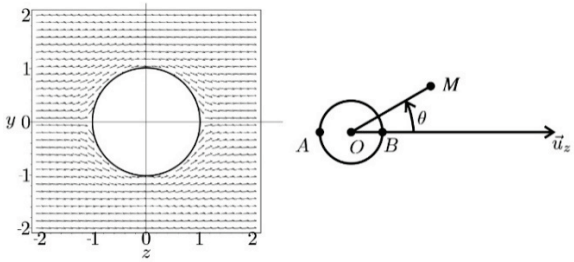
MF11 – Ecoulement perturbé par une sphère

On considère un écoulement permanent uniforme : $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_z}$. Dans cet écoulement, on place une sphère de centre O et de rayon R. On considère que l'écoulement est permanent, incompressible et irrotationnel. Le champ des vitesses ainsi obtenu est représenté sur la figure ci-dessous.



1°) Montrer que le potentiel des vitesses vérifie $\Delta\phi = 0$.

2°) On cherche le potentiel des vitesses sous la forme : $\phi = Ar\cos(\theta) + \frac{B}{r^2}\cos(\theta) + C$. Déterminer A et B. Exprimer le vecteur vitesse en fonction de v_0, r, R *et* θ.

3°) Dessiner l'allure des lignes équipotentielles.

MF12 - Atmosphère en équilibre

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité supposée uniforme $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{u_z}$, est dirigé suivant l'axe vertical ascendant Oz, et de sens opposé. Tous les mouvements étudiés s'effectuent suivant cet axe vertical. Les gaz ont les propriétés du gaz parfait. La constante des gaz parfaits est notée R. La masse molaire moyenne de l'air est notée M_e, sa pression P, sa température T et sa masse volumique μ. On désigne par P_o, T_o *et* μ_o les valeurs de P, T et μ au niveau du sol (où z = 0).

I) Atmosphère isotherme

On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère, dont on adopte dans un premier temps un modèle isotherme, de température uniforme To. On prendra $T_0 = 288\,K$.

a) Exprimer la masse volumique de l'air en fonction de P, R, T_0 *et* M_e.

b) Ecrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire l'expression de la pression P(z) en fonction de P_0, de la hauteur barométrique $H = \frac{RT_o}{M_e g}$ et de l'altitude z.

c) En prenant pour l'air une composition molaire de 20% en O_2 et de 80% en N_2, calculer la valeur numérique de H. A quelle altitude z_{50}^{iso} la pression est elle égale à $\frac{P_o}{2}$?

II) Équilibre polytropique

Le modèle d'atmosphère isotherme précédent n'est pas réaliste ; aussi, s'intéresse-t-on à l'équilibre polytropique : l'expérience montre que, jusqu'à une altitude d'environ 10 km, la température de l'air vérifie une loi linéaire du type :

$$T = T_0\,(1 - \alpha z)\ \text{où}\ \alpha = \frac{1}{z_0} > 0$$

La valeur expérimentale $z_0 \approx 33\,km$ justifie ce développement dans les dix premiers kilomètres de l'atmosphère.

a) Montrer que l'on peut écrire $P(z) = P_0\,(1 - \alpha z)^{\beta}$ *et* $\mu(z) = \mu_0\,(1 - \alpha z)^{\beta-1}$ où l'on donnera l'expression de β en fonction de H et de z_0.

b) À quelle altitude z_{50}^{iso} la pression est-elle égale à $\frac{p_0}{2}$? Comparer cette valeur à celle obtenue à la question 3. Ce résultat était-il prévisible ?

Rép : 1a) $\mu = \frac{PM_e}{RT_0}$ 1b) $p(z) = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$ 1c) $z_{50}^{iso} = 5{,}9km$ 2a) $Ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{M_e g}{\alpha RT_0}\ln(1 - \alpha z)$ et $= \mu_0(1 - \alpha z)^{\beta-1}$ 2b) $z_{50}^{poly} = 5{,}4km$

MF13 – Ecoulement entre deux cylindres

L'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques, de rayons R_1 *et* R_2, tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires Ω_1 *et* Ω_2 peut être décrit par le champ des vitesses :

$$\vec{v} = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

1°) Déterminer les constantes A et B en écrivant la continuité des vitesses du fluide et des cylindres en R_1 *et* R_2.

2°) Commenter le cas $\Omega_1 = \Omega_2$

3°) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

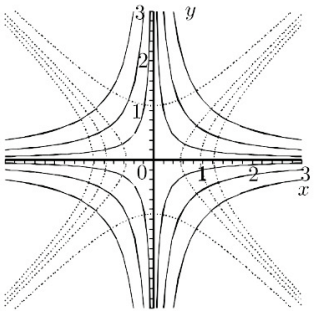
MF14 – Champ de vitesse bidimensionnel

On considère un écoulement stationnaire dont le champ de vitesses est de la forme :

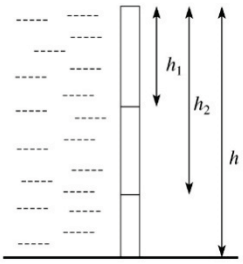
$$\vec{v} = -kx\,\overrightarrow{u_x} + ky\,\overrightarrow{u_y}$$

1°) Déterminer la nature de l'écoulement et le potentiel des vitesses ϕ . On prendra $\phi(x = 0, y = 0) = 0$.

2°) Calculer l'équation des lignes équipotentielles et des lignes de courant. Interpréter la figure suivante représentant les lignes équipotentielles et les lignes de courant.



