplifier que tous les neutrons ont des vitesses de même module moyen v et qu'ils parcourent une distance l entre deux chocs avec des noyaux de plutonium.



1°) Au cours des collisions, une fraction α des neutrons peut être absorbée par les noyaux ; en outre, certains neutrons absorbés conduisent à la fission du noyau de plutonium qui produit des neutrons appelés neutrons secondaires. Pour simplifier, on admet, qu'en moyenne, il y a K (K>1) neutrons créés pour un neutron absorbé, et on suppose que les neutrons secondaires ont même vitesse v que les neutrons initiaux.

Pour retrouver l'équation de diffusion on va faire un bilan de matière en coordonnées sphériques. En tenant compte du fait que la surface d'une sphère dépend de r, démontrer que la différence de flux entre la surface en r et la surface en r+dr peut s'écrire :

$$\phi(r,t) - \phi(r+dr,t) = -\frac{\partial(4\pi r^2 j)}{\partial r}dr$$

Montrer, alors que le nombre n de neutrons par unité de volume vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{1}{D}\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) + B^2 n$$

et exprimer le coefficient constant B^2 en fonction de D, l, α, v et K.

2°) On se place en régime indépendant du temps.

a) En remarquant que $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial n}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rn)}{\partial r^2}$ déterminer la fonction n(r).

On appellera n_0 le nombre de neutrons par unité de volume pour r=0.

b) On montre en théorie de la diffusion, qu'une condition simple rendant compte de la discontinuité du milieu pour r=a est d'imposer à n de s' annuler à une « distance extrapolée » égale à $b = a + 0{,}7\,l$ où l est la distance entre deux chocs. Montrer que ce régime de fonctionnement ne peut exister que si a possède une valeur critique a_0 qu'on exprimera en fonction de B et l.

c) Application numérique :

- $D = 20\,m^2 s^{-1}$; $\frac{1}{lN_p} = \sigma = 5{,}9\,10^{-28} m^2$ (section efficace de collision neutron, noyau de plutonium) ;
- $v = 2000\,m.s^{-1}$; K = 2,75 ; a = 0,3.
- Masse volumique du plutonium : $r = 19{,}74\,.\,10^3 kg\,.m^{-3}$; Masse atomique du plutonium $A = 239g\,mol^{-1}$;
- Nombre d'Avogadro $N_a = 6{,}02\,.\,10^{23}\,mol^{-1}$.

Calculer l, a_0 et la masse critique de plutonium qui correspond à a_0.

3°)

a) Prévoir qualitativement l'évolution en fonction du temps du flux de neutrons lorsque a est supérieur ou inférieur à la valeur critique a_0.

b) On cherche une solution de l'équation de diffusion en régime dépendant du temps sous la forme d'une fonction à variables séparées $n(r,t) = f(t)\frac{g(r)}{r}$. Cette fonction vérifie la condition $n(b,t) = 0$. Déterminer n(r,t) en fonction de n_0 densité de neutrons en r=0 à t=0. Retrouver le résultat du 3a)

TH27 – Perturbation sinusoïdale de concentration

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté D ; il est supposé indépendant de la concentration. Une solution sucrée possède, à l'instant t = 0, une concentration en sucre dépendant de l'abscisse x selon une loi de la forme :

$$c\,(x, t = 0) = c_o + c_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

où c_o , c_1 $avec\ c_1 < c_0$ et λ, sont des constantes.

L'évolution ultérieure, pour t > 0, de la concentration est cherchée sous la forme :

$$c\,(x,t) = c_o + f(t)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

1°) Démontrer, à l'aide d'un bilan de particules, l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration $c(x,t)$ appelée équation de la diffusion.

2°) Déterminer, en fonction de D et λ, l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction f(t). Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. Exprimer f(t) en fonction de c_1, t et d'un temps caractéristique τ à écrire en fonction de D et λ. Vérifier l'unité de τ. Quel sens concret donnez-vous au paramètre τ ?