MF15 - Poussée et centre de poussée sur un mur de barrage



1°) Calculer les longueurs h_1 *et* h_2 en fonction de h, assurant des forces horizontales de poussée égales sur les trois éléments du mur de barrage ci-contre. (L'axe Oz est vertical descendant et l'origine est pris en haut)

2°) On se propose de calculer la position des centres de poussée pour chaque portion de paroi.

a) Calculer directement le moment de la force par :

$$\overrightarrow{M_{0,k}} = \overrightarrow{OC_k} \wedge \overrightarrow{F_k} \text{ où } k = \{1,2,3\}$$

Où C_k est le centre de poussée.

b) Calculer le moment de la force de chaque paroi en sommant les moments élémentaires.

$$\overrightarrow{M_{0,k}} = \int_{h_A}^{h_B} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF} \text{ où } k = \{1,2,3\}$$

c) En déduire le centre de poussée de la paroi 1.

MF16 - Océan en équilibre isotherme

Considérons un océan en équilibre isotherme. La masse volumique de l'eau varie avec la pression selon la loi :

$$\rho = \rho_0\big(1 + a(p - p_0)\big) \text{ où } a = 10^{-10} Pa^{-1}.$$

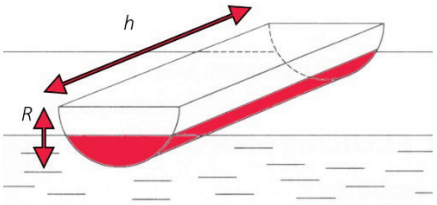
La profondeur est notée z. Pour z=0, $p=p_0$=1bar, & $\rho=\rho_0=10^3$kg.m^{-3}.

1°) Donnez la loi p(z).

2°) Que devient cette loi pour de faibles profondeurs.

3°) Quelle est l'erreur relative pour z=1000m entre les deux expressions de p(z).

MF17 - Oscillations d'un demi-cylindre flottant



Un demi-cylindre de rayon R, et de longueur h, flotte à la surface d'un liquide de masse volumique ρ.

1°) A l'équilibre le cylindre est enfoncé de $\frac{R}{2}$ dans le liquide. Démontrer alors que sa masse volumique μ peut s'écrire μ=aρ où a est une constante.

2°) Démontrer que la période des petites oscillations verticales de l'objet peut s'écrire $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ *et* $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R\gamma}}$ où γ est une constante.

MF18 – Expansion d'un fluide

On considère un fluide occupant une sphère de rayon r_0 de manière homogène, pour $t < 0$. À l'instant $t = 0$, on communique aux particules de fluide une vitesse initiale radiale v_{ini} proportionnelle à la distance initiale r_{ini} entre l'origine O et la particule de fluide : $v_{ini} = \frac{r_{ini}}{\tau}$, où τ est une constante. On suppose que pour t > 0 les particules conservent leur vitesse initiale.

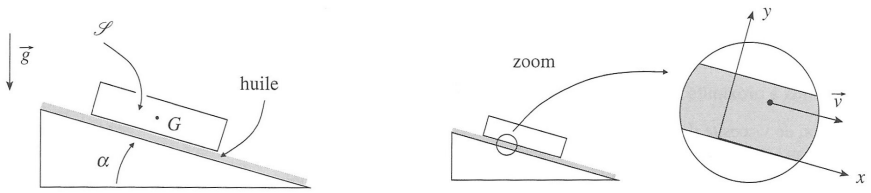
1°) Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(r,t)$ selon le point de vue d'Euler.

2°) Donner l'expression de l'accélération $\vec{a}(r,t)$.

3°) On suppose la répartition de masse homogène. Déterminer μ(t) en fonction de μ(0) de deux manières différentes.

MF21 - Plan incliné

Le solide parallélépipédique S de masse M, et de centre d'inertie G glisse sur un plan incliné à vitesse constante v_0, sous l'effet de son poids. Son glissement est facilité par une couche d'huile d'épaisseur constante e qui recouvre le plan incliné. L'huile est un fluide visqueux de viscosité η= 1 Pl, incompressible. On néglige l'effet de la pesanteur sur l'huile et on considèrera l'écoulement homogène, incompressible et irrotationnel.



1°) On étudie dans un premier temps la couche d'huile située sous le pavé.

a) Justifier que la vitesse d'une particule d'huile située sous le pavé est une fonction $\vec{v} = v(y)\overrightarrow{u_x}$.

b) On suppose que le champ des vitesses est de la forme $v(y) = Ay + B$, en déduire A et B.

c) Exprimer alors la force $\overrightarrow{F_h}$ exercée par l'huile sur le pavé, on note S la surface du pavé en contact avec l'huile.

2°) On étudie désormais les actions qui agissent sur le pavé

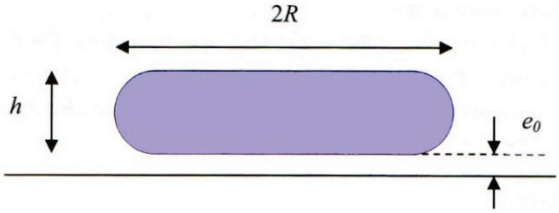
a) Effectuer un bilan des actions mécaniques sur le pavé.

b) Déduire la vitesse v_o en fonctions des divers paramètres du problème.

3°) Critiquer le modèle proposé.

MF22 – Caléfaction

Une goutte d'eau posée sur une plaque chaude s'évapore en une fraction de seconde. Toutefois, si la température de la plaque est très supérieure à la température d'ébullition du liquide, on observe que le temps de vie de la goutte augmente fortement. La goutte est alors isolée thermiquement de la plaque par un film de sa propre vapeur : c'est le phénomène de caléfaction ou de Leidenfrost. Dans cet état, on observe également que les gouttes sont très mobiles et glissent sur le film de vapeur qui les protège. Nous nous intéressons tout d'abord à la forme d'une goutte en caléfaction. Nous admettrons que la goutte prend la forme d'un palet d'épaisseur h et de rayon R tel que $h \ll R$. Elle est séparée du substrat chaud par un film de sa propre vapeur d'épaisseur e_0.