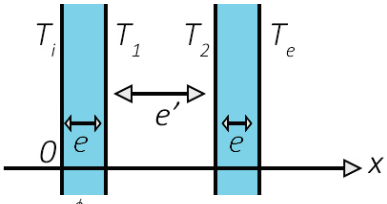
3°) Représenter graphiquement, pour t > 0 donné, l'évolution de la concentration $c(x,t)$ en fonction de x à deux instants différents. Tracer également la distribution limite $c\,(x,\infty)$.

TH31 – Double vitrage

On ne considère que des régimes permanents, indépendants du temps. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures $T_i = T(0)$ $et\ T_e\ avec\ T_e < T_i$.

1°) La paroi est une vitre simple d'épaisseur e. Évaluer le flux thermique ϕ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de $\lambda, S, e, T_i\ et\ T_e$. Calculer la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.

2°) La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique λ'. On ne tient compte que de la conduction.



a) Évaluer le flux thermique ϕ_2 sortant de la pièce, puis $\frac{\phi_2}{\phi_1}$.

b) A.N : $T_e = 270K$; $T_i = 292\,K$; $e' = e = 3\,mm$; $\lambda = 1{,}2\,Wm^{-1}\,K^{-1}$; $\lambda' = 0{,}025\,Wm^{-1}\,K^{-1}$.

- Calculer $\frac{\phi_2}{\phi_1}$ et les températures $T_1\ et\ T_2$ des faces en regard des deux vitres.
- Représenter graphiquement les variations de la température en fonction de x dans le double vitrage.

3°) En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire S, à la température T_s, échange avec l'air, à la température T_f, le flux thermique :

$$\phi = hS\,(T_s - T_f)\ avec\ h > 0$$

a) Quelle valeur implicite donnait-on précédemment à h lorsqu'on confondait $T_s\ et\ T_f$?

b) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique R_{th}. Donner l'expression de R_{th}.

c) Dans cette question, on notera les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la pièce $T_i'\ et\ T_e'$ et celle du verre, au contact de l'air extérieur $T_i\ et\ T_e$. Soit h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts verre-air. Les flux ϕ_1 et ϕ_2 des questions 1) et 2) deviennent respectivement ϕ_1' et ϕ_2'. Exprimer ϕ_1' et ϕ_2' en fonction de T_i', T_e', h_i, h_e et des paramètres $e, \lambda, \lambda'\ et\ S$.

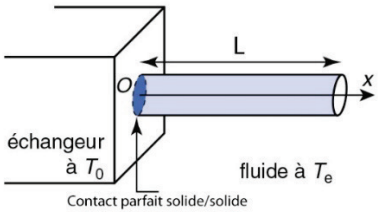
d) A.N. : $h_i = 10\,W.m^{-2}.K^{-1}\ et\ h_e = 14\,W.m^{-2}.K^{-1}$. Calculer $\frac{\phi_2'}{\phi_1'}$. Conclusion ?

TH32 – Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon a = 5 mm, de longueur L. En x = 0, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_o = 330\,K$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\,K$. On appelle :

- $\lambda = 400\,W.m^{-1}.K^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre
- $h = 12\,Wm^{-2}K^{-1}$ le coefficient de transfert conductoconvectif entre la barre de cuivre et l'air tel que le transfert thermique conductoconvectif puisse se mettre sous la forme : $\delta Q = hS(T_s - T_f)dt$

avec T_S la température du solide et T_f la température du fluide.



1°) On considère que la longueur de la tige est quasi-infinie.

- On se place en régime permanent démontrer que l'équation de diffusion s'écrit :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T}{\delta} = -\frac{T_e}{\delta}\ \text{où}\ \delta = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$$

- Déterminer numériquement le profil de température T(x) en tout point de la barre de cuivre.

2°) On remplace la tige précédente par une tige de longueur L = 20 cm. Déterminer numériquement T(x). Calculer T(L).

TH33 – Taille des mammifères marins

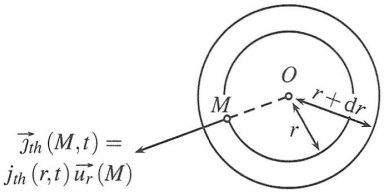
Les mammifères sont des animaux à sang chaud dont la température reste constante. Pour maintenir leur température constante, leurs cellules sont le siège de réactions chimiques exothermiques qui dégagent une puissance volumique a. La puissance totale cédée par le mammifère au niveau de sa surface sera notée P.

Les mammifères sont décrits comme des sphères de rayon R, plongés dans de l'eau de conductivité thermique λ et de température à l'infini T_∞ (c'est-à-dire loin des animaux).

1°) Equation de diffusion en coordonnées sphériques

a) Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système Σ compris entre deux sphères de rayon r et r+dr peut se mettre sous la forme :

$$\delta Q_e = -4\pi \frac{\partial (r^2 j_{th})}{\partial r} dr dt$$



b) En tenant compte de la loi Fourier : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\,\overrightarrow{u_r}$, démontrer que l'équation de diffusion dans l'eau peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r}$$

c) On donne l'expression du laplacien en coordonnées sphériques pour une fonction f(r) : $\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right)$. Retrouvez l'équation de la diffusion dans l'eau à l'aide de l'expression de l'opérateur.

2°) Calculer la température T(r) de l'eau autour d'un mammifère, en fonction de P, λ, r et T_∞. En déduire la température T_c de l'eau au contact de l'animal.

3°) Établir l'expression de la puissance thermique perdue par le mammifère en r = R, en fonction de T_c, λ, R et T_∞. En déduire que $R > R_{min}$ pour l'existence du mammifère marin, où l'on exprimera R_{min} en fonction de λ, T_c, a et T_∞. Faîtes l'application numérique. Conclure sur l'existence des petits mammifères marins, sachant que le plus petit est le marsouin du pacifique qui mesure à peu près 1m de long. (Celui-ci est en voie d'extinction à cause des filets de pêche…)

Données : $\lambda = 0{,}6\ W m^{-2} K^{-1}, T_\infty = 300k,\ T_c = 310K, a = 100\ W\ m^{-3}$

TH34 – Effet « cave »

L'atmosphère occupe le demi-espace x<0 et le sol le demi-espace x>0. La température au niveau du sol est : $T(0) = T_0 + a\cos(\omega t)$.

On utilisera la notation complexe : $\underline{T}(0) = T_0 + a\, e^{j\omega t}$

Pour le sol, on note :

- $\mu = 3{,}0\ 10^3\ kg.m^{-3}$ la masse volumique
- $c = 515\ J.kg^{-1}K^{-1}$ la capacité thermique massique
- $\lambda = 1{,}2 W K^{-1} m^{-1}$ la conductivité thermique

Et on pose : $\delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\mu c \omega}}$

1°) Démontrer l'équation de la diffusion thermique en coordonnées cartésiennes. On cherche une solution de la forme : $\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x) e^{j\omega t}$. En déduire que $\underline{f}(x)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} - \frac{2j}{\delta^2}\underline{f} = 0$$

En déduire que $\underline{f}(x)$ peut s'écrire :

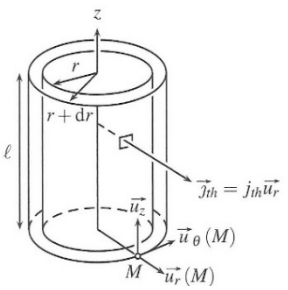
$$\underline{f} = \underline{A}\, e^{-\frac{1+j}{\delta}x} + \underline{B}\, e^{\frac{1+j}{\delta}x}$$

Donner alors T(x,t) en fonction de T_0, a, δ et ω.

2°) Calculer les variations de température à une profondeur de 50 cm pour une amplitude de variation journalière de la température T(0) de 15°C autour d'une température moyenne de 3°C en hiver. Commenter l'expression « Effet de cave ».

TH35 – Fil parcouru par un courant électrique

Un fil électrique de rayon R, de longueur infinie, de conductivité thermique λ, de conductivité électrique γ, de capacité thermique massique c, de masse volumique ρ, est parcouru par un courant électrique constant et uniforme d'intensité I. On note $\overrightarrow{j_{elec}}$ le vecteur densité de courant électrique. L'intensité I du courant est le flux de $\overrightarrow{j_{elec}}$. On montre dans le cours d'électromagnétisme que la puissance P délivrée par le champ électrique $\vec{E}$ par unité de volume est : $P = \gamma E^2$.