1°) La tension superficielle d'un liquide est une grandeur caractéristique qui mesure le coût énergétique de création d'interface liquide/air. Cette grandeur est toujours positive et nous la noterons γ. L'énergie « potentielle » de surface associée à la forme d'une goutte liquide de volume Ω donné s'exprime par : $E_s = \gamma \Sigma$ où γ est la tension superficielle de l'eau et Σ l'aire de l'interface liquide/gaz de la goutte.

- Quelle est la dimension de γ ? Proposer une expression de E_s en fonction de γ, h et Ω.

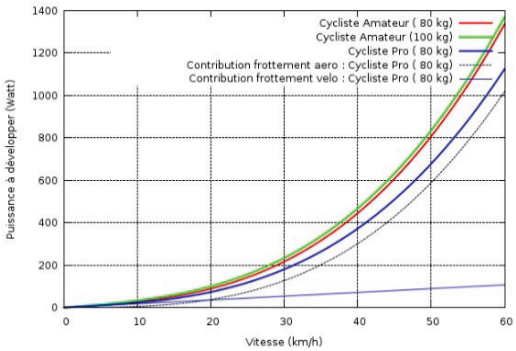
2°) La forme de la goutte est dictée par une compétition entre tension superficielle qui tend à minimiser l'aire de l'interface eau/air et la gravité qui tend à aplatir la goutte.

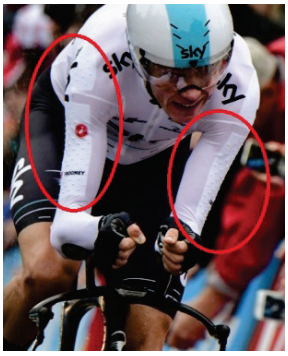
- Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur E_g de la goutte ?

3°) En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale $E_p = E_p(\Omega, h, \gamma, \rho)$. En déduire l'épaisseur d'équilibre h_e de la goutte caléfiée en fonction de la longueur capillaire du liquide $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$. Donner une estimation numérique de l_c et de h_e.

Données : $\rho(eau, liquide, 100°c) = 958\ kg\ m^{-3}$ et tension superficielle de l'eau à 100°c : $\gamma = 59\ mN\ m^{-1}$

MF23 – Coefficient de trainée d'un cycliste





En cyclisme, différentes forces s'opposent à l'avancement du cycliste et de sa bicyclette et limitent sa vitesse de déplacement. À vitesse élevée $50 km\ h^{-1}$, la traînée aérodynamique est la plus importante de toutes ces forces. Pour se représenter son importance, il faut savoir que 90% de la puissance produite par un cycliste sert à vaincre cette résistance. Durant les courses cyclistes, et plus particulièrement lors des épreuves de "Contre-la-montre", les différences de temps entre les athlètes peuvent être minimes. L'optimisation des paramètres aérodynamiques du cycliste et de sa bicyclette peuvent être déterminants pour augmenter la vitesse de déplacement pour une même production de puissance. La résistance aérodynamique est directement proportionnelle à l'aire frontale projetée du cycliste et de sa bicyclette : la maitre couple A en m^2, au coefficient de traînée C_x, à la masse volumique de l'air μ en $kg\ m^{-3}$ et au carré de la vitesse d'écoulement du fluide sur le corps du cycliste $(v_f, en\ m.s^{-1})$:

$$F_t = \frac{1}{2}\mu C_x A v_f^2$$

Le coefficient de traînée est utilisé pour modéliser les facteurs complexes de forme, de position et les flux d'air agissant sur le corps du cycliste en déplacement. Froome lors du prologue du tour de France (2017) présentait un C_x de 0,5 alors qu'en 1994 celui d'Indurain était de 0,65. (Usain Bolt en course a un C_x de 1,2).

- Déterminer l'ordre de grandeur du coefficient de traînée d'un cycliste. Comparer à la valeur du cycliste Froome. Quel est le gain de puissance d'un C_x de 0,15. (Rappel : $\eta_{air} = 1{,}8\ 10^{-5} Pl$)
- Quel est le rôle des microbilles appelés vortex utilisés sur la combinaison de Froome lors de ce prologue.

MF24 – Parachutisme

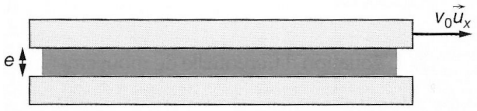
La masse d'un parachutiste avec son équipement est de 120 kg. Le coefficient de traînée du parachute ouvert est de 1,2 et son diamètre de 6 mètres.

1°) Quelle est la vitesse limite de descente du parachutiste ?

2°) Ce parachutiste doit se poser sur l'aéroport de La Paz en Bolivie, à 4200 mètres d'altitude. Peut-il garder le même parachute ?

MF25 - Modélisation d'une lubrification

Un fluide newtonien est réparti sur une hauteur e entre deux plaques horizontales très longues. La plaque du dessous est immobile et celle du dessus possède la vitesse constante $\overrightarrow{v_o}$. On travaille dans le plan (xOz).



a) Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par l'écoulement ?
b) On suppose que $v(M) = Az + B$, en déduire le champ des vitesses.
c) Quelle est la composante horizontale de la force exercée par le fluide, par unité de surface, sur la plaque supérieure?
d) Un bloc métallique parallélépipédique, de surface carrée de côté a = 10 cm et de masse m = 1 kg, est posé sur un plan incliné d'un angle α = 45° par rapport à l'horizontale. Le plan incliné est lubrifié, c'est-à-dire enduit d'une huile de viscosité (dynamique) η . La plaque se met alors en mouvement. On suppose que l'écoulement de l'huile peut être modélisé de la même manière qu'au début de cet exercice, avec une épaisseur e = 1 mm d'huile. Le champ de pesanteur est noté g = 9,8 m.s^{-2}. En déduire l'équation du mouvement du bloc.
a) Après un certain temps, la vitesse du bloc se stabilise à la valeur $v_f = 0{,}5\ m\ s^{-1}$. En déduire la viscosité η de l'huile.
b) Quelle est la durée du régime transitoire ?