1°) On va effectuer un bilan d'énergie thermique en coordonnées cylindriques en présence d'une source caractérisée par la puissance électrique volumique P. Démontrer que l'énergie thermique échangée par le système Σ compris entre deux cylindres de rayon r et r+dr peut se mettre sous la forme :

$$\delta Q_e = -2\pi l \frac{\partial (r j_{th})}{\partial r} dr dt$$

En tenant compte de l'énergie thermique créée, et de la loi Fourier : $\overrightarrow{j_{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}\,\overrightarrow{u_r}$, démontrer que l'équation de diffusion peut s'écrire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)}{\partial r} + P$$

2°) Intégrer cette équation dans le cas où la température en surface du fil vaut la température extérieure T_o en régime stationnaire. Tracer T(r)

3°) L'intégrer dans le cas où le flux thermique latéral à l'interface entre le fil et l'air extérieur est modélisé par la loi de Newton : $\varphi = hS(T(R) - T_0)$. Tracer T(r).

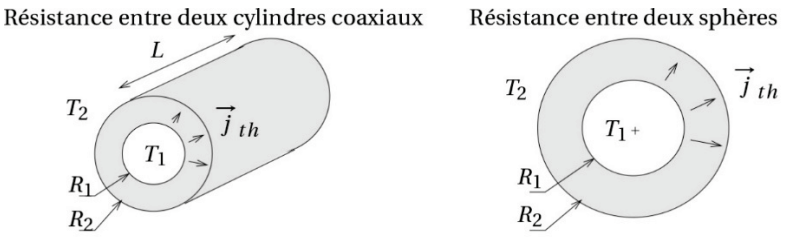
TH36 – Chauffage d'une pièce

On souhaite maintenir constante la température d'une pièce à $T_i = 20°\,C$. La résistance thermique des 4 murs et du sol est $R_{th,1} = 10\,10^{-3}KW^{-1}$. La résistance thermique du plafond et des tuiles est $R_{th,2} = 2{,}0\,10^{-3}KW^{-1}$. La température de l'extérieur est $T_e = 10°\,C$. On se place en régime stationnaire.

1°) Calculer la puissance thermique P à apporter à la pièce pour maintenir constante la température.

2°) On améliore l'isolation thermique en rajoutant une plaque de matériau isolant entre le plafond et les tuiles. Calculer la résistance thermique $R'_{th,2}$ de ce matériau afin de réaliser une économie de 50% sur la puissance thermique P.

TH37 – Résistances thermiques en coordonnées sphériques et cylindriques



On considère un matériau conducteur compris entre deux sphères (ou cylindres) de centre O, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues constantes à la température T_1 pour $r = R_1$ et à la température T_2 pour $r = R_2$. On se place en régime stationnaire.

1°) Montrer que l'on a conservation du flux thermique et on notera celle-ci :

$$\phi(r) = \phi_0$$

2°) En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ, R_1 et R_2 dans le cas de la sphère. Étudier le cas particulier où $R_2 = R_1 + e$ où $e \ll R_1$.

3°) En déduire la résistance thermique de ce matériau en fonction de λ, R_1 et R_2 dans le cas du cylindre. Étudier le cas particulier où R_1 et R_2 sont très proches.

TH38 – Thermorégulation type « Manchots »

Un manchot se modélise par un parallélépipède rectangle de section carrée de côté $a = 10\,cm$ et de hauteur $h = 50\,cm$. Le manchot maintient sa température interne $T_i = 37°c$ au moyen d'un apport métabolique $P_1 = 50\,W$ qui compense les pertes par conduction thermique au travers de son revêtement de plumes d'épaisseur $e = 1{,}0\,cm$ et de conductivité thermique.

1°) Déterminer la valeur de la conductivité thermique λ du revêtement de plume sachant que la température extérieure (y compris au niveau du sol) est $T_e = -20°C$.

2°) Pour faire face à des températures extrêmes, neuf manchots se serrent les uns contre les autres, formant un carré de 3×3 manchots. Le pavage est parfait, seules les faces supérieures, inférieures et latérales périphériques sont sujettes aux pertes thermiques.

De combien le métabolisme P_9 nécessaire au maintien de la température interne, rapporté à un manchot, est-il réduit lorsque les neuf manchots se serrent les uns contre les autres ?

TH41 – Corps noir dans un four

On place à l'intérieur d'un four un cube de côté a, de capacité thermique massique c et de masse m. Le four est maintenu à la température T_1. Le solide est initialement à la température T_0. Le four et le solide sont assimilés à des corps noirs. On suppose que la température est uniforme à l'intérieur du cube et que : $\frac{T_0 - T_1}{T_1} \ll 1$.

1°) Quelle est la condition sur les températures pour ne tenir compte que des transferts thermiques radiatifs ?

2°)

- Démontrer que la température du cube vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_1}{\tau}$$

Où l'on exprimera τ en fonction de m (masse du cube), c (capacité thermique massique du cube), σ (constante de Stefan), T_1 et S (la surface du cube).

- Déterminer l'évolution temporelle de la température T(t) du cube.

TH42 – L'effet de serre « atmosphérique »

On considère que le soleil se comporte comme un corps noir à la température T_s et que la terre se comporte comme un corps noir à la température T_0.

I – Sans tenir compte de l'atmosphère

1°) Quelle est l'expression de la puissance totale rayonnée par le soleil P_s en fonction de σ, T_s *et* R_s ?

2°) Quelle est l'expression de la puissance totale reçue par la terre P_T en fonction de σ, T_s, R_s, R_t *et* d ?

3°) Déterminer la température à la surface du soleil T_s sachant que le maximum du spectre qu'il émet se situe à $\lambda_m = 500nm$. Puis T_{e1} celle de la terre sans tenir compte de l'atmosphère.

II – En tenant compte de l'atmosphère et de l'Albédo

5°) En réalité le rayonnement émis par la terre est piégé par l'atmosphère et constitue ce qu'on appelle l'effet de serre. L'atmosphère laisse passer le rayonnement solaire qui est transparente dans le visible mais absorbe l'infrarouge. On peut considérer l'atmosphère comme un corps noir qui émet dans l'infrarouge.

Déterminer la température de surface de la terre T_{e1} en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.

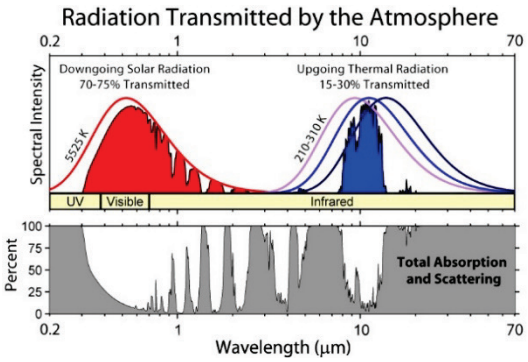
6°) La terre réfléchit une partie de l'énergie qu'elle reçoit de la part du soleil et absorbe le reste. La fraction réfléchie s'appelle l'albédo qu'on note A et dont on donne la valeur numérique A=0,31.

Déterminer la température de surface de la terre T_{e2} en tenant compte de l'atmosphère. Conclure.

III – Amélioration du modèle

7°) En s'aidant du document suivant, comment pourrait-on améliorer le modèle ?

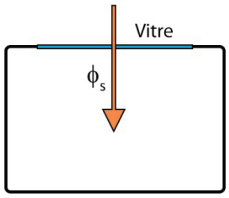
8°) Pourquoi le rejet par les activités humaines de méthane et de CFC dont la bande d'absorption est dans l'intervalle 8-12 µm doit-il être limité au maximum ?