MF26 – Trajectoire d'une balle

Deux forces déterminent la trajectoire d'un ballon de football : son poids $m\vec{g}$ et la force aérodynamique, qui contient deux composantes : la force de traînée, $\overrightarrow{F_t}$ alignée avec la vitesse du ballon, et la force de portance $\overrightarrow{F_p}$ orthogonale à la vitesse du ballon. On souhaite comparer les effets aérodynamiques ou les effets de la gravité qui déterminent la trajectoire de la balle.

1°) Déterminer, par analyse dimensionnelle, la portée L_g d'un tir dans le champ de pesanteur terrestre, en fonction de U et de g. Calculer la valeur de L_g pour les différents sports de balle envisagés dans le tableau suivant :

Sport	Masse de la balle m (kg)	Diamètre $2R$ (cm)
Golf	$4,5 \times 10^{-2}$	4,2
Tennis	$5,7 \times 10^{-2}$	6,5
Football	0,44	21
Handball	0,45	19
Sport	Vitesse caractéristique U ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	Longueur du terrain L (m)
Golf	90	200
Tennis	70	24
Football	30	100
Handball	20	40

2°)
a) Evaluer le nombre de Reynolds R_e pour chacun des cas envisagés dans le tableau. Conclure quant à l'expression de la force de traînée à utiliser.
b) On envisage le mouvement rectiligne d'une balle, de masse m et de diamètre 2R dans l'air en négligeant l'action de la pesanteur. Montrer que la vitesse de la balle décroît exponentiellement avec la distance parcourue. Mettre en évidence une distance de freinage aérodynamique L_a et l'exprimer en fonction de la masse m, du rayon R de la balle et de la masse volumique μ_a de l'air.
c) Evaluer la longueur de freinage aérodynamique L_a pour les différents cas envisagés.

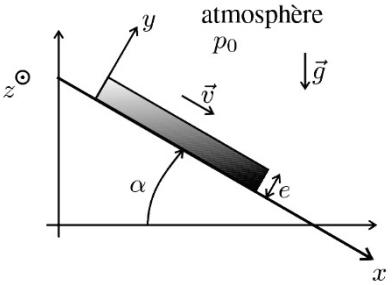
3°) En utilisant les données numériques du tableau et les longueurs caractéristiques calculées, comparer l'influence relative de la gravité et des effets aérodynamiques dans les différents sports envisagés.

MF27 – Vent favorable

En athlétisme, un record de sprint ne peut être validé que si le vent favorable est inférieur à $2m.s^{-1}$. De quel facteur la force de traînée que l'air exerce sur un coureur de 100 mètres est-elle réduite si celui-ci bénéficie d'un vent favorable de deux mètres par seconde ? Commenter.

Données :
- Masse volumique de l'air : $\mu = 1{,}3\ kg\ m^{-3}$
- Viscosité de l'air : $\eta = 1{,}8\ 10^{-5}\ Pa.s$

MF31 – Ecoulement sur un plan incliné



On considère un fluide de viscosité η, de masse volumique μ qui s'écoule sur un plan incliné d'angle α entre z = 0 et z = L. On néglige les forces de viscosité à l'interface entre le fluide et l'atmosphère. L'écoulement est stationnaire, homogène et incompressible. Le champ des vitesses est de la forme : $\vec{v} = v(x,y,z)\overrightarrow{u_x}$

1°) Démontrer que $v(x,y,z) = v(y)$

2°) Exprimer p la pression du fluide en fonction de $P_0, \mu, g, \alpha, y\ et\ e$.

3°) Exprimer v(y) en fonction de $\mu, g, \eta, \alpha, y\ et\ e$. Calculer v_{max} et tracer $\frac{v}{v_{max}} = f\left(\frac{y}{e}\right)$.

4°) En déduire le débit massique D_m.

MF32 - Écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles

On réalise un écoulement de Poiseuille plan de deux liquides non miscibles, considérés tous deux comme incompressibles, entre deux plaques planes horizontales. Les masses volumiques des liquides sont μ_1 *et* μ_2. Ils sont tous deux newtoniens, de viscosités dynamiques η_1 *et* η_2. L'écoulement est stationnaire. On travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, dans lequel les deux plaques sont fixes. L'axe (Oz) du repère cartésien est vertical ascendant. Le liquide indicé 2 occupe la zone comprise entre $z = -\frac{b}{2}$ *et* $z = 0$. Le liquide indicé 1, celle comprise entre $z = 0$ *et* $z = \frac{b}{2}$. On néglige les effets de bord c'est-à-dire qu'on suppose ces deux zones infiniment étendues selon (Ox) et (Oy). On impose une pression P_e uniforme dans le plan x = 0, et une pression $P_s < P_e$ dans le plan x = L.

1°) Quelle est la relation d'ordre entre μ_1 *et* μ_2? Justifier.

2°) On néglige désormais l'effet du poids. On admet que le champ des vitesses est de la forme :

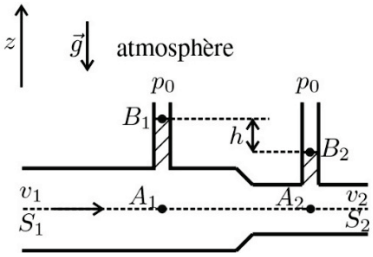
$$\overrightarrow{v_1} = v_1(x,z)\overrightarrow{u_x} \text{ et } \overrightarrow{v_2} = v_2(x,z)\overrightarrow{u_x}$$

Montrer que la pression ne dépend que de x.

3°) Montrer que dans chacun des deux liquides, le champ des vitesses ne dépend pas de x. Établir les expressions des deux champs des vitesses.

4°) Donner les allures possibles du champ des vitesses en fonction de z selon la valeur du rapport η_2/η_1.

MF33 – Débitmètre



On considère un fluide qui s'écoule dans une canalisation horizontale. L'écoulement est homogène, permanent, parfait et incompressible.