Données : Rayon du soleil : $R_s = 700\,000\ km$,Rayon de la terre : $R_T = 6400\ km$, Distance terre-soleil : $d = 1ua = 150\ 10^6\ km$, Constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$, La loi de Wien : $\lambda_{max}T = 2898\ \mu m.K$

TH43 – Serre de jardin

On considère une vitre comme un corps gris : elle a les caractéristiques du corps noir pour des rayonnements incidents émis par la terre dans l'infra-rouge lointain et est totalement transparente pour les rayonnements solaires émis principalement dans le visible. Les murs sont assimilés à des corps noir. On étudie une pièce avec une ouverture vitrée. Vitres ouvertes, cette pièce a une température $\theta_0 = 25°c$.



On rappelle : La constante de Stefan : $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$ *et* la loi de Wien : $\lambda_{max}T = 2898\ \mu m.K$

On note ϕ_S le flux surfacique du rayonnement solaire incident arrivant sur la vitre.

1°) Évaluer la valeur de ϕ_S

2°) Quelle est la valeur λ_{max} associée au rayonnement thermique des murs. A quel domaine du spectre cela correspond-il ?

3°) Expliquer qualitativement pourquoi la vitre crée un effet de serre dans la pièce.

4°) On note ϕ_p le flux surfacique du rayonnement thermique de la pièce et ϕ_v le flux surfacique du rayonnement thermique de la vitre. Exprimer au niveau de la vitre et de la pièce deux relations correspondant aux bilans énergétiques. En déduire les températures de la pièce et de la vitre.

TH44 – Feuille d'aluminium entre deux parois planes

Deux parois planes, parallèles, de grandes surfaces, dont les températures sont celles de deux sources aux températures T_1 *et* T_2 constantes, définissent une enceinte vide, à l'intérieur de laquelle on dispose parallèlement aux parois un écran fait d'une feuille d'aluminium d'épaisseur e. Cet écran, de capacité thermique massique c, de masse volumique µ, de température initiale T_0, sépare l'enceinte en deux parties. Tous les solides sont considérés comme des corps noirs. On suppose que les températures T_1 *et* T_2 sont proches de T_0.

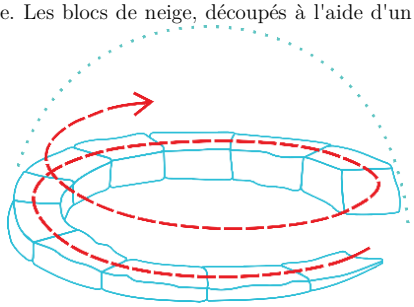
1°) Faire le bilan des flux surfaciques émis par les différentes surfaces.

2°) Montrer que la température T peut se mettre sous la forme : $T = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B$ où l'on exprimera A,B et τ en fonction de $T_1, T_2, T_0, \sigma(constante\ de\ Stefan), \mu, c$ *et* e.

TH45 – Igloo

Un igloo (mot inuktitut, signifiant « maison »), est un abri construit en blocs de neige. Ils ont habituellement la forme d'un dôme. En raison des excellentes propriétés isolantes de la neige, l'intérieur des igloos est étonnamment confortable. La neige utilisée pour faire un igloo doit avoir une résistance structurelle suffisante pour pouvoir être coupée et empilée de manière appropriée. La meilleure neige à employer à cette fin est une neige qui a été pressée par le vent, ce qui rend compacts les cristaux de glace. Les blocs de neige, découpés à l'aide d'un couteau, doivent être d'environ 1 mètre de long, 40 cm de haut et 30 cm de large. Il est conseillé de les poser en spirale pour faciliter la construction d'un dôme.

L'entrée doit être positionnée le plus bas possible pour éviter que le vent ne s'y engouffre.



On donne :

- Conductivité thermique de la neige $\lambda_{neige} = 0{,}25\ Wm^{-1}K^{-1}$; de l'air : $\lambda_{air} = 0{,}025\ Wm^{-1}K^{-1}$
- Résistance thermique entre deux sphères de rayon R_1 *et* R_2 : $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$
- La loi de Newton : $\phi_{th} = hS\left(T_{solide} - T_{fluide}\right)$ où $h_{neige-air} = 50\ Wm^{-2}K^{-1}$
- Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ \mathrm{Wm^{-2}}K^{-4}$ et température extérieure : $T_{ext} = -5°c$

Question ouverte : Estimer la température T_{int} dans un igloo qui contient un homme.