1°) Exprimer le débit volumique en fonction de S_1, S_2, g *et* h.

2°) Si $S_2 < S_1$, comparer les pressions à l'entrée et à la sortie de la canalisation.

MF34 – Cyclone

À l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz, de rayon R, l'écoulement de l'air est homogène, parfait, permanent, incompressible et tourbillonnaire. On définit à l'intérieur de ce cylindre (appelé œil du cyclone) le vecteur tourbillon :

$$\overrightarrow{\Omega} = \Omega\,\overrightarrow{u_z} \text{ où } \Omega = cste$$

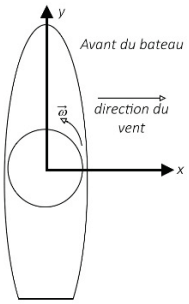
À l'extérieur du cylindre, l'écoulement est homogène, parfait, permanent, incompressible et irrotationnel. On note p_0 la pression infiniment loin du cylindre. Les lignes de courant sont des cercles. On admet que $\vec{v} = v(r)\,\overrightarrow{u_\theta}$. On néglige les effets de la pesanteur. On rappelle que :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$$

1°) Exprimer v en fonction de r et R.

2°) Déterminer la pression p en négligeant les effets de la pesanteur.

MF35 – Effet Magnus – Voile Flettner



Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon a et de hauteur h, tournant autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\,\overrightarrow{u_z}$. L'air est assimilé à un fluide parfait incompressible et le vent souffle à une vitesse uniforme constante $\vec{u} = u\,\overrightarrow{u_x}$.

L'écoulement de potentiel des vitesses $\phi_1 = u\cos(\theta)\left(\frac{a^2}{r} + r\right)$ correspond au mouvement du vent autour du cylindre fixe. L'écoulement de vitesse $\overrightarrow{v_2} = \frac{C}{2\pi r}\,\overrightarrow{u_\theta}$ pour $r \geq a$ correspond à l'effet d'entraînement de l'air par le cylindre en rotation. On supposera dans tout le problème le régime permanent établi et l'écoulement du fluide irrotationnel.

1°) Donner la relation entre la constante C et ω. On remarquera que dans ce modèle la vitesse du vent sur le cylindre est celle du cylindre.

2°)

a) Calculer les composantes de la vitesse du vent $\vec{v}$ dans la base polaire.

b) Représenter, pour différentes valeurs de ω, la carte des lignes de courant du fluide, en précisant les points d'arrêt ou points de vitesse nulle.

3°) Déterminer la pression $P(a,\theta)$ en tout point du cylindre et en déduire la force exercée par le fluide sur le cylindre, par unité de longueur de ce dernier.

4°) Préciser le sens de rotation du cylindre qui correspond à une force propulsive.

MF36 - Chariot entraîné

Un chariot cubique, remplit d'un liquide, se déplace sur le sol avec une accélération constante : $\overrightarrow{a_e} = a\,\overrightarrow{e_x}$. Notons $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération relative du fluide par rapport au chariot.

a) Quelle est l'accélération du fluide par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen $\overrightarrow{a_t}$.

b) Faire un bilan des forces sur chaque la particule de fluide.

c) Appliquez la loi fondamentale de la dynamique à un volume mésoscopique dτ dans le référentiel terrestre. En déduire que : $\rho\,(\overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} - \vec{g}) = -\overrightarrow{grad}p$

d) En déduire la loi vérifiée si le fluide est au repos dans le référentiel lié au chariot.

e) Quelle est l'allure de la surface libre du liquide lorsqu'elle est stabilisée. On prendra comme origine la base-gauche du chariot et la hauteur d'eau pour x=0 sera notée z=H.

MF37 – Ecoulement de Poiseuille dans un cylindre

On considère un cylindre horizontal de rayon R, de longueur L. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\,\overrightarrow{u_z}$. On appelle μ la masse volumique et η la viscosité du fluide. Le Laplacien du vecteur vitesse s'écrit :

$$\overrightarrow{\Delta}\vec{v} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)\overrightarrow{u_z}$$

L'écoulement est stationnaire et incompressible. On néglige les effets de la pesanteur. On appelle p_A la pression à l'entrée du cylindre (z = 0) et p_B la pression à la sortie du cylindre (z = L).

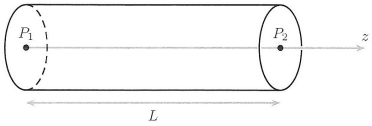
1°) Déterminer la vitesse du fluide, à l'intérieur du cylindre, en fonction de p_A, p_B, L, η, R et r.

2°) Déterminer le débit massique, dû à l'écoulement, en fonction de p_A, p_B, η, L et R.

MF38 - Écoulement de Poiseuille dans un tuyau

On considère un tuyau cylindrique, de rayon R, de longueur L, horizontal et parcouru par un liquide newtonien de viscosité dynamique η. La pression sur l'axe du cylindre est P_1 à l'entrée et P_2 à la sortie du tuyau. L'écoulement est permanent et laminaire.

On ne tient pas compte de la pesanteur, dont les effets sur le fluide sont compensés par la réaction du tuyau. Dans ce cas, le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = f(r)\overrightarrow{u_z}$.



1°) Justifier que le champ de vitesse ne dépend que de la variable r.

2°) Justifier que la pression est uniforme sur une section droite du tuyau.

3°)

a) Comment s'adapte la définition de la viscosité dynamique dans le cas de l'écoulement étudié ?

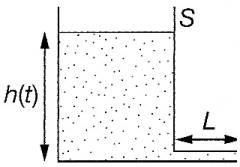
b) En raisonnant sur un cylindre de fluide de longueur L et de rayon r, établir une équation liant le champ de vitesse et les pressions en z = 0 et z = L.

c) En déduire le profil de vitesse f (r).

4°) En déduire le débit volumique à travers une section du tuyau. En établissant une analogie avec la loi d'Ohm de l'électricité, définir la notion de résistance hydraulique. Exprimer la résistance hydraulique du tuyau en fonction des données.

MF39 - Vidange d'un récipient

On réalise l'expérience suivante : un récipient, de section S = 8.10^3 cm^2, rempli d'un fluide incompressible de viscosité η = 0,3 Pl et masse volumique μ = 900 kg.m^{-3} sur une hauteur initiale $h_0 = 3\,m$, se vide par un tuyau horizontal de longueur L=1 m et rayon R=5 mm situé sur sa partie basse. On prendra g = 9,8 m.s^{-2}.



On admet que dans le corps du récipient (en dehors du tuyau), la vitesse du fluide est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer la situation comme statique.

a) À quelle condition sur la section S du récipient cette hypothèse est-elle vérifiée ?

b) Que vaut la pression P_e à l'entrée du tuyau ? Et celle P_s en sortie ?

c) En supposant l'écoulement laminaire et quasiment stationnaire, évaluer le débit volumique sortant du tuyau.

d) Que vaut la vitesse débitante de sortie v initialement ?

e) Vérifier a posteriori la nature laminaire de l'écoulement.

f) Trouver une équation différentielle satisfaite par h(t), hauteur de fluide dans le récipient.

g) Quelle est la durée nécessaire pour vidanger la moitié du récipient ?

MF310 – Ecoulement du Ketchup

On considère l'écoulement laminaire, stationnaire, irrotationnel et incompressible du ketchup assimilé à un fluide visqueux, de masse volumique μ, dans une conduite verticale et cylindrique sous le seul effet de la pesanteur. On suppose que la pression ne varie pas le long du tube. On note Oz l'axe du tube. Le champ eulérien des vitesses est, en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{u_z}$, où r est la distance du point M à l'axe du tube, et où le vecteur $\overrightarrow{u_z}$ est orienté dans le même sens que l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. On note σ(r) la projection sur $\overrightarrow{u_z}$ de la force tangentielle surfacique que le fluide situé à l'intérieur du cylindre de rayon r exerce sur le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon r. Le ketchup est un fluide non newtonien caractérisé par le comportement rhéologique suivant :

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0 - \sigma(r)}{\eta} \; pour \; \sigma(r) \geq \sigma_0 \\ 0 \; pour \; \sigma(r) \leq \sigma_0 \end{cases}$$

Les deux paramètres η (homogène à une viscosité dynamique) et σ_0 sont deux caractéristiques du fluide étudié.

1°) On considère une particule de fluide, comprise entre z et z+dz et entre r et r+dr. Établir l'équation différentielle du mouvement de cette particule de fluide.

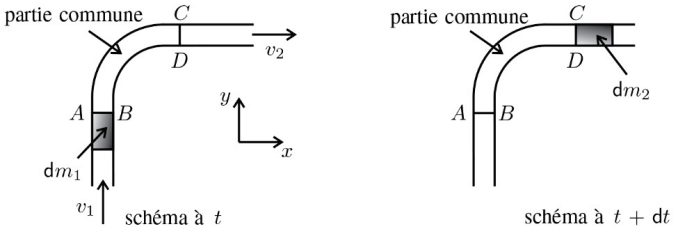
2°) Intégrer cette équation différentielle et donner l'expression de $\sigma(r)$.

3°) En déduire l'expression du champ des vitesses. On sera amené à distinguer deux cas, selon que r est supérieur ou inférieur à un rayon caractéristique r_0. On fera de plus l'hypothèse que $r_0 \leq R$. Donner l'allure du champ des vitesses en fonction du rayon r. Expliquer pourquoi on parle d'écoulement bouchon.

4°) Donner l'expression du champ des vitesses lorsque $r_0 \geq R$. Déterminer l'ordre de grandeur du rayon minimal d'un tube permettant l'écoulement du ketchup : σ_0 est de l'ordre de 50 Pa et η de l'ordre de 10^6 Pa.s et $\mu = 1400 \; kg \; m^{-3}$.

MF41 – Force exercée par un liquide sur un tuyau coudé

On considère un tuyau coudé horizontal de section S constante. L'écoulement de l'eau est homogène, parfait, permanent, incompressible. On néglige les variations d'altitude dans le tuyau. On appelle v_1 et v_2 respectivement les vitesses à l'entrée et à la sortie du tuyau. On appelle p_1 et p_2 les pressions respectivement à l'entrée et à la sortie du tuyau. On suppose que la pression est uniforme à l'entrée et à la sortie du tuyau.



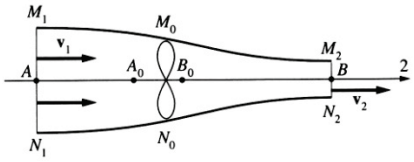
1°) Montrer que $p_1 = p_2$.

2°) Exprimer la force exercée par le fluide sur le coude dans le plan horizontal en fonction de $\mu, D_v, S \; et \; p_1$.

MF42 - Théorie unidimensionnelle de l'hélice

Une hélice est plongée dans un fluide incompressible de masse volumique μ, animé d'un mouvement permanent et irrotationnel selon la direction définie par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_x}$ porté par l'axe de l'hélice, à l'exception de la zone située au voisinage immédiat de l'hélice.

L'hélice est supposée plane et on admettra que le fluide traversant l'hélice est contenu à l'intérieur d'un tube de courant ayant la symétrie de révolution et dont la trace dans le plan de figure est constituée par les courbes $M_1M_0M_2$ et $N_1N_0N_2$.



La zone extérieure à ce tube n'est pas affectée par le mouvement de l'hélice et la pression y est désignée par P_o. Les phénomènes à l'intérieur du tube sont rapportés à un référentiel (R_1) galiléen lié au support de l'hélice.

On suppose que la vitesse et la pression du fluide sont uniformes dans une section droite donnée du tube, et que leur répartition obéit aux hypothèses suivantes :

- En amont de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_o, la vitesse du fluide est v_1, la surface de la section droite est S_1. Sur la figure cette section correspond au point A.
- En aval de l'hélice (et suffisamment loin d'elle), la pression est P_o, la vitesse du fluide est v_2, la surface de la section droite est S_2. Sur la figure, cette section correspond au point B.
- Au voisinage immédiat de l'hélice, la surface de la section est S, la vitesse du fluide est v.

On désigne par F la composante selon Ox de la force exercée par l'hélice sur le fluide et par P la puissance de cette force, puissance fournie au fluide.

On néglige le poids du fluide dans toutes les questions.

1°) Relier $v_1S_1 \; et \; v_2S_2$ à vS.

2°) En prenant comme volume de contrôle le tronçon de tube de courant de trace $M_1M_2N_2N_1$, effectuer un bilan de quantité de mouvement et exprimer la force F exercée par l'hélice sur le fluide puis la puissance P fournie pour l'hélice au fluide en fonction de $\mu, v_1, v_2, v \; et \; D_v$.

3°) Effectuer un bilan énergétique sur le même volume de contrôle. En déduire une autre expression de P en fonction de $\mu, v_1, v_2 \; et \; D_v$.

Déduire de ces deux expressions de P une relation entre $v, v_1 \; et \; v_2$, et exprimer P à l'aide de $\mu, S, v_1 \; et \; v_2$.

4°) On se place dans le cas où $v_1 = 0$. Calculer F en fonction de μ, S et P.

5°) Un hélicoptère a pour masse 2 tonnes et son hélice a pour diamètre 5 m. Quelle doit-être la puissance minimale du moteur pour que cet hélicoptère puisse décoller ?

MF43 – Fusée Ariane 5

On étudie le décollage vertical de la fusée Ariane 5. La masse de la fusée et du satellite est notée m_f. A t=0, la masse de gaz est notée m_{go}. Les gaz sont éjectés avec une vitesse verticale par rapport au référentiel terrestre galiléen à la vitesse relative $\vec{u}$ par rapport à la fusée. On note D_m le débit massique supposé constant. On néglige les frottements de l'atmosphère et le champ de pesanteur g est supposé uniforme.

Données :

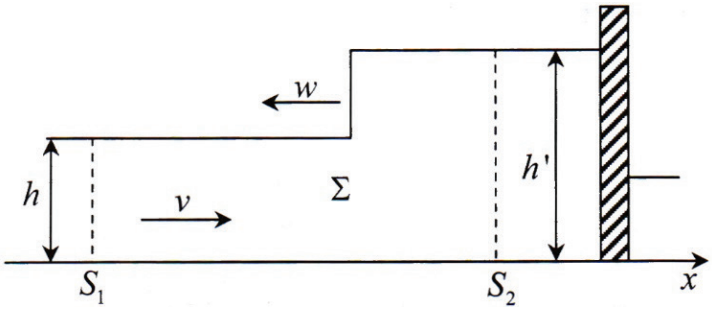
- $D_m = 3{,}6 \times 10^3\, kg.s^{-1}$; $g = 9{,}8\, m.s^{-2}$;
- $m_0 = m_f + m_{g0} = 460 \times 10^3 kg$;
- $u = 2{,}1 \times 10^3\, m.s^{-1}$

1°) A l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer la force, due à l'éjection des gaz, subie par la fusée.

2°) Quelle doit être la valeur minimale de cette force pour que la fusée décolle ? Calculer l'accélération de la fusée à t = 0.

3°) Calculer la vitesse de la fusée au bout de 15 s.

MF44 – Onde de ressaut



Soit un canal horizontal à section rectangulaire de côté L constant parcouru par l'eau. L'écoulement est supposé parfait, incompressible et homogène et la masse volumique de l'eau est notée ρ. Initialement la hauteur de l'eau est h et le champ des vitesses du fluide est uniforme et constant sur toute section droite du canal : $\vec{v} = v\,\vec{u_x}$.

A un instant donné, le canal est obturé, par une paroi verticale. Une vague remonte alors le canal à vitesse w mesurée dans le référentiel terrestre. La hauteur d'eau en amont du ressaut est h et la vitesse du courant est v. En aval du ressaut, la hauteur d'eau est constante est vaut $h' > h$. Le ressaut remonte le canal à une vitesse constante $\vec{w} = -w\,\vec{u_x}$. Le front du ressaut sera considéré vertical et constitue une onde de choc.

On veut étudier la vitesse de propagation de ce front d'onde à l'aide d'un modèle unidimensionnel du champ des vitesses. On se placera dans le référentiel R lié au front d'onde, supposé galiléen. On notera P_0 la pression de l'air ambiante et on considérera le système fermé Σ^* délimité à l'instant t par deux sections verticales S_1 *et* S_2 situées loin du front d'onde.

1°) A l'aide d'un bilan de masse, établir une relation entre v, w, h *et* h'.

2°) Déterminer la variation de la composante horizontale de la quantité de mouvement du système Σ^* pendant la durée dt.

3°) Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur Σ^*.

4°) A l'aide d'un bilan de quantité de mouvement, déterminer une relation entre v, w, h, g *et* h'.

5°) En déduire l'expression de la célérité de la vague w en fonction de g, h et h'.

6°)

a) A l'aide d'un bilan d'énergie mécanique sur Σ^* démontrez que :

$$\frac{DE_m^*}{Dt} = \frac{\rho g L h' w}{2}(h - h')\ \frac{(h'^2 + h^2)}{2hh'}$$

b) Démontrer que la puissance des forces pression s'écrit :

$$P_p = \frac{\rho g L h' w}{2}(h - h')$$

c) En déduire la puissance des forces intérieures.

$$P_{int} = \rho g L h' w.\frac{(h - h')^3}{4hh'}$$

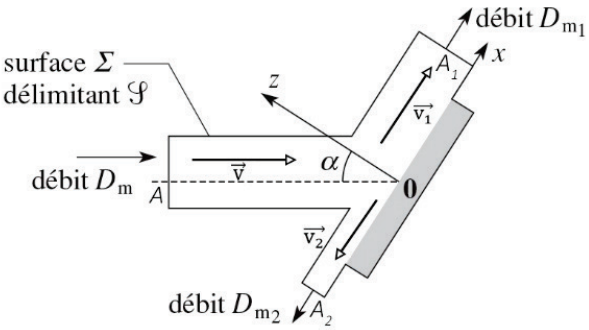
d) Dans le cas du mascaret de la gironde, on a $h = 10m, h' = 12m, L = 100m$. Calculer la vitesse du mascaret w et la puissance dissipée par le mascaret.

MF45 - Division et déflexion de jets d'eau

L'écoulement du jet d'eau, de vitesse v=30m.s^{-1} et de section droite S=20cm², de masse volumique μ=1000kg.m^{-3}, est supposé parfait et incompressible. On notera P_0 la pression atmosphérique et on négligera les forces de pesanteur. Le jet et la plaque sont soumis à la pression atmosphérique.

1°) Division du jet sur une plaque fixe plane

Le jet d'eau incident frappe une plaque horizontale fixe P_1, et fait l'angle θ avec cette plaque. Il se divise en deux jets émergents : jet 1 et jet 2, de vitesse $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ de même direction Ox, opposées et parallèles à la plaque P_1.



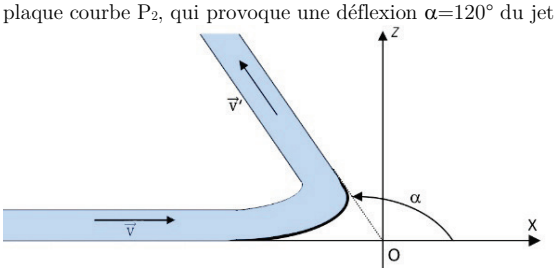
a) Montrer que $v_1 = v_2 = v$.

b) Pour quelle direction θ le débit du jet 1 est-il trois fois supérieur au débit du jet 2 ? Calculer, dans ces mêmes conditions, les débits volumiques Q_1 *et* Q_2 de chacun des jets émergents.

c) Calculer, dans ces mêmes conditions, la force $\vec{F_1}$ exercée par le liquide sur la plaque.

2°) Déflexion du jet par une plaque courbe fixe

Le même jet d'eau horizontal frappe une plaque courbe P_2, qui provoque une déflexion α=120° du jet ; on admettra que v'=v.



Exprimer les composantes de la force $\vec{F_2}$ exercée par le liquide sur la plaque coudée supposée fixe. Calculer F_2 et préciser la direction de $\vec{F_2}$.

MF46 - Rétrécissement d'une conduite

Un liquide incompressible (masse volumique μ = 1000 kg.m^{-3}) est en écoulement parfait stationnaire dans une conduite qui se rétrécit, passant de la section S à la section s.

a) Qualitativement, comment est dirigée la force exercée par l'écoulement sur la conduite ? On va chercher à exprimer cette force en fonction des paramètres de l'écoulement.
La vitesse est V en amont, quelle est sa valeur v en aval ?

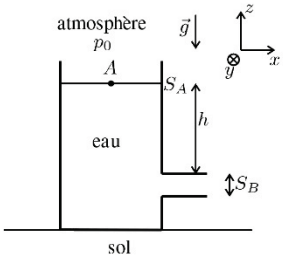
b) Sachant que la pression est P_1 en amont, quelle est la pression P_2 en aval ?

c) Que se passe-t-il lorsque V augmente suffisamment ? Donner la valeur limite V_l pour de l'eau, avec $P_1 = 2.10^5$ Pa, S = 1 cm² et s=0,5 cm².
On supposera dans la suite que la vitesse V reste inférieure à V_l.

d) En faisant un bilan de quantité de mouvement, évaluer la force exercée par le fluide sur la conduite en fonction de P_1, S, s, V *et* μ.

MF47 – Force subie par un réservoir

On considère un réservoir muni d'une vidange. On suppose que $S_B \ll S_A$. L'écoulement est homogène, parfait et incompressible.



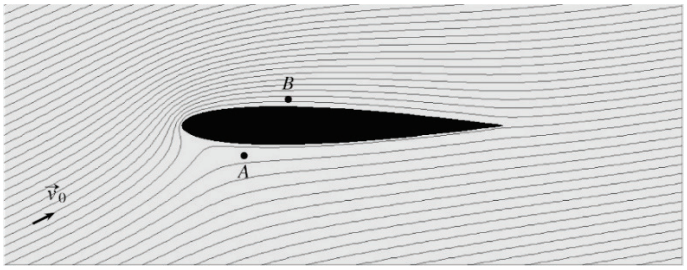
1°) Au bout d'une durée très courte un régime quasi-stationnaire est établi. Montrer que la vitesse de sortie vaut alors $v_B = \sqrt{2gh}$

2°) Exprimer la force que l'eau exerce sur le réservoir.

3°) Quelle est la condition sur le coefficient de frottement f pour que le réservoir ne glisse pas ?

MF48 - Écoulement autour d'une aile d'avion

La figure ci-dessous présente quelques lignes de courant autour d'une aile d'avion, vue en coupe. L'air s'écoule de la gauche vers la droite de la figure.



1°) Sur la figure, représenter sous forme d'un vecteur la résultante des forces que l'air exerce sur l'aile, après avoir donné toutes les justifications utiles. Décomposer cette force en portance et traînée.

2°) Si l'avion vole à une vitesse $v_0 = 100\ ms^{-1}$ par rapport au sol, estimer la vitesse d'écoulement de l'air au point A par rapport au sol. Expliciter toutes les hypothèses faites. Estimer de même la vitesse d'écoulement de l'air au point B par rapport au sol.

3°) Proposer une estimation de l'écart de pression aux points A et B par rapport à la pression atmosphérique. Commenter.